

# Ginzburg-Landau Gleichung für spezielle Geometrien

Bachelorarbeit

Stefan Hierz  
0314398

Betreuer

Enrico Arrigoni, Univ.-Prof. Dr.rer.nat.

# Contents

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Supraleitung . . . . .	3
1.2	Ginzburg-Landau-Gleichung . . . . .	3
1.2.1	Charakteristische Längen . . . . .	4
1.3	Berechnungen . . . . .	4
1.3.1	Geometrie . . . . .	5
1.3.2	Zylinderkoordinaten . . . . .	5
1.3.3	Eichung des Vektorpotentials . . . . .	6
1.3.4	Ordnungsparameter . . . . .	7
1.4	Besseldifferentialgleichung . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Problemstellungen</b>	<b>9</b>
2.1	SQUID . . . . .	9
2.1.1	Eichung des Vektorpotentials und Randbedingung . . . . .	9
2.1.2	Verschwindend dünner Ring . . . . .	10
2.2	Vortex . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Referenzen</b>	<b>16</b>

# 1 Einführung

## 1.1 Supraleitung

Die erste phänomenologische Beobachtung von verschwindendem Widerstand in Metallen bei tiefen Temperaturen gelang H.K. Onnes 1911 ([8]). Als Theorien zur Beschreibung der neu auftretenden Phänomene standen zuerst die von F. und H. London aufgestellten Gleichungen zur Verfügung ([10]), die auch den von Meissner und Ochsenfeld ([9]) gefundenen perfekten Diamagnetismus beschreiben. Als umfassende mikroskopische Theorie steht seit 1957 die nach Bardeen, Cooper und Schrieffer benannte BCS-Theorie zur Verfügung ([11]). So wie die London-Theorie daraus herleitbar ist, können auch die 1950 phänomenologisch eingeführten Ginzburg-Landau-Gleichungen ([12]) aus ihr abgeleitet werden.

Zur neueren Entwicklung gehört das Auffinden von Materialien (vorallem Cupraten) mit hoher kritischer Temperatur, sogenannte Hochtemperatursupraleiter (HTSC). Diese sind durchwegs Supraleiter 2. Art (der perfekte Diamagnetismus ist nicht mehr gegeben, es können Flussschläuche eindringen [13]). Diese wurden zuerst von J.G. Bednorz und K.A. Müller gefunden ([14]).

## 1.2 Ginzburg-Landau-Gleichung

Eine gute Einführung in das Thema Supraleitung findet sich in [3] und [1]. In dieser Arbeit werden die Ginzburg-Landau-Gleichungen (GL-Gleichungen) für einige Geometrien besprochen und Lösungen dieser berechnet.

Die folgenden Gleichungen stehen daher im Mittelpunkt der Arbeit und deren Herleitung durch Einführung eines Ordnungsparameters in die Freie Enthalpie kann unter anderem in [1] nachgelesen werden. Erstmals eingeführt wurden sie von Ginzburg und Landau 1950. ([12]) Man gelangt im *SI* zu folgendem Ergebnis (Gleichungen B-7, B-8 und B-9 aus [1]) mit der Ladung  $q = -2e$  und der Masse  $m = 2m_e$  der Elektronenpaare.

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 \psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 \quad (1.1)$$

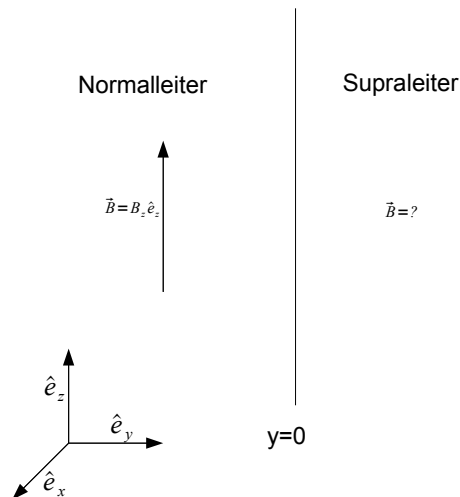
$$\vec{j}_s = \frac{qi\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) - \frac{q^2}{m} \vec{A} |\psi|^2 \quad (1.2)$$

$$\vec{n} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}) \psi = 0 \quad (1.3)$$

Das Betragsquadrat des Ordnungsparameters  $|\psi|^2$  kann mit der Dichte der Cooperpaare  $n_s$  identifiziert werden. In einem ungestörten Supraleiter ( $n_s$  variere nicht stark) ohne Magnetfeld folgt aus Gleichung 1.1

$$n_s = |\psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (1.4)$$

### 1.2.1 Charakteristische Längen



**Figure 1.1:** Konfiguration zur Herleitung der Eindringtiefe

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Eindringtiefe  $\lambda$  und die Kohärenzlänge  $\xi$  bestimmen. Die Eindringtiefe erhält man, indem man von einer Konfiguration wie in Abbildung 1.2.1 ausgeht und die räumliche Variation der Cooperpaare vernachlässigt, wie in Kapitel 1.4 von [3] gezeigt. Man betrachtet hierzu die Gleichung 1.2 und die Maxwell-Gleichung

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{m\beta}{\mu_0 q^2 |\alpha|}} \quad (1.5)$$

