

*В. С. Семенов, Ю. В. Толстых, Н. Н. Волконская,  
М. Ф. Хейн<sup>\*)</sup>, Х. К. Бирнат<sup>\*)</sup>*

## **Эффективность релятивистского нестационарного пересоединения<sup>\*)</sup>**

**Введение.** Магнитное пересоединение – это физический процесс в плазме, который приводит к быстрому преобразованию запасенной магнитной энергии в кинетическую и внутреннюю энергию плазмы. Прямые измерения на спутниках зарегистрировали признаки пересоединения в магнитосфере Земли: ускоренные потоки плазмы, биполярную вариацию нормальной к токовому слою компоненты магнитного поля и др. Они показали также, что пересоединение обуславливает примерно 80% взаимодействия солнечного ветра с магнитосферой Земли, если судить по разности потенциалов в полярной шапке или интенсивности возникающих токовых систем [1]. Признаки пересоединения были обнаружены также на Солнце, где этот процесс считается ответственным за солнечные вспышки [2]. Есть все основания полагать, что магнитное пересоединение играет важную роль в астрофизических объектах с магнитными полями, в особенности там, где магнитные поля намного сильнее полей на Земле и Солнце. Сюда прежде всего относятся белые карлики, пульсары, магнитары, активные ядра галактик и т. п. [3, 4]. В связи с этим возникает необходимость в обобщении теории пересоединения на релятивистский случай.

Стационарный режим Свита-Паркера релятивистского пересоединения был рассмотрен в [5, 6], разрывная неустойчивость – в [3] и, наконец, механизм Петчека – для стационарного случая в [4, 5] и для нестационарного в [7, 8].

---

<sup>\*)</sup> Институт теоретической и вычислительной физики Технического университета г. Граца (Австрия).

<sup>\*)</sup> Институт космических исследований, г. Грац, Академия наук Австрии.

<sup>\*\*)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-05-64935) и австрийской программы «Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung» (проект № P17099-N08). Работа также поддержана Академией наук Австрии «Verwaltungsstelle für Auslandsbeziehungen» и Техническим университетом г. Граца.

© В. С. Семенов, Ю. В. Толстых, Н. Н. Волконская, М. Ф. Хейн, Х. К. Бирнат, 2007

Важно отметить, что все наблюдаемые случаи магнитного пересоединения, такие как солнечные вспышки, магнитосферные суббури, акты пересоединения на магнитопаузе, носят ярко выраженный взрывообразный характер [1, 2]. Известно, что в процессе пересоединения запасенная магнитная энергия преобразуется в энергию плазмы. Нестационарные модели магнитного пересоединения позволяют, в частности, ответить на вопрос об эффективности этого процесса. Естественно определить эффективность как отношение разности магнитных энергий до и после пересоединения к кинетической и внутренней энергии плазмы, сосредоточенной в ускоренных струях. Было показано [9], что в нерелятивистском случае эффективность пересоединения примерно равна 1/2, т. е. половина магнитной энергии расходуется на ускорение плазмы, а вторая теряется в виде возмущений в объемлющем пространстве. Цель настоящей статьи – показать, что в ультрарелятивистском случае вся магнитная энергия тратится на ускорение плазмы, и, таким образом, релятивистское пересоединение обладает максимально возможной эффективностью, равной единице.

**Релятивистское пересоединение. Решение.** Пересоединение в режиме Петчека [10] отличается от других моделей, таких как разрывная неустойчивость или режим Свита-Паркера [2], тем, что диссипация в плазме происходит локально, в малой части токового слоя, так называемой диффузионной области (рис. 1, *a*). Причиной диссипации могут служить развитие токовой неустойчивости и связанной с ней турбулентности [2] или, как показывает численное моделирование, недиагональные члены тензора электронного давления и холловские эффекты [11]. Так или иначе, в диффузионной области возникает электрическое поле пересоединения  $E^*(x^0)$ , которое разносится на токовый слой МГД-волнами, в том числе альфвеновской волной. В этой части слоя оно работает над токами слоя ( $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} > 0$ ), вследствие чего магнитная энергия преобразуется в энергию плазмы. Одновременно токовый слой расщепляется на медленные ударные волны, которые формируют область вытекания (*OR*) с нагретой и ускоренной плазмой

(рис. 1, б, в).

