

---

Bachelorarbeit  
Institut für Theoretische Physik  
Computational Physics

# Chaos in dissipativen mechanischen Systemen

Advisor:  
Univ.-Prof. Dr.rer.nat. Enrico Arrigoni

Jürgen Paust

Mat.Nr. 11702947

Sommersemester 2021

---

## Abstract

Die folgende Bachelorarbeit beschäftigt sich mit dem Gebiet der nichtlinearen Mechanik und taucht im Zuge dessen genauer in die Welt der dissipativen, chaotischen Systeme ein. Nach einer anfänglichen Übersicht über die wichtigsten Fachbegriffe behandelt die erste Hälfte der Arbeit Konzepte und Methoden der Mechanik, mit denen auf theoretischer Basis der Grundstock für die Untersuchung chaotischer Systeme gelegt wird. In der zweiten Hälfte werden mit den nun eingeführten Konzepten Beispiele aus der nichtlinearen Mechanik behandelt. Konkret werden zwei oszillierende Systeme mit unterschiedlichen Verfahren beschrieben, um im Zuge dessen dem chaotischen Verhalten in diesen dissipativen, nichtlinearen Systemen quantitative Größen anzuhängen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Chaos</b>	<b>5</b>
2.1	Grundlegendes über Chaos . . . . .	5
2.2	Über den Phasenraum und dynamische Systeme . . . . .	6
2.3	Stabilität und Liapunovexponent . . . . .	9
2.4	Seltsame Attraktoren und Kolmogorov-Entropie . . . . .	19
2.5	Bifurkationen . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Beispiele zu chaotischer Mechanik</b>	<b>23</b>
3.1	Einfaches Fadenpendel . . . . .	23
3.2	Periodisch getriebenes Pendel . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>40</b>
<b>5</b>	<b>Bibliographie und Abbildungsverzeichnis</b>	<b>41</b>

## 1 Einleitung

Im echten Leben versteht man unter dem Begriff 'Chaos' gerne etwas, das keinen Regelmäßigkeiten gehorcht, etwas, aus dem man nicht schlau wird und etwas, das man 'vertreiben' muss, um ein Muster oder einen Sinn zu erkennen. Der Wunsch, eine Regelmäßigkeit bzw. Gesetzmäßigkeiten in Chaos zu finden erscheint dementsprechend widersprüchlich, ist doch Chaos etwas, das grundsätzlich keinen solchen Prinzipien unterliegt. Oder? Ganz so ist es zum Glück nicht. Der Begriff Chaos alleine existiert in der Physik so nicht, sondern wird ersetzt durch 'deterministisches Chaos'. Deterministisch bedeutet in diesem Zusammenhang, dass wenn alle Anfangsbedingungen des Systems genau bekannt sind, das System exakt vorhergesagt werden kann. Da wir in der realen Welt jedoch an Messungenauigkeiten gebunden sind, ist es unmöglich, die exakten Anfangsbedingungen zu kennen. Deterministisches Chaos reagiert sehr sensibel auf diese Ungenauigkeiten, was bedeutet, dass man nicht bis in alle Ewigkeit vorhersagen kann, wie sich dieses System verhalten wird. Nun muss dies nicht unbedingt ein Problem darstellen, da man vielleicht gar nicht daran interessiert ist, wie das System in der Ewigkeit aussieht. Aus diesem Grund ist es Gang und Gäbe, bei vielerlei Berechnungen Idealisierungen zu treffen, damit das System kein chaotisches Verhalten an den Tag legen kann. Eine Gruppe von Systemen, die nicht chaotisch sind, sind Systeme, die man analytisch lösen kann, das heißt mit Stift und Papier. Eine viel größere Gruppe von Systemen ist jedoch nicht analytisch lösbar. Diese muss man entweder so vereinfachen, dass sie zwar alle wichtigen Ergebnisse im Kern umfassen, jedoch gleichzeitig wieder analytisch lösbar sind, oder man behandelt sie numerisch. Die numerische Behandlung von nicht analytisch lösbaren Systemen ist dank den Computern nun wesentlich zugänglicher, also noch vor 100 Jahren. Dementsprechend jung ist die Chaosforschung, die stark auf numerische Methoden angewiesen ist. Nichtlineare Systeme sind genau solche Systeme, die man in der Regel nicht analytisch lösen kann und die unter bestimmten Voraussetzungen chaotisches Verhalten an den Tag legen können. Diese nichtlinearen, chaotischen Systeme können nochmals unterteilt werden in konservative und dissipative Systeme. Bei dissipativen Systemen bleibt, grob gesagt, die Gesamtenergie im System nicht erhalten, sondern wird zum Beispiel über Reibung in Wärme umgewandelt und verlässt das System. Mit eben diesen nichtlinearen, chaotischen, dissipativen Systemen wollen wir uns im Folgenden beschäftigen. Dafür benötigt man ein Vorwissen über lineare Algebra, klassische Mechanik, Differentialgleichungen und die numerischen Methoden zur Behandlung von Differentialgleichungen. Das Wissen in Kapitel 2 ist von den Büchern Klassische Mechanik II von Walter Greiner und Deterministisches Chaos: Eine Einführung von Heinz Georg Schuster. Die numerischen Berechnungen mit dazugehörigen Plots (siehe Kap. Beispiele zur chaotischen Mechanik), wurden allesamt von mir in Python erzeugt.