Man erhält eine Gleichung für die Flussdichte  $B$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

mit der Lösung

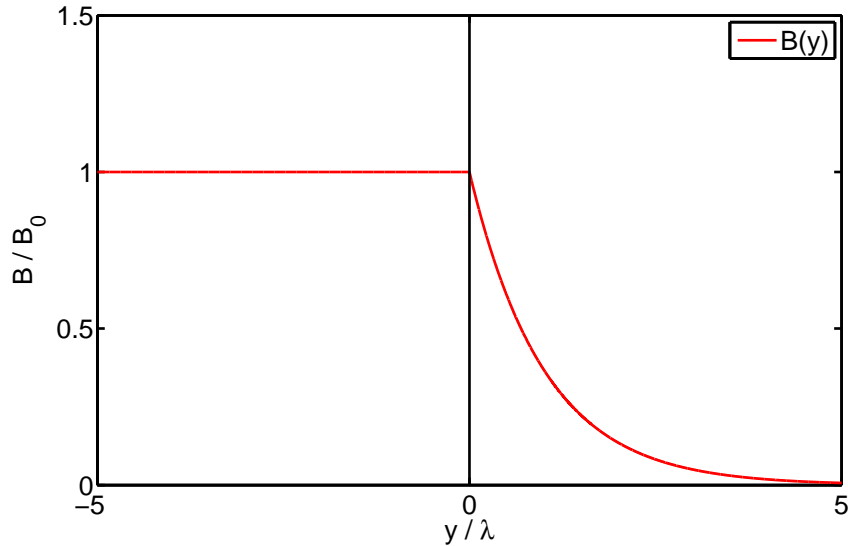
$$B = B_0 e^{-\frac{y}{\lambda}}$$

Die zweite charakteristische Länge ist die Kohärenzlänge  $\xi$  die angibt, wie stark  $|\psi|$  räumlich variiert. Man erhält sie aus Gleichung 1.1 bei verschwindendem Magnetfeld aber variablem  $n_s$ . Die Herleitung ist ebenso in Kapitel 1.4 von [3] angegeben und führt zu

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m|\alpha|}} \quad (1.6)$$

## 1.3 Berechnungen

Im Folgenden werden von den bereits zitierten Grundlagen ausgehend die Berechnungen selbstständig durchgeführt. Manche Ansätze haben sich durch Probieren und Raten ergeben, andere wurden durch Literaturstudium aufgegriffen und sind auch als solche gekennzeichnet. Unabhängig davon folgt die weitere Rechnung wieder nicht der Literatur.



**Figure 1.2:** Verlauf der Flussdichte an Begrenzung des Supraleiters

### 1.3.1 Geometrie

Allen folgenden Geometrien ist gemein, dass Rotationssymmetrien auftreten und das vorgegebene Magnetfeld  $\vec{B}$  parallel zu  $\hat{z}$  sein soll, also

$$\vec{B} = B_z \cdot \hat{e}_z$$

Aus der Maxwellgleichung

$$\text{div}\vec{B} = \text{div}B_z\hat{e}_z = \partial_z B_z = 0$$

folgt die Konstanz des Magnetfeldes in Richtung der  $z$ -Achse. Aufgrund der Rotationssymmetrie empfiehlt sich eine Rechnung in Zylinderkoordinaten. Der Supraleiter sei weiters in  $z$ -Richtung unbeschränkt, womit die Ableitung in dieser Richtung der Cooperpaardichte  $n_s$  verschwindet.

### 1.3.2 Zylinderkoordinaten

Im Folgenden werden die Basisvektoren des Koordinatensystems wie folgt bezeichnet

$$\vec{e}_\rho = \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y \quad (1.7)$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y \quad (1.8)$$

Der Basisvektor  $\hat{e}_z$  ändert sich hierbei nicht. Für den Nabla-Operator ergibt sich die Transformation zu

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_\rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho} \hat{e}_\phi \partial_\phi + \hat{e}_z \partial_z \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 + \partial_z^2 \quad (1.10)$$

### 1.3.3 Eichung des Vektorpotentials

Das in Gleichungen 1.1 und 1.2 vorkommende Vektorpotential ist nicht eindeutig durch das Magnetfeld bestimmt und kann durch Eichtransformationen an die Geometrie angepasst werden. Die folgenden Berechnungen für Vektorpotential und Geometrie orientieren sich nicht mehr an Lehrbüchern sondern wurden selbst berechnet. Die Ansätze sind zunächst allgemein gewählt, aber in weiterer zeigt sich, dass diese vereinfacht werden können. Für  $\vec{A}$  folgt aus dem allgemeinen Ansatz

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\rho(\Phi_\rho\hat{e}_\rho + \Phi_\phi\hat{e}_\phi + \Phi_z\hat{e}_z) \quad (1.11)$$

für das gegebene Magnetfeld  $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{e}_z(\Phi_\phi + \frac{1}{2}\rho\partial_\rho\Phi_\phi - \frac{1}{2}\partial_\phi\Phi_\rho) + \hat{e}_\phi(\frac{1}{2}\rho\partial_z\Phi_\rho - \frac{1}{2}\Phi_z - \frac{1}{2}\rho\partial_\rho\Phi_z) + \hat{e}_\rho(\frac{1}{2}\partial_\phi\Phi_z - \frac{1}{2}\rho\partial_z\Phi_\phi) \quad (1.12)$$

Der Ansatz wurde durch Probieren so gewählt, dass das Potential  $\Phi_\phi(\phi)$  bei einer konstanten Flussdichte in der  $(\rho, \phi)$ -Ebene genau  $B$  beträgt und ebenso konstant ist.  $\Phi_\rho$  und  $\Phi_z$  können dabei zu Null gesetzt werden.