В работах [7, 8] было показано, как получить решение релятивистских МГД-уравнений [12] для случая так называемого слабого пересоединения, когда

$E^* \ll E_A = v_a B_0 / c$ , где  $v_a = B_0 / \sqrt{4\pi\rho}$  – нерелятивистская альфвеновская скорость.

При этом условии возникает малый параметр  $\varepsilon = \max(E^*(x^0))/E_A \ll 1$ , который позволяет развить теорию возмущений и найти МГД-параметры плазмы в области вытекания, а также форму бегущих ударных волн. Важно отметить, что приближение слабого пересоединения хорошо оправдывается и в зарегистрированных случаях пересоединения в магнитосфере [1], и в численном моделировании [11].

Полученные в [7, 8] результаты можно представить в следующем виде:

$$\bar{p} = 1 + \beta, \quad \bar{\rho} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{[Q(Q-2)]^{1/2} - \mu}, \quad (1)$$

$$\bar{u}^k = \left( \left( \frac{Q}{Q-2} \right)^{1/2}; \left( \frac{2}{Q-2} \right)^{1/2}; 0; 0 \right) \quad (2)$$

$$\bar{v}_x = U_A = \left( \frac{2}{Q} \right)^{1/2} = \left( \frac{2}{\mu + \Gamma\beta + 2} \right)^{1/2}, \quad (3)$$

$$\bar{h}^k = \left( 0; 0; 0; \left( \frac{1}{\bar{u}^1} \right)^{1/2} \varepsilon \tilde{E}^* \left( x^0 - \frac{x^1}{U_A} \right) \right) \quad (4)$$

$$f(x^0, x^1) = \frac{x}{\bar{u}^1 \bar{\rho}} \varepsilon \tilde{E}^* \left( x^0 - \frac{x^1}{U_A} \right) \quad (5)$$

По формуле (1) определяются давление и плотность, по (2) – 4-скорость, по (3)  $x$ -компонента 3-скорости, которая соответствует релятивистской альфвеновской скорости  $U_A$ , по (4) – 4-вектор магнитного поля<sup>\*)</sup>, по (5) – форма ударной волны. Здесь

$Q = \mu + \Gamma\beta + 2$ ,  $\mu = 8\pi\rho_0 c^2 / B_0^2$ ,  $\beta = 8\pi\rho_0 / B_0^2$ ,  $\Gamma = \gamma(\gamma-1)$ ,  $\gamma$  – показатель политропы,

$\tilde{E}^* = E^*(x^0) / E_{\max}$ , а чертой сверху обозначены величины в области вытекания. Решение

<sup>\*)</sup> 4-вектор магнитного поля определяется как  $h^i = {}^* F^{ik} u_k$ , где  ${}^* F^{ik}$  – дуальный тензор электромагнитного поля [12].

нормировано относительно начальной плотности  $\rho_0$ , скорости света  $c$ , начального магнитного поля  $B_0$ , давления  $B_0^2/8\pi$  и расстояния  $ct_0$ , где  $t_0$  длительность импульса пересоединения.

Решение получено для произвольного электрического поля пересоединения  $E^*(x^0)$ , которое играет роль граничного условия на линии пересоединения. Оно может описывать различные режимы пересоединения: стационарный, импульсный и др. Независимо от электрического поля пересоединения плазма на ударных волнах ускоряется до релятивистской альфвеновской скорости (см. (3)) и сильно нагревается (см. (1)), в то время как магнитное поле (см. (4)) значительно ослабевает и становится порядка  $\mathcal{E}$ . Это и означает, что происходит преобразование магнитной энергии в энергию плазмы. Если в силу каких-либо причин пересоединение прекращается, т. е.  $E^*(ct_0) = 0$ , то ударные волны отрываются от линии пересоединения и распространяются как уединенные волны (но не солитоны) вдоль токового слоя. Дело в том, что на этой фазе, так называемой фазе разлета, энерговыделение продолжается, медленные ударные волны перерабатывают всю плазму, находящуюся в пересоединившихся силовых трубках. Поэтому толщина ( $z$ -размер) областей вытекания линейно растет с расстоянием до прежней X-линии (см. (5)). Иными словами, в процессе разлета форма областей вытекания постоянно меняется, и по этому, хотя они и выглядят как уединенные волны, солитонами не являются. За разлетающимися ударными волнами образуется новый токовый слой, в котором может происходить новый импульс пересоединения, и весь процесс может повторяться много раз.