## 2 Chaos

Bevor wir uns in wilde Konzepte und komplizierte Definitionen stürzen, sollte zuerst der vage Begriff des Chaos erklärt werden. Es ist zunächst wichtig zu wissen, dass hier rein nur die Rede vom deterministischen Chaos ist. Deterministisches Chaos und chaotische Bewegungen zeichnen sich durch vielerlei Eigenschaften aus. Unter anderem dadurch, dass:

- Das zeitliche Signal der Bewegung des untersuchten Objektes chaotisch aussieht
- Ein breitbandiges Rauschen im Leistungsspektrum vorhanden ist
- Es in der Poincareabbildung viele Punkte gibt, die den Raum nach und nach mehr ausfüllen

(wenn Sie was eventuell den Lesern unbekannt ist einführen sollten Sie das irgend wie erklären. In diesem Fall reicht "(siehe unten)" sonst eine Referenz (siehe Ref [--]), oder eine fussnote) Das gilt an vielen Stellen Ihrer Arbeit. Das habe ich Ihnen nicht überall markiert.,

Der Begriff deterministisch steht in diesem Zusammenhang dafür, dass die Vorhersage über den Zustand des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt in der Zukunft zwar möglich ist, aber auch nur dann, wenn man die Anfangsbedingungen des Systems genau kennt. Chaos steht in diesem Zusammenhang dafür, dass man den zukünftigen Zustand des Systems zwar vollständig bestimmen kann, doch wenn man die Anfangsbedingungen des Systems nur geringfügig ändert, sieht der zeitliche Verlauf gänzlich anders aus. [1] (S. 14)

### 2.1 Grundlegendes über Chaos

Nun haben wir oben bereits einige Begriffe gehört, die mit Chaos zu tun haben. Diese und noch weitere grundlegende Begriffe und Konzepte sollen hier erklärt werden.

Nichtlineares System: Ein nichtlineares System, ist ein System bei dem in der ihm beschreibenden Differentialgleichung ein nichtlinearer Term auftritt. Ein simples Beispiel einer nichtlinearen DGL ist:

$$\dot{x} - A * \cos(x) = 0 \quad (1)$$

Dissipatives System: Im Gegensatz zu konservativen Systemen zeichnen sich dissipative Systeme dadurch aus, dass der dynamische Fluss nicht volumenerhaltend ist. In solchen Systemen schrumpft das Phasenraumvolumen mit der Zeit. Systeme mit Reibungstermen gehören dieser Gruppe an. Mehr dazu in Kap. 2.2.

