Secans Hyperbolicus Reihenentwicklung

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `reihe_sech.m`.

1. Bevor Sie zum programmieren schreiten, lesen Sie sich unbedingt die Einführung in die Berechnung von Reihen.
2. Die Funktion soll mit `[r1,r2,u] = reihe_sech(x,n)` aufgerufen werden können.
3. Es soll der Secans Hyperbolicus berechnet werden.
4. Übergabeparameter: `x` ein Array von x-Werten und `n` der Maximalwert für die k-Werte.
5. Rückgabewerte: die Teilsummen der Taylorreihenentwicklung um Null

$$r1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{61x^6}{720} + \dots \tag{1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{E}_k}{(2k)!} x^{2k} \,, \tag{2}$$

welche für alle $|x| < \pi/2$ konvergiert . Außerhalb des Konvergenzintervalls geben Sie `NaN` zurück.

Die asymptotische Reihe dargestellt durch

$$r2(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)|x|} \,, \tag{3}$$

die nun für große Werte von x rasch konvergiert und um Null Schwierigkeiten macht. Die Analytische Lösung ist

$$u(x) = \operatorname{sech}(x) = 1/\cosh(x). \tag{4}$$

6. Die Fallunterscheidung bei `r1` können Sie mit Hilfe der logischen Indizierung durchführen.
7. E_k sind die Eulerschen Zahlen, sie sollen mit der Funktion `reihe_eulernum.m` mit `lmax = 10` berechnet werden.
8. Alle Outputwerte müssen die gleiche Größe wie `x` haben. Dazu merkt man sich am Anfang der Funktion die Größe von `x` (`size`), macht aus dem Array `x` einen Vektor (`colon`). Am Ende des Programms kann man dann mit `reshape` sicherstellen, dass die richtige Größe zurückgegeben wird. Beachten Sie also, dass `x` ein beliebig dimensionierte Matrix sein kann.
9. Verwenden Sie für die Berechnung der Reihe den `meshgrid` Befehl. `for`- Schleifen werden nicht benötigt.

Hinweis:

Die Berechnung von $k!$ (Fakultät) kann mit Hilfe der Γ-Funktion durchgeführt werden

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \,, \tag{5}$$

wobei dafür in MATLAB die Funktion `gamma(k)` zur Verfügung steht. Diese funktioniert natürlich wieder für Arrays von k-Werten. Für große $k > 171$ liefert $\Gamma(k)$ den Wert unendlich, da das Ergebnis jenseits der Darstellungsgrenze für den Datentyp `double` liegt.

Hinweis:

In der Matlab-Console können sie `x` definieren, `reihe_sin` ausführen, und danach mit einem Plotbefehl `r` und `u` über `x` darstellen. So sehen Sie sofort ob die Rückgabeparameter Sinn machen.

Gesucht:
Funktion `reihe_sech.m`

```
[r1,r2,u] = reihe_sech(x,n)
          x     : Matrix mit x-Werten
          n     : Obergrenze der Aufsummierung
          r1    : Rückgabevektor der Teilsumme der Taylorreihe
          r2    : Rückgabevektor der Teilsumme der Asymptotischen Entwicklung
          u     : analytische Werte des Secans Hyperbolicus
```

Anschauungsbeispiel:

```
>> [r1,r2,u] = reihe_sech([0,4;0.5,-0.5],3)
r1 =
    1.0000       NaN
    0.8867    0.8867
r2 =
         0    0.0366
    0.8706    0.8706
u =
    1.0000    0.0366
    0.8868    0.8868
```