**Энергетический баланс.** Полученное решение позволяет провести детальный анализ перераспределения энергии в процессе пересоединения. Из закона сохранения ясно, что изменение энергии в области втекания ( $IR$ ) должно компенсироваться изменением энергии в области вытекания ( $OR$ ). Энергия плазмы в области вытекания к моменту времени  $x^0$  равна

$$\bar{W} = \bar{T}^{00} V_{OR} = \left( \frac{2}{U_A} - (\beta + 1) \frac{U_A}{\bar{\rho} \bar{u}^0} \right) G(x^0),$$

где  $\bar{T}^{00}$  – плотность энергии,  $V_{OR} = \frac{U_A}{\bar{\rho} \bar{u}^0} G(x^0)$  – объем области вытекания,

$$G(x^0) = \int_0^{x^0} F(\tau) d\tau, \quad F(x^0) = \int_0^{x^0} \tilde{E}^*(\tau) d\tau.$$

Начальная энергия в том же объеме равна

$$W_0 = T^{00} V_{OR} = \left( \frac{2}{\bar{u}^1} - (\beta + 1) \frac{U_A}{\bar{\rho} \bar{u}^0} \right) G(x^0).$$

Подсчет изменения энергии в области втекания требует больших усилий. Возмущения здесь малы – порядка  $\varepsilon$ , но зато охваченная ими область велика – порядка 1. Для нахождения возмущений удобно ввести 4-вектор смещения [13, 14]  $\xi^{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \partial_i(\rho \xi^i) + \rho u_i u^j \partial_j \xi^i, \\ \delta u^i &= u^i \partial_i \xi^i - \xi^i \partial_i u^i - u^i u_i u^j \partial_j \xi^i, \\ \delta h^i &= h^i \partial_i \xi^i - \xi^i \partial_i h^i - h^i \partial_i \xi^i + h^i u_i u^j \partial_j \xi^i, \end{aligned}$$

в терминах которого возмущение плотности энергии в области втекания записывается следующим образом:

$$\delta T^{00} = \delta\rho(Q-2) + 2\delta h^1 = (2-Q)(\partial_1 \xi^1 + \partial_3 \xi^3) + 2\partial_3 \xi^3.$$

Следовательно, изменение энергии в  $I$ -квadrante области втекания может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{IR} &= \int_R \mathcal{E}^{00} dx^1 dx^3 = (2-Q) \int_R \text{div } \xi dx^1 dx^3 + \\ &- 2 \int_R \partial_3 \xi^3 dx^1 dx^3 = Q \int_0^{\infty} \xi^3(x^0, x^1, x^3 = \theta) dx^1, \end{aligned} \quad (6)$$

где для преобразования слагаемого с 3-дивергенцией была применена теорема Стокса. Как видно, изменение энергии определяется поведением  $Z$ -компоненты вектора смещения на границе области вытекания. Это значение можно найти из условия непрерывности нормальной компоненты магнитного поля в системе отсчета разрыва, которое в терминах

4-вектора магнитного поля записывается как  $u^0 \bar{h}_n = h_n$ . Учитывая, что нормаль к разрыву равна  $n^i = (-\partial_0 f, -\partial_1 f, 0, 1)$ , то для  $\mathcal{H}^3$  получим

$$\mathcal{H}^3(x^0, x^1, x^3 = 0) = \frac{1}{U_A} E^* \left( x^0 - \frac{x^1}{U_A} \right) + \partial_1 f. \quad (7)$$

Интегрируя выражение (7)  $\mathcal{H}^3 = \partial_1 \xi^3$  по  $x^1$ , найдем

$$\xi^3(x^0, x^1, x^3 = 0) = \frac{x^1}{\bar{u}^1 \bar{\rho}} E^* \left( x^0 - \frac{x^1}{U_A} \right) - F \left( x^0 - \frac{x^1}{U_A} \right)$$

Тогда можно вычислить изменение энергии в области втекания (6)

$$\mathcal{W}_{IR} = \frac{2}{U_A} \left( \frac{1}{\bar{\rho} \bar{u}^0} - 1 \right) G(x^0)$$