Poincaré-Schnitt: Eine Methode zur Diskretisierung von Trajektorien im Phasenraum. Es wird ein Übergang von einer kontinuierlichen Bahn auf eine diskrete Punktfolge geschaffen, die auf einer geometrischen Eigenschaft der Trajektorie beruht, nämlich dem Durchstoßen einer (N-1)-dimensionalen Hyperebene. Ein Punkt im Poincaré-Schnitt wird dort eingezeichnet, wo die Trajektorie die Hyperebene schneidet. Bei einer dreidimensionalen Phasenbahn kann z.B. die x-y-Ebene als zu schneidende Hyperbene verwendet werden. Dadurch wird die Dimension des Phasenraumes von N auf N-1 reduziert.

Sie schreiben Phasenraum, aber x-y sind eher die Ortskoordinate. Ich weiss, was Sie meinen, aber Sie sollten das besser erklären (evtl fussnote).

N schon definiert?

Auch: der Phasenraum ist impuls+koordinaten -> N sollte gerade sein. Auch hier weiss ich was Sie meinen, aber der Leser vielleicht nicht

Poincaré-Abbildung: Um nun genauere Aussagen über das System zu treffen, reicht der Poincaré-Schnitt nicht. Man verwendet eine Abbildung:

$$f : \vec{x}_n \rightarrow \vec{x}_{n+1} \quad (2)$$

wobei  $x_n$  und  $x_{n+1}$  auf der  $N+1$ -dimensionalen Hyperebene liegen. Es werden also alle Punkte der Folge mit ihren Nachbarn verknüpft. Es handelt sich hierbei jedoch um eine einzige Abbildung, die die einzelnen Punkte des Poincaré-Schnitts mittels wiederholter Iteration der Poincaré-Abbildung erzeugt.

was bedeutet  
einzige?

$$\vec{x}_1 = f(\vec{x}_0), \quad \vec{x}_2 = f(\vec{x}_1) = f^2(\vec{x}_0), \quad \vec{x}_n = f^n(\vec{x}_0) \quad (3)$$

Mittels Eigenschaften der iterierten Poincaré-Abbildung  $f^N$  für  $N \rightarrow \infty$  lassen sich Aussagen über das Langzeitverhalten der Trajektorie treffen. [2](S. 424, 447, 448)

## 2.2 Über den Phasenraum und dynamische Systeme

Im Hamiltonformalismus werden für ein mechanisches System mit  $f$  Freiheitsgraden,  $f$  generalisierte Koordinaten  $q_1, \dots, q_i$  und  $f$  generalisierte Impulse  $p_1, \dots, p_i$  benötigt, um den Bewegungszustand des Systems zum Zeitpunkt  $t$  genau zu bestimmen. Die Koordinaten  $q_i$  und die Impulse  $p_i$  lassen sich als Koordinaten des Phasenraumes verwenden, welcher  $2f$ -dimensional ist. Hierbei entspricht der Konfigurationsraum dem  $f$ -dimensionalen Unterraum der Koordinaten  $q_i$  und der Impulsraum dem  $f$ -dimensionalen Unterraum der Impulse  $p_i$ .

Eine Phasenbahn (auch Trajektorie genannt) im Phasenraum ist der zeitliche Verlauf des repräsentativen Punktes  $(q_i, p_i)$ . Ist die Hamilton-Funktion bekannt, lässt sich somit also die gesamte Phasenbahn aus nur einem Punkt berechnen. Des Weiteren gehört zu jedem Punkt im Phasenraum genau eine Phasenbahn und zwei Bahnen können sich nicht schneiden. Als Konsequenz der Eindeutigkeit der Hamilton-Gleichung ergibt sich, dass unterschiedliche Anfangsbedingungen auch unterschiedliche Phasenbahnen haben. Physikalisch bedeutet das, dass wenn ein Punkt im Phasenraum zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt ist, auch die Vergangenheit und Zukunft des Systems durch Integration determinierbar ist. Handelt es sich beim beschriebenen System um ein konservatives System, so ist der Punkt durch die Bedingung  $E = const = H(q, p)$  auf eine  $(2f - 1)$ -dimensionale Hyperfläche beschränkt. [2] (S.325)

ie Phasenbahn

Für ein System mit  $f = 1$  (siehe Kap. 3.1) wird der Phasenraum zur Phasenebene mit der Auslenkung und der Geschwindigkeit als Komponenten. Siehe Abb. 1 bzw. 5a