Für das Magnetfeld  $\vec{B}$  gilt in allen betrachteten Problemen

$$\vec{B} = B_z(\rho, \phi, z)\hat{e}_z$$

womit sich aus Gleichung 1.12 die folgenden drei Bedingungen an die skalaren Felder  $\Phi_\rho$ ,  $\Phi_\phi$  und  $\Phi_z$  ergeben:

$$B_z(\rho, \phi, z) = \Phi_\phi + \frac{1}{2}\rho\partial_\rho\Phi_\phi - \frac{1}{2}\partial_\phi\Phi_\rho \quad (1.13)$$

$$\partial_\phi\Phi_z = \rho\partial_z\Phi_\phi \quad (1.14)$$

$$\rho\partial_z\Phi_\rho = \Phi_z + \rho\partial_\rho\Phi_z \quad (1.15)$$

In der weiteren Betrachtung werden auch die Terme  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ,  $\vec{A} \cdot \vec{\nabla}$  und  $\vec{\nabla}^2$  auftauchen, daher seien diese für den Ansatz in 1.11 angegeben

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \Phi_\rho + \frac{1}{2}\rho\partial_\rho\Phi_\rho + \frac{1}{2}\partial_\phi\Phi_\phi + \frac{1}{2}\rho\partial_z\Phi_z \quad (1.16)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{2}\rho\Phi_\rho\partial_\rho + \frac{1}{2}\Phi_\phi\partial_\phi + \frac{1}{2}\Phi_z\rho\partial_z \quad (1.17)$$

$$\vec{A}^2 = \frac{\rho^2}{4}(\Phi_\rho^2 + \Phi_\phi^2 + \Phi_z^2) \quad (1.18)$$

Es wird sich als sinnvoll erweisen das Vektorpotential parallel zum Strom zu wählen der kreisförmig um die Störstelle in  $\rho = 0$  fließen wird. Dafür wird  $\Phi_\rho = \Phi_z = 0$  gesetzt und oben

genannte Gleichungen vereinfachen sich zu

$$B_z(\rho, \phi) = \Phi_\phi + \frac{1}{2}\rho\partial_\rho\Phi_\phi \quad (1.19)$$

$$0 = \rho\partial_z\Phi_\phi \quad (1.20)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2}\partial_\phi\Phi_\phi \quad (1.21)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{\nabla} = \frac{1}{2}\Phi_\phi\partial_\phi \quad (1.22)$$

$$\vec{A}^2 = \frac{\rho^2}{4}\Phi_\phi^2 \quad (1.23)$$

### 1.3.4 Ordnungsparameter

Die zentrale Variable der GL-Gleichungen ist der Ordnungsparameter  $\psi$ . Aus dessen Betrag und Phase lassen sich mit Berücksichtigung der Materialparameter  $\alpha$  und  $\beta$  der Suprastrom und die räumliche Verteilung der Cooperpaare berechnen. In der weiteren Rechnung werden auch die Größen  $\vec{\nabla}\psi$  und  $\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*$  benötigt. In Gleichung 1.4 ist der Zusammenhang zwischen den Materialparametern und der ungestörten Cooperpaardichte angegeben. Daher wird für einen allgemeinen Ansatz davon ausgehend die Funktion

$$\psi(\rho, \phi, z) = \psi_\infty p(\rho, \phi, z)e^{i\theta(\rho, \phi, z)} \quad (1.24)$$

gewählt. Die Funktion  $p(\rho, \phi, z)$  bewegt sich hierbei im Intervall  $[0,1]$ . Dieser Ansatz folgt [7]. Die weitere Berechnung wurde allerdings selbst durchgeführt und führt durch andere Näherungen zu etwas anderem Ergebnis.

Damit gilt für den Gradienten

$$\hat{e}_\rho \cdot \vec{\nabla}\psi = \psi_\infty e^{i\theta} (\partial_\rho p + ip\partial_\rho\theta) \quad (1.25)$$

$$\hat{e}_\phi \cdot \vec{\nabla}\psi = \frac{\psi_\infty}{\rho} e^{i\theta} (\partial_\phi p + ip\partial_\phi\theta) \quad (1.26)$$

$$\hat{e}_z \cdot \vec{\nabla}\psi = \psi_\infty e^{i\theta} (\partial_z p + ip\partial_z\theta) \quad (1.27)$$

$$\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^* = 2ip\psi_\infty^2\vec{\nabla}\theta \quad (1.28)$$

### GL-Gleichung mit gegebener Geometrie

Aus den Gleichungen 1.1 und 1.2 gehen durch Einsetzen der speziellen Formen von  $\psi$  und  $\vec{A}$  in 1.11 und 1.24 neue reduzierte GL-Gleichungen in Zylinderkoordinaten hervor. Dafür wird der Ausdruck  $(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2$  benötigt.

$$(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 = -\hbar^2\vec{\nabla}^2 + 2i\hbar q\vec{A} \cdot \vec{\nabla} + i\hbar q(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + q^2\vec{A}^2$$

Die spezielle Form ergibt sich nun durch Einsetzen der bekannten Terme und sei in den einzelnen Problembeschreibungen nach den weiteren Anforderungen an die Geometrien und Felder  $\Phi$  durchgeführt.