и провести баланс энергии

$$\mathcal{W}_{IR} = \bar{W} - W_0,$$

который показывает, что изменение энергии в области втекания действительно уравнивается изменением энергии в области вытекания. В ультрарелятивистском пределе, когда  $\mu$  и  $\beta \rightarrow 0$ , толщина и соответственно объем области вытекания стремятся к нулю, тогда и  $W_0 \rightarrow 0$ . Следовательно, вся энергия из области втекания расходуется на ускорение и нагрев плазмы в релятивистской струе. Напротив, в нерелятивистском пределе несжимаемой среды,  $u^0 = 1$ ,  $\bar{\rho} = 1$ , положительные и отрицательные возмущения энергии в области втекания в точности компенсируют друг друга:  $\mathcal{W}_{IR} = 0$ , и тогда  $\bar{W} = W_0$ , т. е. исчезнувшая магнитная энергия равна кинетической энергии ускоренной плазмы. Это, впрочем, сразу видно из тривиального

тождества, которое справедливо в нерелятивистском случае:  $\frac{B_0^2}{8\pi} = \frac{\rho_0 v_a^2}{2}$ .

**Эффективность пересоединения.** Как видно из выражения (6), подынтегральная

функция  $Q\xi$  играет роль плотности энергии в столбе плазмы над участком токового слоя  $[x, x + dx]$ . Предыдущие рассуждения носили общий характер и были справедливы для произвольного поведения электрического поля пересоединения. Теперь удобно рассмотреть отдельный импульс, поведение функций  $E^*(x^0)$ ,  $F(x^0)$ ,  $G(x^0)$  иллюстрирует рис. 2.

Для выбранного таким образом поведения электрического поля плотность энергии для разных моментов времени показана на рис. 3, а, где также для сравнения изображена форма ударной волны (рис. 3, б). Видно, что за распространяющимися ударными волнами образуется след с пониженной энергией, в то время как в столбе непосредственно над ударной волной наблюдается область сжатого магнитного поля и сжатой плазмы с положительной энергией. Поэтому вместе с ускоренными потоками вдоль токового слоя распространяется волна сжатия, которая, вообще говоря, может также переносить значительную энергию. Интересно отметить, что в магнитосфере Земли волны сжатия, которые получили название (Travelling Compression Regions) TCRs – бегущие области сжатия, уверенно наблюдаются и рассматриваются как признаки магнитного пересоединения [15]. Соответствующий расчет показывает, что для времен, много больших длительности импульса, энергия в сжатой волне оказывается равной

$$W_{cw} = \frac{2}{U_A \bar{u}^0 \bar{\rho}} x^0 F_0$$

и для умеренно релятивистского случая, т. е. при  $\mu \sim 1$ , может быть порядка энергии ускоренной плазмы в области вытекания. В нерелятивистском случае в несжимаемой плазме магнитная энергия в волне сжатия в 2 раза превышает кинетическую энергию ускоренной на ударных волнах плазмы [9]. В то же время в ультрарелятивистском случае волна сжатия полностью исчезает, и вся исчезнувшая энергия в окрестности токового слоя идет на ускорение и нагрев плазмы.

Волна сжатия рассосредоточена по довольно большому объему в столбе над

разлетающимися ударными волнами, тогда как энергия ускоренных потоков сконцентрирована в узких струях. Оба объекта – струя и волна сжатия – переносят положительную энергию и, покидая некоторый объем, оставляют в нем след с пониженной энергией. Поскольку энергия ускоренных струй носит ярко выраженный нетепловой характер, можно определить эффективность процесса пересоединения как отношение энергии ускоренного потока  $\bar{W}$  к убыли энергии в следе. Расчет показывает, что асимптотически убыль энергии в следе за разлетающимися ударными волнами

$$W_{wake} = -\frac{2}{U_A} x^0 F_0,$$

и поэтому эффективность пересоединения

$$\eta = \frac{\bar{W}}{|W_{wake}|} = 1 - \frac{(\beta+1)U_A^2}{2\bar{\rho}u^0}.$$

В ультррелятивистском случае она равна единице, а в умеренно релятивистском – порядка 0,6. Для нерелятивистского случая из числителя и знаменателя необходимо вычесть энергию покоя, и тогда формула для эффективности примет вид

$$\eta_{nr} = \frac{\gamma^2(\beta+1)-1}{(2\gamma-1)(\beta+1)\gamma}.$$

При малых  $\beta$  и  $\gamma=5/3$  эффективность примерно равна 0,5, т. е. в волне сжатия находится в 2 раза больше энергии, чем в ускоренной струе. При больших  $\beta$  эффективность становится равной 0,7.