Befinden sich nun mehrere unabhängige Punkte im Phasenraum, die alle unterschiedliche Startbedingungen besitzen, so befinden sich alle Punkte in einem Gebiet  $G_1$ , welches  $2f$ -dimensional ist und ein Phasenraumvolumen von

zwei Sätze  
nicht logisch  
verknüpft

$$\Delta V = \Delta q_1 * \dots * \Delta q_f * \Delta p_1 * \dots * \Delta p_f$$

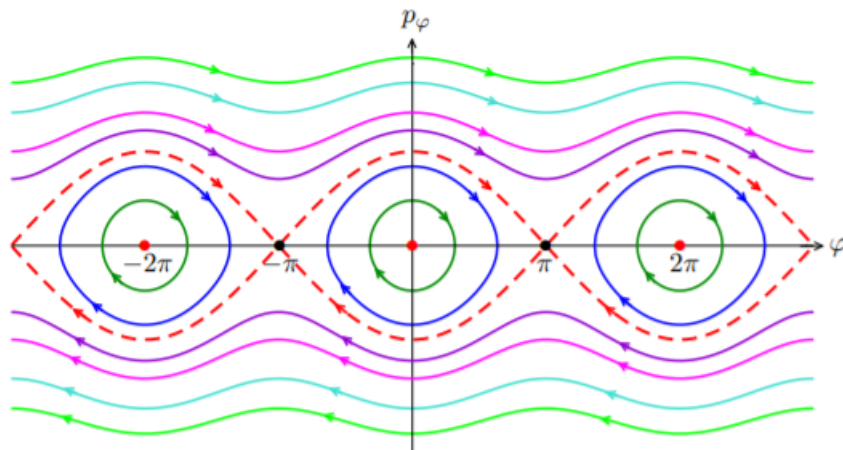


Abbildung 1: Phasenraum mit Trajektorien für das ebene Pendel

aufspannen.

Wenn sich die Punkte der Begrenzung dieses Phasenraumvolumens  $\Delta V$ , gemäß den kanonischen Gleichungen bewegen, so sagt der Satz von Liouville, dass dieses Volumen mit Ablauf der Bewegung gleich bleibt. Man beachte dabei, dass dies bei dissipativen Systemen nicht gilt. Wie bereits erwähnt, verringert sich <sup>in diesem Fall</sup> dort das Phasenraumvolumen mit der Zeit, der dynamische Fluss des Systems ist also nicht volumenerhaltend. [2] (S. 325 - 327)

Grundlegend beschäftigen wir uns also mit Systemen, die durch Differentialgleichungen folgender Art beschrieben werden können:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t), t; \lambda) \quad (4)$$

hierbei ist  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$  <sup>Phasenraum?</sup> ein Spaltenvektor aus endlich vielen dynamischen Variablen, die das System beschreiben,  $\vec{F}$  ist eine meist nichtlineare Funktion von  $\vec{x}$ , welche auch explizit von der Zeit  $t$ , als auch von einem Kontrollparameter  $\lambda$  abhängen kann.

Wenn man den Vektor  $\vec{x}$  als 2f-dimensionalen Vektor, mit den generalisierten Koordinaten und Impulsen definiert.  $\vec{x} = (q_1, \dots, p_f; p_1, \dots, p_f)^T$ , lässt sich Glg.(4) zu einer Matrixgleichung umschreiben.