## 1.4 Besseldifferentialgleichung

Die Differentialgleichung

$$w'' + \frac{1}{z}w' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)w = 0 \quad (1.29)$$

heißt Bessel-Differentialgleichung. Die Lösungen dieser heißen Zylinderfunktionen oder Besselfunktionen und werden mit  $J_n$  und  $N_n$  bezeichnet. Die Lösung erfolgt durch einen Potenzreihenansatz und kann in Kapitel 18 von [6] nachgelesen werden. Auch die weitere Besprechung der Lösung ist aus dem Skriptum übernommen. Für imaginäre  $z = ix$  führt Gleichung 1.29 zu

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (1.30)$$

Die Gleichung heißt nun modifizierte Besselgleichung, die Lösungen sind die selben wie für Gleichung 1.29 allerdings mit imaginärem Argument und werden wie folgt abgekürzt

$$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix)$$

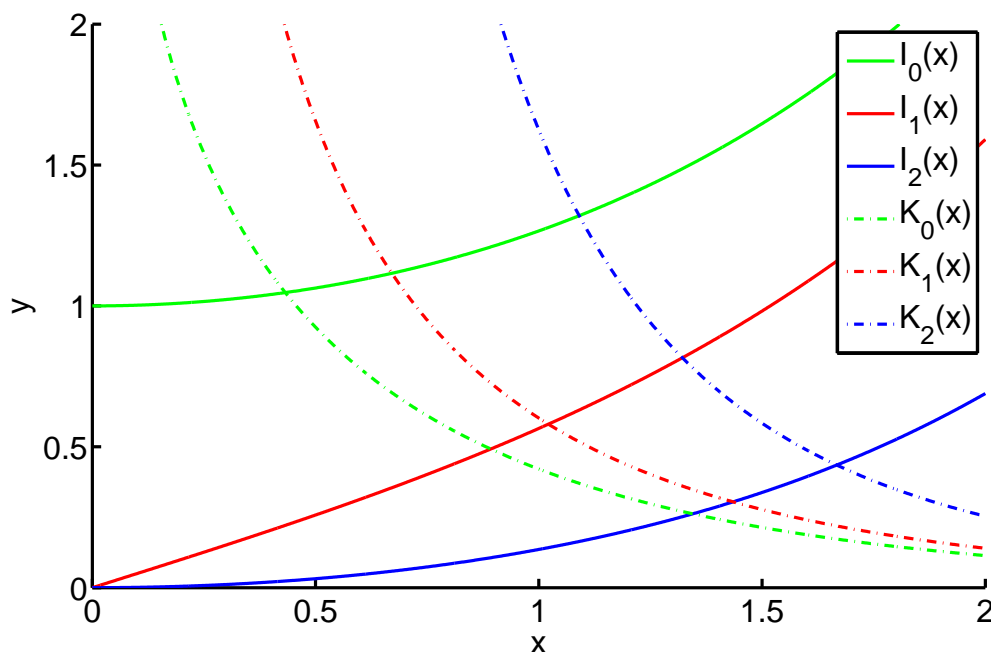
$$K_n(x) = \frac{pi}{2}i^{n+1}(J_n(ix) + iN_n(ix))$$

bezeichnet. Aus der Reihendarstellung von  $J_n$  lässt sich die erzeugende Funktion berechnen und daraus sind folgende Eigenschaften ableitbar:

$$I'_n = I_{n-1} - \frac{n}{x}I_n = \frac{n}{x}I_n + I_{n+1} \quad (1.31)$$

$$K'_n = -K_{n-1} - \frac{n}{x}K_n = \frac{n}{x}K_n - K_{n+1} \quad (1.32)$$

In Abbildung 1.4 sind die ersten drei modifizierten Besselfunktionen wiedergegeben. Man sieht,



**Figure 1.3:** Modifizierte Besselfunktionen erster und zweiter Art

dass die Funktionen erster Art für  $x \rightarrow \infty$  gegen unendlich streben, die zweiter Art hingegen gegen 0 konvergieren, dafür bei  $x = 0$  eine Singularität besitzen.



# 2 Problemstellungen

## 2.1 SQUID

SQUIDs sind supraleitende Ringe, die durch ihre speziellen Eigenschaften Einsatz als empfindliches Messgerät des magnetischen Flusses gefunden haben.

### 2.1.1 Eichung des Vektorpotentials und Randbedingung

Hier wird das Vektorpotential parallel zum Ring gewählt. Die Rechnung wurde selbst durchgeführt, der Ansatz durch probieren gefunden. Dies hat sich als sinnvoll erwiesen, da somit auch der Gradient des Phasenfaktors in Richtung  $\hat{e}_\phi$  zeigt und das Problem eindimensional bleibt.  $\vec{A}$  hängt nun von  $\rho$  und  $\phi$  ab und muss Gleichung 1.19 für das gegebene Magnetfeld erfüllen. Damit ergibt sich der Suprastrom

$$\vec{j}_s = -\frac{q\hbar}{m}p\psi_\infty^2\vec{\nabla}\theta - \frac{q^2}{2m}p^2\psi_0^2\rho\Phi_\phi\hat{e}_\phi \quad (2.1)$$

durch einsetzen von 1.28 in 1.2.