**Заключение.** При импульсном пересоединении типа Петчека на фазе разлета образуются разбегающиеся ударные волны, ограничивающие области с ускоренной до альфвеновской скорости (3), сжатой и нагретой плазмы (1). Над ними возникает волна сжатия, которая также распространяется с альфвеновской скоростью и, вообще говоря, переносит значительную энергию, сопоставимую с энергией ускоренных струй.

Два предельных случая (нерелятивистский  $\mu \gg 1$  и  $\beta \gg 1$  и



ультрарелятивистский  $\mu \ll 1$  и  $\beta \ll 1$ ) являются своего рода антиподами. В первом из них, над ударными волнами образуется мощная волна сжатия с энергией примерно в 2 раза превышающей энергию ускоренной струи. В этом случае эффективность пересоединения достигает своего минимума – примерно 0,5. Напротив, в ультрарелятивистском пределе волна сжатия исчезает совсем, и вся энергия из области втекания расходуется исключительно на ускорение и нагрев плазмы внутри струи.

Физически столь разное поведение эффективности в рассмотренных случаях объясняется прежде всего разным характером сжатия плазмы на медленных ударных волнах. В нерелятивистском пределе максимальное сжатие  $\gamma/(\gamma-1)$  (достигается при  $\beta \rightarrow 0$  и при  $\gamma = 5/3$ ) равно 2,5. Толщина области вытекания обратно пропорциональна сжатию (5). Она, хотя и убывает по сравнению с несжимаемым случаем в 2,5 раза, все еще остается заметной и поэтому создает над собой волну сжатия. В ультрарелятивистском пределе сжатие теоретически неограничено\*)  $\bar{\rho} \rightarrow \infty$  (1), и толщина  $OR$  области стремится к нулю, следовательно, возмущения, вносимые движущейся струей в объемлющее пространство, малы. В результате волна сжатия не образуется и эффективность процесса пересоединения стремится к единице.

Интересно также отметить, что в процессе импульсного пересоединения изменения одной магнитной энергии в следе не хватает для ускорения и нагрева плазмы в струе. Частично она черпается из тепловой энергии в области втекания. Иными словами, после каждого импульса пересоединения температура плазмы в следе уменьшается. Таким образом, импульсное пересоединение, которое по существу является электромагнитным взрывом, работает как холодильник, в отличие от обычного газодинамического взрыва, в котором температура за фронтом возмущения повышается.

В. С. Семенов и Н. Н. Волконская благодарят сотрудников Института теоретической физики г. Граца за предоставленную возможность научной работы.

---

\*)Ограничение накладывается только областью применимости уравнения состояния.

Статья поступила в редакцию 4 сентября 2006 г.

## Литература

1. *Hones Jr; E. W.* Magnetic reconnection in space and laboratory plasmas. Washington, 1984.
2. *Priest E. R., Forbes T.* Magnetic reconnection. Cambridge, 2000.
3. *Komissarov S. S., Barkov M., Lyutikov M.* // arXiv:astro-ph/0606375, 2006.
4. *Lyubarsky Y. E.* // MNRAS 2005. Vol. 358. P. 113-119.
5. *Blackman E. G., Field G. B.* // Physica Scripta. 1994. Vol. 52. P. 93-95.
6. *Lyutikov M., Uzdensky D.* // Ap. J. 2003. Vol. 589. P. 893-901.
7. *Semenov V. S., Bernikov L. V.* // JETP 1991. Vol. 99. P. 1456-1468.
8. *Tolstykh Yu. V., Semenov V. S., Biernat H. K.* // Solar planetary relations/ Eds. H. K. Biernat et al. Kerala, India, 2005. P. 342-363.
9. *Semenov V. S., Volkonskaya N. N., Biernat H. K.* // Phys. Plasmas 1998. Vol. 5. P. 3242-3248.
10. *Petschek H. E.* // NASA Spec. Publ. 1964. № 50. P. 425-439.
11. *Birn J., Drake J. F., Shay M. A.* et al. // J. Geophys. Res. 2001. Vol. 106. P. 3715-3720.
12. *Lichnerowicz A.* Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics. New York, 1967.
13. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М., 1955.
14. *Субгатулин Н. Р.* Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. М., 1984.
15. *Slavin J. A., Owen C. J., Dunlop M. W.* et al. // Geophys. Res. Lett. 2003. Vol. 30. P.-2208-2212.