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \mathbf{J}\vec{\nabla}_{\vec{x}}H \quad (5)$$

*Ist das wirklich allgemein so, oder haben Sie irgend welche Annahmen gemacht?*

Wobei  $\vec{\nabla}_{\vec{x}}H$  der Gradient der Hamiltonfunktion

*Wenn das die Hamiltonfunktion ist sind Sie also davon ausgegangen, dass diese Kanonische Gl. sind.*

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}}H = \left( \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^T \quad (6)$$

und  $\mathbf{J}$  eine  $2f \times 2f$ -Matrix ist, die für die Vertauschung der Komponenten und für die Vorzeichen da ist.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & +\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

mit  $\mathbf{I}$  als  $N \times N$  Einheitsmatrix.

warum Spezialfall? Das sind genau die Hamilton. Gl.

Glg.(5) beinhaltet auch die Hamiltonschen Gleichungen als Spezialfall.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (8)$$

Die Lösungen für die Glg.(4) können sehr unterschiedlich ausfallen. Es ist nicht ausreichend, einzelne Trajektorien zu untersuchen, sondern viel mehr muss die Gesamtheit aller Trajektorien im Phasenraum angeschaut werden, um das System besser zu verstehen.

Sie reden hier vom dissipativen, aber vorher haben Sie das konservative präsentiert

Da sich in dissipativen System das  $2f$ -dimensionale Phasenraumvolumen mit der Zeit immer weiter verkleinert, ist es praktisch, sich ein Maß für diese Verkleinerung herzuleiten, was auch der Bewegungsgleichung (4) genügt.

das springt etwas hin und her

Man betrachtet zunächst das Volumenelement  $\Delta V(\vec{x})$ , das sich zur Zeit  $t = t_0$  am Ort  $\vec{x} = \vec{x}_0$  aufhält. Das besagte Volumen ist nicht anderes als:

$$\Delta V(\vec{x}) = \prod_{i=1}^N \Delta x_i(\vec{x}) \quad (9)$$

was so viel wie das Produkt aller Seitenlängen ist.

Die Zeitableitung dieses Volumenelements wird anschließend unter Beachtung der Kettenregel berechnet.

$$\frac{d}{dt} \Delta V(\vec{x}) = \prod_{j=1}^N \Delta x_j(\vec{x}) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Delta x_i(\vec{x})} * \frac{d\Delta x_i(\vec{x})}{dt} \quad (10)$$

Teilen durch (9) gibt Weiter ist

$$\frac{1}{\Delta V(\vec{x})} * \frac{d}{dt} \Delta V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Delta x_i(\vec{x})} * \frac{d\Delta x_i(\vec{x})}{dt} \quad (11)$$



zeitableitung

Der Abstand zweier Ecken des Hyperwürfels in  $i$ -Richtung ist entsprechend Glg. (4) bei den Trajektorien  $\vec{x}_0(t_0) = \vec{x}_0$  und  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 + \vec{e}_i \Delta x_i$  demnach

$$\left. \frac{d\Delta x_i}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{d}{dt} (x_i(t) - x_{0i}(t)) \right|_{t_0} = F_i(\vec{x}_0 + \vec{e}_i \Delta x_i) - F_i(\vec{x}_0) \quad (12)$$

Dieser Ausdruck ergibt für kleine  $\Delta x_i$  in der Taylorentwicklung von  $\vec{F}(\vec{x})$

$$\left. \frac{d\Delta x_i}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right|_{x_0} \Delta x_i \quad (13)$$

Glg. (11) an den Stellen  $t_0 = t$  und  $\vec{x}_0 = \vec{x}$  ergibt unter Verwendung von Glg. (13)

$$\Lambda(\vec{x}) := \frac{1}{\Delta V(\vec{x})} * \frac{d}{dt} \Delta V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \vec{\nabla} * \vec{F} \quad (14)$$

Dieses Ergebnis besagt, dass die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{F}$  die zeitliche Änderung  $\Lambda$  des Phasenraumvolumens vorgibt. In diesem Ergebnis ist ebenfalls der Satz von Liouville enthalten, da die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes eines Hamiltonschen Systems ~~eine verschwindende zeitliche Volumenänderung  $\Lambda = 0$  hat~~. Das System ist dann konservativ. verschwindet

