5 Magnetische Resonanz

- Ein Spin-1/2 Teilchen befindet sich im homogenen Magnetfeld in z-Richtung:

$$\hat{H}_0 = \frac{eg}{2m} B_z \; \hat{S}_z \; =: \; \omega_0 \hat{S}_z \tag{14}$$

  Die Eigenzustände sind $| \pm z\rangle$ mit den Eigenwerten $E_\sigma = \sigma \frac{\hbar\omega_0}{2}$ mit $\sigma = \pm 1$.

- Wenn das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $|\psi\rangle$ präpariert wird, ist es zur Zeit $t > 0$ im Zustand

$$e^{-i\frac{t}{\hbar}\;\hat{H}} \; |\psi\rangle$$

  Die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System zur Zeit t im Eigenzustand $|\sigma\rangle$ befindet

$$\left| \langle\sigma| e^{-i\frac{t}{\hbar}\;\hat{H}} \; |\psi\rangle \right|^2 = \left| e^{-i\frac{t}{\hbar}\;E_\sigma} \; \langle\sigma|\psi\rangle \right|^2 = \left| \langle\sigma|\psi\rangle \right|^2$$

  ist unabhängig von t.

- Um Übergänge zwischen den Niveaus zu erreichen, benötigt man einen t-abhängigen Hamiltonoperator.

$$\hat{H}_0 = \frac{eg}{2m} B_z \; \hat{S}_z \; + \; \frac{eg}{2m} B_x \; \cos(\omega t) \hat{S}_x \; =: \; \omega_0 \hat{S}_z \; + \; \omega_1 \; \cos(\omega t) \; \hat{S}_x$$

  Die zeitabhängigen Schrödingergleichung lautet

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} \; |\psi(t)\rangle$$

  Wir entwickeln den Zustand $|\psi(t)\rangle$ nach den Eigenzuständen $|\sigma\rangle$ von $\hat{S}_z$.

$$|\psi(t)\rangle = \sum_\sigma C_\sigma(t) \; |\sigma\rangle.$$

  Die Schrödingergleichung geht über in

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} C_+(t) \\ C_-(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 \cos(\omega t) \\ \omega_1 \cos(\omega t) & -\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_+(t) \\ C_-(t) \end{pmatrix} \qquad .$$

- Lösen Sie diese DGl numerisch mit NDSolve
  - Plotten Sie $|\langle\sigma|\psi(t)\rangle|^2$
    diese Größe oszilliert mit der sogenannten Rabi-Frequenz Ω.
  - Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Rabi-Frequenz von ω, ω_0 und ω_1.
  - Plotten Sie die Amplitude der Oszillation als Funktion von ω.