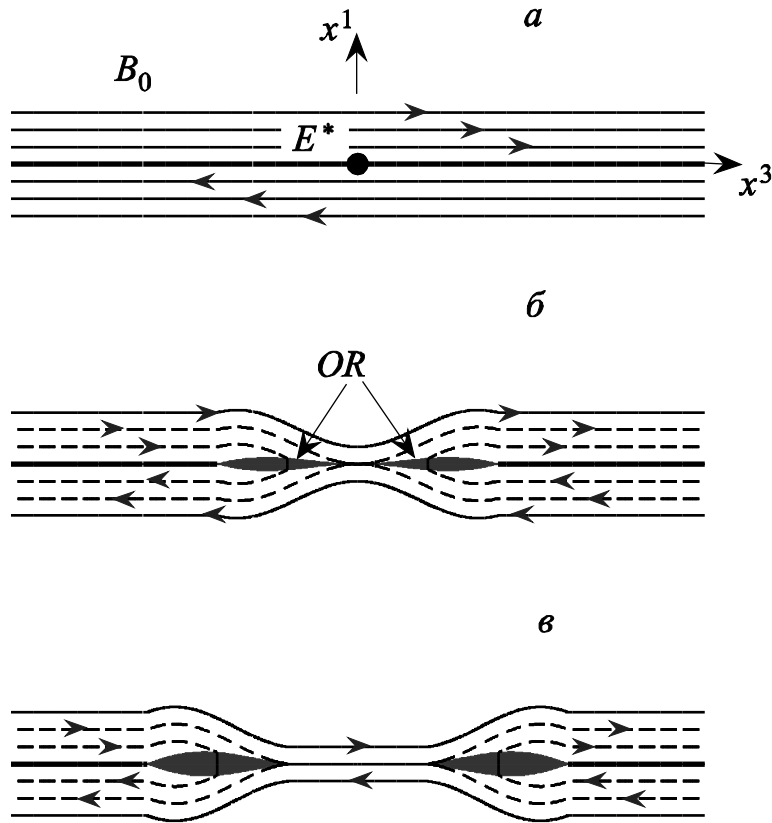


Рис. 1. Фазы пересоединения.

*a* – в начальном состоянии токовый слой разделяет антипараллельные магнитные поля  $\pm B_0$ , в котором вследствие локального падения проводимости создается электрическое поле пересоединения  $E^*$ ; *б* – фаза развития, в течение которой  $E^* \neq 0$ , формируются области вытекания *OR*; *в* – фаза разлета, в течение которой  $E^* = 0$ , *OR* области отрываются от бывшей линии пересоединения, ускоряя и нагревая плазму из пересоединившейся (показано пунктиром) силовой трубки.

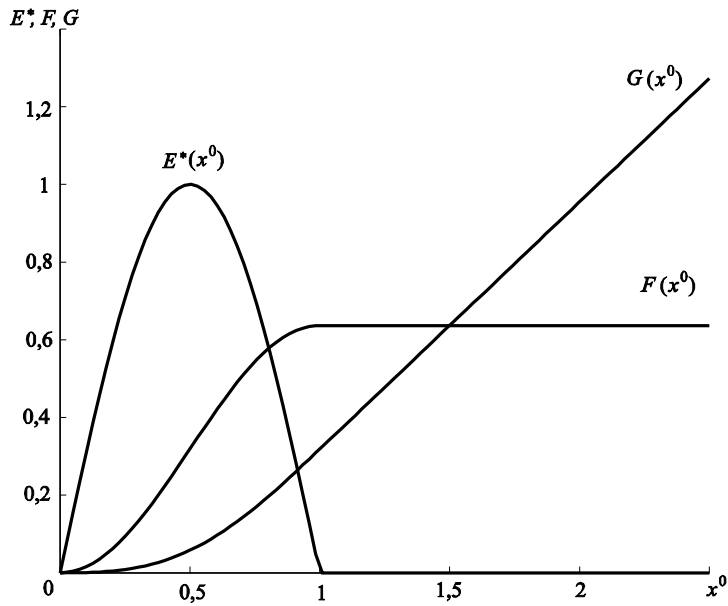


Рис. 2. Поведение модельного электрического поля  $E^*(x^0)$ , нормированного на максимальное значение, пересоединившегося магнитного потока  $F(x^0)$  и функции объема  $G(x^0)$ .

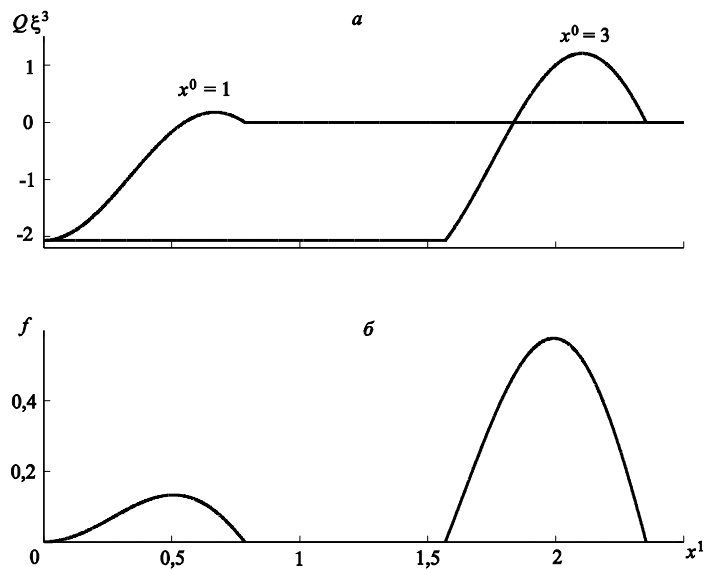


Рис. 3. Энергетика пересоединения.

$a$  – изменение плотности энергии  $Q\xi^3$  в столбе плазмы над токовым слоем для двух последовательных моментов времени;  $b$  – форма бегущей медленной ударной волны для тех же моментов времени.

УДК 523.98:550.385

Семенов В. С., Толстых Ю. В., Волконская Н. Н., Хейн М. Ф., Бирнат Х. К.

**Эффективность релятивистского нестационарного пересоединения** // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4. 2007. Вып. 2. С. 88-95.

Рассматривается импульсное релятивистское пересоединение типа Петчека, которое стимулируется кратковременным локальным повышением диссипации и соответствующим понижением проводимости в малой части токового слоя. Показано, что импульс пересоединения приводит к распространению вдоль токового слоя струй сжатой и нагретой плазмы, ускоренной до альфвеновской скорости, над которыми распространяются волны сжатия. В следе за струями остается область с уменьшенным магнитным полем и пониженной температурой. Эффективность пересоединения определяется как отношение энергии ускоренной струи к изменению энергии в следе. В нерелятивистском случае эффективность оказывается приблизительно равной  $1/2$ , в то время как в ультрарелятивистском пределе она достигает своей максимальной величины -- единицы. В этом случае волна сжатия не образуется, и все изменение энергии в следе расходуется на ускорение и нагрев чрезвычайно узких ультрарелятивистских струй плазмы. Библиограф. 15 назв. Ил. 3.

В. С. Семенов, Ю. В. Толстых, Н. Н. Волконская, М. Ф. Хейн, Х. К. Бирнат

### **Эффективность релятивистского нестационарного пересоединения**

Показано, что релятивистское пересоединение наиболее эффективно в холодной плазме и сильном магнитном поле. В этом случае плазма может ускоряться до релятивистской альфвеновской скорости с высоким Лоренц-фактором и значительно нагреваться.

### **Summary**

Semenov V. S., Tolstykh Yu. V., Volkonskaya N. N., Heyn M. F., Biernat H. K.

### **Efficiency of Petschek-type relativistic unsteady reconnection.**

Time-depended Petschek-type relativistic reconnection is stimulated by localized enhancement of plasma resistivity in the current sheet. It is shown that relativistic reconnection is especially efficient for the case of a strong magnetic field and the cold plasma. Then the plasma is accelerated up to relativistic velocity with high Lorentz-factor and strongly heated.