Somit haben wir eine quantitative Bedingung für dissipative Systeme gefunden, nämlich  $\Lambda = \vec{\nabla} * \vec{F} < 0$ , welche zunächst jedoch nur für einen Punkt  $\vec{x}$  im Phasenraum stimmt. Um über das gesamte Verhalten der Trajektorien Aussagen treffen zu können, muss  $\Lambda(\vec{x})$  über eine Trajektorie  $\vec{x}(t)$  gemittelt werden. um zu charakterisieren

Wie die Trajektorien im Phasenraum zusammen oder auseinanderlaufen ist somit noch nicht geklärt. Zum einen können sie, im einfachsten Fall, in einem gemeinsamen Punkt zusammenlaufen (Gleichgewichtspunkt), zum anderen können sie aber in der einen Richtung zusammenlaufen, in der anderen jedoch auseinanderlaufen. [2] (S. 422 - 426)

### 2.3 Stabilität und Liapunovexponent

Stabilität: Um die Diskussion über Stabilität zu eröffnen, beginnen wir mit dem einfachsten Fall, nämlich mit der Gleichgewichtslösung eines dynamischen Systems.

(das system soll t-unabhängig sein)

$$\vec{F}(\vec{x}_0) = 0 \rightarrow \vec{x}(t) = \vec{x}_0 = const. \quad (15)$$

oder Gleichgewichtspunkt

Dieses  $\vec{x}_0$  ist der Fixpunkt, auch kritischer Punkt genannt. Ob und zu welchem Fixpunkt (falls es mehrere gibt) sich das System nähert, ist die Frage, die es zu beantworten gilt. So ein Fixpunkt zieht eine Trajektorie zu sich und ist der einfachste Fall eines Attraktors. (Mehr zu Attraktoren in Kapitel (2.4)).

Wir behandeln zunächst die Frage, wie stabil so eine Gleichgewichtslösung ist. Dazu betrachten wir die Trajektorien in der Nähe des Fixpunktes. Der Abstand zum Fixpunkt

$$\vec{\xi}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_0 \quad (16)$$

soll dabei klein sein, da dies das Problem sehr vereinfacht. Man kann nun nämlich mit dem niedrigsten Term der Taylorentwicklung von  $\vec{F}(\vec{x})$ , die Bewegungsgleichung linearisieren und auf folgende Form bringen:

$$\frac{d}{dt}\vec{\xi}(t) = \mathbf{M}\vec{\xi}(t) \quad (17)$$

$\mathbf{M}$  ist hier die Jacobimatrix von  $\vec{F}(\vec{x})$ , ausgewertet an  $\vec{x}_0$ . Die Elemente dieser Matrix sind:

$$M_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \quad (18)$$

Die nun linearisierte Bewegungsgleichung ist nun analytisch lösbar. Im eindimensionalen Fall ist die Jacobimatrix nur eine Zahl  $\mu$  und die Lösung der Glg. (17) hat die Form:

$$\xi(t) = e^{\mu t}\xi(0) \quad (19)$$

Je nach Vorzeichen von  $\mu$  hat die Lösung verschiedene Konsequenzen. Eine stabile Lösung liegt vor, wenn  $\mu < 0$  ist, da nun die Störungen exponentiell abklingen. Eine instabile Lösung liegt vor, wenn  $\mu > 0$  ist, da die Störungen hier exponentiell zunehmen. Im Falle von  $\mu = 0$  liegt ein labiles Gleichgewicht vor, das Verhalten der Störungen bestimmen die höheren Ableitungen.