Weiters muss die Randbedingung 1.3 erfüllt sein, wobei hier für den Normalvektor auf den Supraleiter

$$\vec{n} = a\hat{e}_\rho + b\hat{e}_z$$

gilt und somit die Randbedingung

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho \cdot \vec{\nabla}\psi &= \psi_\infty e^{i\theta} (\partial_\rho p + ip\partial_\rho\theta) &= 0 \\ \hat{e}_z \cdot \vec{\nabla}\psi &= \psi_\infty e^{i\theta} (\partial_z p + ip\partial_z\theta) &= 0 \end{aligned}$$

lautet. Da  $p$  und  $\theta$  im Ansatz reell gewählt wurden und die Randbedingungen im Real- und Imaginärteil gelten müssen zerfallen diese Gleichungen weiter. Weiters weiß man, dass in der normalleitenden Phase der Ordnungsparameter verschwindet (also  $p = 0$ ), demnach erhält man aus dem Imaginärteil keine neuen Informationen

$$\partial_\rho p = \partial_z p = 0 \quad (2.2)$$

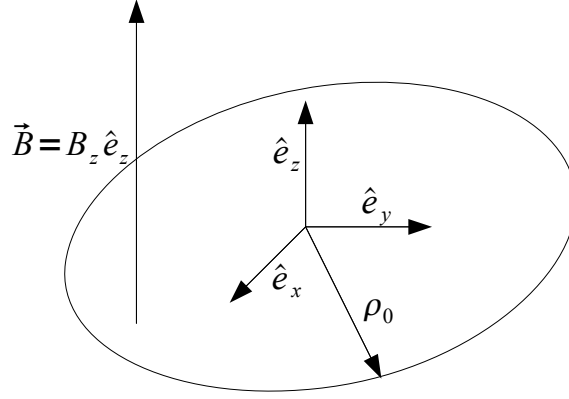


Figure 2.1: Verschwindend dünner supraleitender Ring

### 2.1.2 Verschwindend dünner Ring

Hier ist im gesamten Gebiet die Randbedingung 2.2 zu erfüllen, womit sich ein eindimensionales Problem mit  $p = p(\phi)$  und  $\theta = \theta(\phi)$  ergibt. Die Stromdichte muss weiters unabhängig von  $\phi$  sein um die Kontinuitätsgleichung erfüllen zu können, also kann man  $\vec{j} = j_0 \hat{e}_\phi$  setzen. Dies führt zu einer ersten Gleichung

$$\frac{q\hbar}{m} \psi_\infty^2 p(\phi) \theta'(\phi) + \frac{q^2}{2m} \rho_0^2 \psi_\infty^2 \Phi_\phi(\phi) p^2(\phi) = -j_0 \rho_0 = \text{const.} \quad (2.3)$$

Aus der Gleichung 1.1 lässt sich durch Einsetzen eine zweite Differentialgleichung in  $p$  und  $\theta$  bestimmen.

$$-\frac{\hbar^2}{\rho_0^2} (p'' - p(\theta')^2 + 2ip'\theta' + ip\theta'') + i\hbar q \Phi_\phi (p' + ip\theta') + \frac{1}{2} i\hbar q \Phi_\phi' p + \frac{q^2 \rho_0^2}{4} \Phi_\phi^2 p - \frac{\hbar^2}{\xi^2} p + \frac{\hbar^2}{\xi^2} p^3 = 0 \quad (2.4)$$

### Konstantes Magnetfeld, perfekter Supraleiter

Zunächst sei die Situation noch weiter vereinfacht: Das Magnetfeld sei konstant (somit  $\Phi_\phi = \text{const} = B$ ) und der Supraleiter sei homogen (womit auf Grund der Rotationssymmetrie  $p(\phi) = \text{const}$ ). Aus Gleichung 2.3 ist ersichtlich, dass  $\theta'$  konstant ist und weil  $\theta$  periodisch in  $2\pi$  sein muss lässt sich folgern, dass  $\theta' = k \in \mathbb{Z}$  gilt. Es ergeben sich somit zwei Gleichungen mit den abhängigen Variablen  $p$  und  $j_0$  zu gegebenen  $\Phi_\phi$ . Diese lauten

$$j_0 = -\frac{\psi_\infty^2 e \hbar}{2\rho_0 m_e \pi} \left( pk + \frac{\Phi_m}{\Phi_0} p^2 \right) \quad (2.5)$$

$$p^2 = 1 - \frac{\xi^2}{\rho_0^2} \left( k + \frac{\Phi_m}{\Phi_0} \right)^2 \quad (2.6)$$

wobei zur weiteren Vereinfachung statt  $\pi \rho_0^2 B$  der magnetische Fluss durch den Ring  $\Phi_m$  und für  $-\frac{\hbar}{q}$  das Flussquant  $\Phi_0$  eingesetzt wird. Aus der Gleichung 2.5 lässt sich sehen, dass für  $p = 1$  der Strom nur dann verschwindet, wenn der magnetische Fluss durch den Ring ein ganzzahliges Vielfaches des Flussquants beträgt. Dies ist das selbe Ergebnis wie die Quantisierungsbedingung

des Magnetfelds in einem ausgedehnten Supraleiter wie unter Anderem in Kapitel 1.7 von [5] angegeben ist.

