

Lineares Gleichungssystem, Kegelschnitte

Als verallgemeinerte quadratische Formen bezeichnet man Funktionen folgender Form:

$$z(x, y) = s_1x^2 + 2s_2xy + s_3y^2 + s_4x + s_5y + s_6. \quad (1)$$

Schnitte einer solchen Fläche mit einer Ebene (z.B., $z(x, y) = 0$) bezeichnet man als Kegelschnitte (Ellipsen, Kreise, Hyperbeln, Parabeln) bzw. als entartete Kegelschnitte (Geraden, Geradenpaare, Punkte).

Bei bekannten Datenpunkten x_d und y_d kann man $z(x_d, y_d) = 0$ als lineares Gleichungssystem für s_i auffassen

$$s_1x_d^2 + 2s_2x_dy_d + s_3y_d^2 + s_4x_d + s_5y_d + s_6 = 0. \quad (2)$$

In dieser Form ist es ein homogenes Gleichungssystem, das immer die triviale Lösung $s_i = 0$ liefern würde. Man kann sich aber helfen und einen der Koeffizienten $s_k = 1$ setzen und den entsprechenden Term auf die rechte Seite bringen. Wählt man z.B. den dritten Term $s_3 = 1$ lautet das inhomogene Gleichungssystem

$$s_1x_d^2 + 2s_2x_dy_d + s_4x_d + s_5y_d + s_6 = -y_d^2, \quad (3)$$

das nun die Form $Ds = b$ hat und mit MATLAB gelöst werden kann. Da es nun fünf unbestimmte Koeffizienten gibt, benötigt man fünf Datenpunkte (x_d, y_d) , um den Kegelschnitt genau zu bestimmen.

Schreiben Sie nun ein Skript

kegelgl,

in dem Sie folgende Aufgaben lösen:

- Erzeugen Sie zwei (5×1) -Vektoren x_d und y_d mit gleichverteilten Zufallszahlen zwischen -0.5 und 0.5 (`rand`). Erzeugen Sie auf alle Fälle x_d vor y_d .
- Erzeugen Sie mit Hilfe dieser Vektoren die Hilfsmatrix

$$M = [x_d^2, 2x_dy_d, y_d^2, x_d, y_d, 1],$$

wobei x_d , y_d und 1 jeweils Spaltenvektoren gleicher Länge sein müssen.

- Erzeugen Sie unter Verwendung von `rand` und `ceil` eine ganzzahlige Zufallszahl (Variable: n) zwischen 1 und 6 . Diese Zahl stellt den Index jener Spalte dar, die auf die rechte Seite des Gleichungssystems gebracht werden soll. Erzeugen Sie nun die Matrix D und den Inhomogenitätsvektor b . Verwenden Sie dafür einen logischen Vektor (z.B.: $[0, 0, 1, 0, 0, 0]$) und seine Negation (logische Indizierung).
- Lösen Sie das entsprechende Gleichungssystem $Ds = b$ und fügen Sie im so erhaltenen s an der richtigen Stelle 1 ein (logische Indizierung). Damit ist das Problem gelöst und das Ergebnis muss noch visualisiert werden.
- Erzeugen Sie dafür zwei Vektoren x und y zwischen -1 und 1 mit 30 Punkten. Alle Kombinationen von x - und y -Werten (die man für einen 3 dimensionalen Plot benötigt) kann man mit dem Befehl `meshgrid` erzeugen und erhält damit die Matrizen xx und yy . Durch Auswertung von Gleichung ?? für diese Matrizen erhält man $zz(x, y)$.
- Stellen Sie die Fläche zz mit dem Befehl `surf` graphisch dar, wobei die Farbe den Wert der Funktion repräsentiert. Verwenden Sie (`view(2)`), um von oben auf die Fläche zu schauen. Weisen Sie dieser "Surface" einen Handle zu und setzen Sie die `EdgeColor` auf `none`, um die störenden schwarzen Linien zu beseitigen (`set`). Siehe auch Hinweis beim nächsten Punkt.
- Zeichnen Sie die Datenpunkte mit schwarzen Ringen in diesen Plot ein. Dabei sollen die Ringe nicht durch Linien verbunden sein. Verwenden Sie dazu den Befehl `line`. Um die Linieneigenschaften zu verändern, ist eine andere Syntax als bei `plot` zu verwenden, und zwar die des `set`-Befehles. Hier sind die Eigenschaften 'Marker', 'LineStyle' und 'Color' zu verwenden.

– Hinweis: Weitere Information finden Sie im Skriptum in [Kapitel 15](#) und in der MATLAB-Dokumentation unter [set](#) und [Line Properties](#). Eine Übersicht über die Graphik-Objekte und deren Eigenschaften gibt der [Handle Graphics Property Browser](#)

- Zeichnen Sie den erhaltenen Kegelschnitt als schwarze Höhenschichtlinie ein. Dafür gibt es in MATLAB den Befehl `contour(X,Y,Z)`. In dieser Form wählt MATLAB die z -Werte für die Höhenschichtlinien automatisch aus. Man kann aber auch einen weiteren Vektor v mit gewünschten Höhenwerten übergeben:

```
v = [0,0]; contour(xx,yy,zz,v);
```

Will man nur einen Höhenwert, muss man ihn seltsamerweise zweimal übergeben. Vergessen Sie auch nicht die Verwendung von `hold`. Die Farbe der Linie könne sie wie bei `plot` oder in der Syntax von `set` setzen (Hinweis: `'LineColor','Line Properties`).

- Damit sollten nun die Höhe von zz in Farbe dargestellt sein und die Datenpunkte und der Kegelschnitt als Höhenschichtlinie eingezeichnet sein. Der Kegelschnitt sollte genau durch die fünf Datenpunkte gehen und entlang einer gleichen Farbe verlaufen.

Anschauungsbeispiel:

