QM-Praktikum WS 2003/2004

DER FREIE FALL: Dynamik

Betrachten Sie jetzt ein Teilchen, dessen Wellenfunktion bei der Zeit $t = 0$ die Form eines Wellenpakets zentriert um ξ_0 mit der Breite σ hat (wir benutzen jetzt natürliche Einheiten).

$$\Psi(\xi, \tau = 0) = c \ \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2\sigma^2}\right) \ . \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Normierungskonstante c.

Wir wollen die Zeitentwicklung der Wellenfunktion bestimmen.

Die Energie-Eigenfunktionen haben Sie bereits bestimmt.

$$\Phi_\nu(\xi) = \frac{1}{Z_\nu} \ Ai(\xi - \xi_\nu) \ . \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten c_ν der Entwicklung der Wellenfunktion nach den Eigenfunktionen:

$$\Psi(\xi, \tau = 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \ \Phi_\nu(\xi) \ . \tag{3}$$

Diese bekommt man durch Skalarprodukt (Integration):

$$c_\nu = \int_0^\infty d\xi \ \Phi_\nu(\xi)^* \ \Psi(\xi, \tau = 0) \ . \tag{4}$$

Numerisch kann man nur eine endliche Anzahl von Koeffizienten bestimmen. Die Summe (3) muß also bei einem bestimmten ν_{max} unterbrochen werden.

Da bei korrekte Normierung die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^2 \tag{5}$$

1 ergeben muß, kann man für gegebenes ν_{max} den Fehler bestimmen. Wie verhält sich der Fehler für festes ν_{max} als Funktion von σ?. Was passiert bei einem stark lokalisierten (σ sehr klein) Wellenpaket? Verifizieren Sie die Entwicklung (3).

Schreiben Sie eine Funktion, die für gegebene Input-Parametern (welche sind es?), und gegebener ν_{max} die entsprechende Koeffizienten sowie den Fehler bestimmt. (Überlegen Sie sich, ob der Integral numerisch oder analytisch durchgeführt werden muß).

Die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion ist dann gegeben durch die Entwicklung (3), in der die Zeitabhängigkeit der Eigenfunktionen eingeführt wird:

$$\Psi(\xi, \tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \, e^{-i\tau\xi_\nu} \, \Phi_\nu(\xi) \; . \tag{6}$$

Nochmals wird diese Summe bei ν_{max} abgebrochen.

Schreiben Sie eine Funktion, die die Summe (6) durchführt. Dies wird vermutlich nur numerisch gehen, d. h., die Summe muß für jedes ξ und τ neu berechnet werden. Es ist also sinnvoll, die Summe für eine Masche von ξ-Werte und einen Satz von τ zu berechnen.

Plotten Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(\xi, \tau)|^2$ als Funktion von ξ und evtl. auch von τ in einem Dreidimensionalen oder Graustufenplot.

Berechnen (und plotten) Sie den Erwartungswert $< \xi >$ und die mittlere Breite der Wellenfunktion $\sqrt{< (\xi - < \xi >)^2 >}$ als Funktion von τ.