Um zu zeigen, dass  $p = 1$  erfüllt sein muss, betrachtet man den Ausdruck für die freie Enthalpie im supraleitenden Zustand, aus dem auch die GL-Gleichungen durch Variationsrechnung herleitbar sind. Dieser lautet wie im Anhang B von [1] ausgeführt

$$g_s = g_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| (-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}) \psi \right|^2 \quad (2.7)$$

Mit den Annahmen  $p = const.$  und  $\Phi_\phi = B = const.$  wird dies zu

$$g_s = g_n + \psi_\infty^2 p^2 \left[ \alpha \left( 1 - \frac{p^2}{2} \right) + \frac{e}{2m\rho_0\pi\Phi_0} \left( k + \frac{\Phi_m}{\Phi_0} \right) \right] \quad (2.8)$$

Daraus lassen sich die Bedingungen  $p = 1$  und  $j_0 = min$  zur Minimierung der freien Enthalpie ableiten.

## 2.2 Vortex

In der Schubnikow-Phase können in einen Supraleiter 2. Art Flussschläuche eindringen. Diese zeichnen sich durch normaleleitende Gebiete im Supraleiter (hier gibt es ein Magnetfeld) und den umgebenden supraleitenden Gebieten aus (hier gibt es kein Magnetfeld). Diese Phase existiert nur in Supraleitern 2. Art wie von Abrikosov 1957 gefunden ([13]).

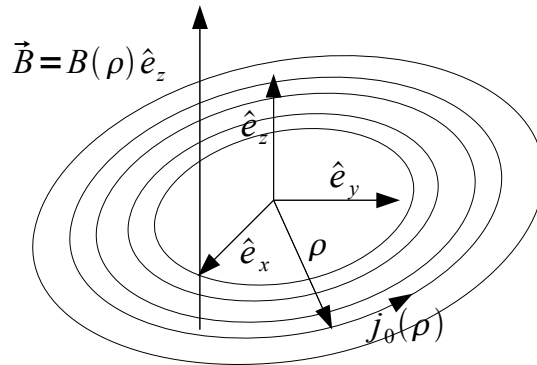
Um ein Vortex zu berechnen werden folgende Annahmen getätigt

1. Es fließen nur Kreisströme, also  $\vec{j}_s = j_s(\rho)\hat{e}_\phi$
2. Aus der Berechnung des SQUID weiß man, dass für den Phasenfaktor  $\theta(\phi) = k\phi$  gilt. Weiters sei ein Flussquant im Vortex eingeschlossen, also wird  $m = 1$  gewählt
3. Das Magnetfeld hängt nur von  $\rho$  ab und zeigt wieder in  $z$ -Richtung
4. Für das Vektorpotential wählt man einen neuen Ansatz

$$\vec{A} = \frac{\hbar}{q} \frac{1 + \rho a(\rho)}{\rho} \hat{e}_\phi \quad (2.9)$$

wie in [7] angeführt. Die weitere Rechnung wurde wiederum selbstständig durchgeführt, ein Vergleich der Ergebnisse zeigt zwar im Speziellen Unterschiede, aber es ist auch in der zitierten Publikation eine Besseldifferentialgleichung zu lösen.

5. Auf Grund der Rotationssymmetrie folgt  $\partial_\phi p = 0$
6. Für  $\rho \rightarrow \infty$  müssen Strom und Magnetfeld verschwinden



**Figure 2.2:** Schematische Darstellung eines Vortex

Aus dem Vektorpotential lässt sich wieder das Magnetfeld

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\hbar}{q} \hat{e}_z \left( \frac{a(\rho)}{\rho} + a'(\rho) \right)$$

berechnen, das wie gefordert in  $z$ -Richtung zeigt und für  $\rho \rightarrow \infty$  bei geeignetem  $a(\rho)$  auf Null fällt. Für den Ordnungsparameter gilt also

$$\psi(\rho, \phi) = \psi_\infty p(\rho) e^{i\phi} \quad (2.10)$$

Diese Zusammenhänge werden nun in Gleichung 2.1 unter Verwendung des Ampere'schen Gesetzes

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

eingesetzt und führen zu

$$a'' + \frac{1}{\rho} a' - \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{p^2}{\lambda^2} \right) a = \frac{1}{\lambda^2} \frac{p + p^2}{\rho} \quad (2.11)$$

Um diese Differentialgleichung zu linearisieren wird sie für große  $\rho$  betrachtet. Das Magnetfeld sollte hier verschwunden sein (nach dem Meissnereffekt müsste es mit einer Längenskala von  $\lambda$  verschwinden) also muss auch  $p \rightarrow 1$  gelten. Es werden nun alle Terme höherer Ordnung in  $a$  vernachlässigt,  $p = 1$  gesetzt und auch Terme mit  $\frac{1}{\rho}$  verschwinden. Dies ergibt eine modifizierte Bessel-Gleichung

$$a'' + \frac{1}{\rho} a' - \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) a = 0 \quad (2.12)$$

für  $a$  mit den modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Art als möglichen Lösungen. Da  $a(\rho \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  gelten soll, kann die modifizierte Besselfunktion erster Art  $I_1$  keine Lösung sein da sie divergiert. Somit folgt für  $a(\rho)$  und die daraus ableitbaren Größen

$$a = \frac{1}{\lambda} K_1 \left( \frac{\rho}{\lambda} \right) \quad (2.13)$$

$$B = \hat{e}_z \frac{\hbar}{q\lambda^2} \left( \frac{K_1(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} + K_1'(\tilde{\rho}) \right) = \hat{e}_z \Phi_0 \frac{1}{2\pi\lambda^2} K_0(\tilde{\rho}) \quad (2.14)$$

Die neu eingeführte Größe  $\tilde{\rho}$  sei die dimensionslose Länge  $\rho/\lambda$ . Außerdem wurde der Faktor  $\frac{1}{\lambda}$  gewählt, da somit der magnetische Fluss im Vortex

$$\Phi_m = 2\pi\lambda^2 \int_0^\infty B \tilde{\rho} d\tilde{\rho} = \Phi_0 \int_0^\infty \tilde{\rho} K_0(\tilde{\rho}) d\tilde{\rho} = \Phi_0 \quad (2.15)$$

genau ein Flussquant beträgt und dies im Ansatz 2.10 bei der Wahl des Phasenfaktors vorausgesetzt wurde.

Bei genauerer Betrachtung des Vektorpotentials lässt sich erkennen, dass es im Bereich  $\rho \rightarrow 0$  mit

$$a(\tilde{\rho}) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\tilde{\rho}}{2} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \right) \quad (2.16)$$

genähert werden kann. Dieser Ansatz wurde aus der Forderung entwickelt, dass in einem kleinen Radius die Flussdichte konstant sei. Aus Vergleich von 1.11 und 2.9 kann dieser Ausdruck erhalten werden. Das Magnetfeld  $B$  ist bei dieser Näherung konstant und der Fluss durch eine Scheibe mit Radius  $\lambda$  beträgt genau ein Flussquant. In Abbildung 2.2 ist der Verlauf der Lösung  $a_1(\tilde{\rho})$  und der Näherung  $a_2(\tilde{\rho})$  gezeigt. Man sieht, dass diese gut übereinstimmen für Werte  $\tilde{\rho} < 0.1$

Um die Verteilung der Cooperpaare zu bestimmen wird nun Gleichung 1.1 umgeformt. Das liefert

$$p'' + \frac{1}{\rho} p' - \frac{1}{\rho^2} p + 2 \frac{1 + \rho a}{\rho^2} p - \left( \frac{1 + \rho a}{\rho} \right)^2 p + \frac{p^2 - 1}{\xi^2} p = 0 \quad (2.17)$$

Hier wird zunächst die Umgebung von  $\rho = 0$  betrachtet. Für  $\rho \rightarrow \infty$  ist bekannt, dass  $p \rightarrow 1$  gelten muss um die freie Enthalpie zu minimieren (siehe Abschnitt 2.1.2). In dieser

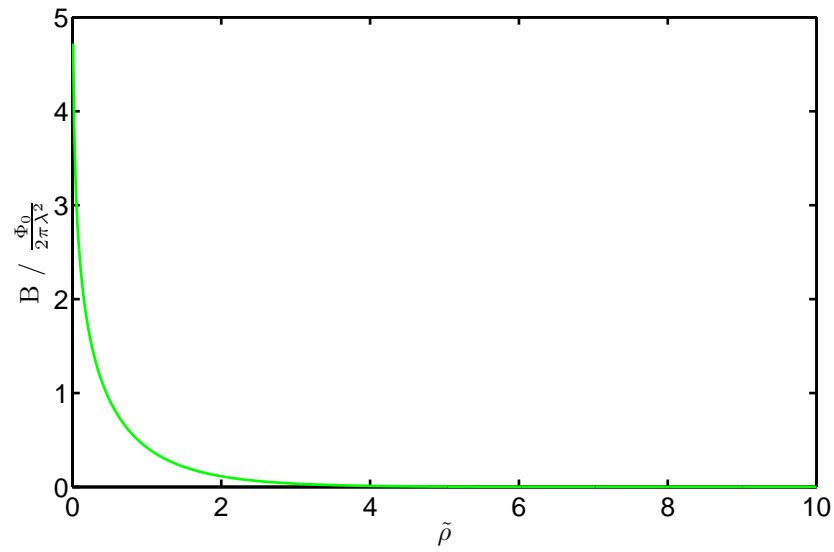


Figure 2.3: Magnetfeld in einem Vortex

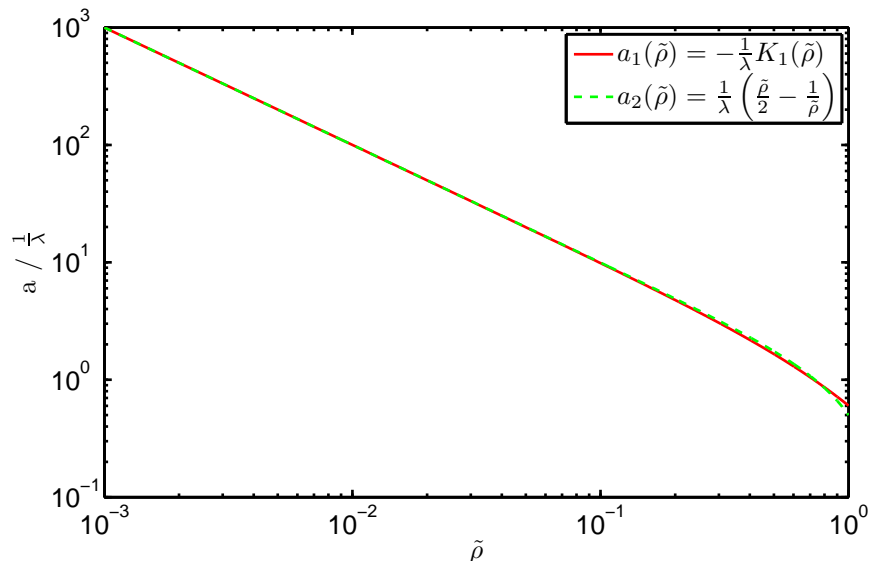


Figure 2.4: Näherungslösung für  $a(\rho \rightarrow 0)$

Umgebung ist  $p \approx 0$ , außerdem wird die Näherung 2.16 für  $a$  verwendet. Linearisieren unter diesen Annahmen führt zu

$$p'' + \frac{1}{\rho} p' - \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tilde{\xi}^2} \right) p = 0 \quad (2.18)$$

Hier tritt eine reduzierte Kohärenzlänge

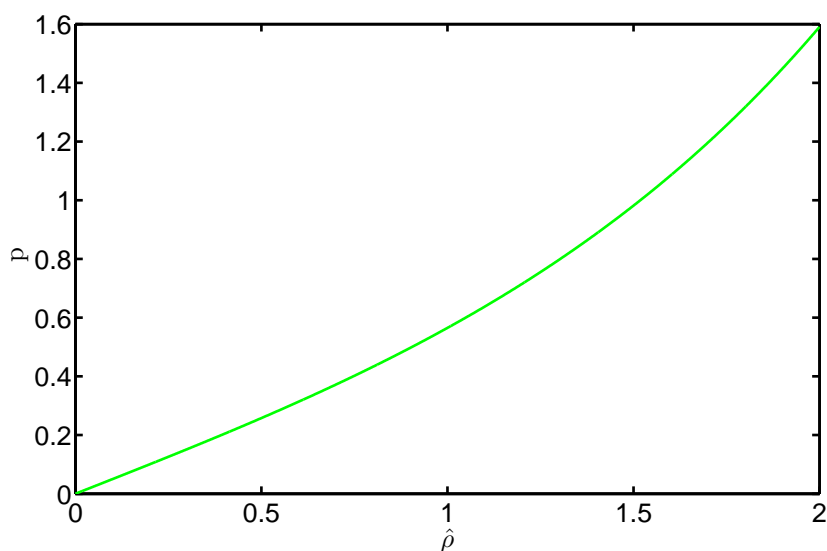
$$\tilde{\xi} = \xi \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}}$$

auf aus der die Bedingung  $\lambda > \xi$  zu erkennen ist, damit Vortices überhaupt auftreten können. Die genaue Rechnung von Abrikosov ([13]) liefert die Bedingung  $\lambda\sqrt{2} > \xi$  für die Existenz von Flussschläuchen und somit die Trennung zwischen Supraleitern 1. und 2. Art.

Dies ist wieder eine modifizierte Besselgleichung, diesmal wird der Verlauf zu  $\rho \rightarrow 0$  wichtig und daher ist diesmal als Lösung die modifizierte Besselfunktion erster Ordnung zu wählen. Es folgt also

$$p(\hat{\rho}) = I_1(\hat{\rho}) \quad (2.19)$$

Hier wird analog zum Magnetfeld ein reduzierter Radius  $\hat{\rho} = \frac{\rho}{\xi}$  eingeführt.



**Figure 2.5:** Cooperpaardichte in einem Vortex

### 3 Referenzen

- [1] Buckel, W.: *Supraleitung; Grundlagen und Anwendungen*, VCH (1994)
- [2] Hirschfeld, P.J.: *Lecture Notes: Theoretical Condensed Matter Physics - High-Temperature Superconductivity* (1996),  
[http://www.phys.ufl.edu/~pjh/teaching/phz7428/lectures\\_7428/](http://www.phys.ufl.edu/~pjh/teaching/phz7428/lectures_7428/)
- [3] Schadschneider, A.: *Skriptum: Theoretische Festkörperphysik II* (2003),  
<http://www.thp.uni-koeln.de/~as/MyPage/PSfiles/thfk2.pdf>
- [4] Kittel, Ch.: *Einführung in die Festkörperphysik*, Oldenbourg (1999)
- [5] Tinkham, M.: *Introduction to Superconductivity; Second Edition*, Dover Publications (2004)
- [6] Wallner, H.: *Skriptum: Analysis 4 (Funktionentheorie und spezielle Funktionen)* (2007), TU Graz
- [7] Charbonneau, J.: *Introduction to the Ginzburg-Landau Equations* (2005),  
[http://www.physics.ubc.ca/~berciu/TEACHING/PHYS503/PROJECTS/05\\_james.pdf](http://www.physics.ubc.ca/~berciu/TEACHING/PHYS503/PROJECTS/05_james.pdf)
- [8] Onnes, H.K.: *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden*, 120b, 122b, 124c (1911)
- [9] Meissner, W., Ochsenfeld, R.: *Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit* *Naturwissenschaften* 21, 787(1933)
- [10] London, F. und H.: *The Electromagnetic Equations of the Supraconductor* *Proceedings of the Royal Society (London)* A149, 71 (1935)
- [11] Bardeen, J., Cooper, L. N., Schrieffer, J. R.: *Theory of Superconductivity*, *Phys. Rev.* 108 (1957)
- [12] Ginzburg, V., Landau, L.: *On the theory of superconductivity*, *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki* 20 (1950)
- [13] Abrikosov, A.: *On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group*, *Soviet Physics JETP* 5, 1174 (1957)
- [14] Bednorz, J.G., Mueller, K.A.: *Possible high  $T_c$  superconductivity in the Ba-La-Cu-O system*, *Zeitschrift für Physik B* 64 (2): 189-193 (1986)