Verallgemeinern lässt sich diese Stabilitätsanalyse auf N Dimensionen, indem man auf 1 normierte Lösungsvektoren  $\vec{u}(t)$  einführt. <sup>Wir fordern, dass</sup> Alle Komponenten dieses Vektors weisen die gleichen exponentiell zeitabhängigen Eigenschaften auf wie zuvor im 1 dim. Fall.

$$\vec{u}(t) = e^{\mu t}\vec{u} \quad (20)$$

Mit Glg. (17) erhält man das Eigenwertproblem

$$\mathbf{M}\vec{u} = \mu\vec{u} \quad (21)$$

welches nur dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn die Determinante 0 ist.

$$\det(M_{ij} - \mu\delta_{ij}) = 0 \quad (22)$$

Diese Gleichung (Polynom N-ter Ordnung) hat N Eigenwerte  $\mu_n$  mit N Eigenvektoren  $\vec{u}_n$ . Eine allgemeine Lösung für Glg. (17) lässt sich dann durch eine Überlagerung der Eigenwerte mit den Entwicklungskoeffizienten  $c_n$ , welche aus den Anfangsbedingungen bei  $t = 0$  bestimmt werden, zusammenstellen.

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{i=1}^N c_n e^{\mu_n t} \vec{u}_n \quad (23)$$

Die  $\mu_n$  Eigenwerte können sowohl reell als auch komplex sein und treten, wenn komplex, immer paarweise auf.

Für die Charakterisierung eines Gleichgewichtspunktes sind die Realteile der Eigenwerte wichtig. Sind alle Realteile der Eigenwerte der Jacobimatrix negativ, so ist der Fixpunkt  $\vec{x}_0$  asymptotisch stabil.

Ist mindestens einer der Realteile negativ, so nimmt die Auslenkung in die Richtung  $\vec{u}_n$  exponentiell zu und der Fixpunkt ist instabil. Von einem degenerierten Fixpunkt ist dann die Rede, wenn  $\mu_n = 0$

Die lineare Stabilitätsanalyse ist jedoch nur in einer gewissen Umgebung um den Fixpunkt gültig, und auch nur dann wenn die Funktion (das Vektorfeld)  $\vec{F}$  genügend glatt ist.

Die nun definierten Regeln für lineare Stabilität in N Dimensionen werden <sup>eben</sup> gut im speziellen zweidimensionalen Fall veranschaulicht. Man nehme ein System mit <sup>einem</sup> ~~zwei~~ Freiheitsgraden an ( $x_1 = q$  und  $x_2 = p$ ) Die Jacobimatrix ist in diesem Fall eine  $2 \times 2$  Matrix. Dadurch ergibt sich eine charakteristische Gleichung der Form:

$$\begin{pmatrix} M_{11} - \mu & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \mu \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

Das quadratische Polynom ist dann:

$$\mu^2 - (M_{11} + M_{22})\mu + M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 0 \quad (25)$$

oder, unter Verwendung folgender Definitionen

$$s = \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}) = \frac{1}{2}Sp(M) \quad (26)$$

$$d = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = det(M) \quad (27)$$

ist Glg. (25) dann

$$\mu^2 - 2s\mu + d = 0 \quad (28)$$

Die zwei Lösungen dieser Gleichungen hängen von den Konstanten  $s$  und  $d$  ab und durch Variation von Größe und Vorzeichen von  $s$  und  $d$  ergeben sich 6 grundlegende Lösungen für  $\mu_1$  und  $\mu_2$ .

$$\mu_{1/2} = s \pm \sqrt{s^2 - d} \quad (29)$$

Die 6 Lösungen für  $\mu_1, \mu_2$  sind:

- a)  $\mu_1, \mu_2$  reell und beide negativ (wenn  $s < 0$  und  $0 < d < s^2$ )  $\rightarrow$  Stabiler Knoten
- b)  $\mu_1, \mu_2$  reell und beide positiv (wenn  $s > 0$  und  $0 < d < s^2$ )  $\rightarrow$  Instabiler Knoten
- c)  $\mu_1, \mu_2$  reell mit unterschiedlichen Vorzeichen (wenn  $d < 0$ )  $\rightarrow$  Sattel
- d)  $\mu_1 = \mu_2^*$ , negativer Realteil (wenn  $s < 0$  und  $d > s^2$ )  $\rightarrow$  Stabiler Strudel
- e)  $\mu_1 = \mu_2^*$ , positiver Realteil (wenn  $s > 0$  und  $d > s^2$ )  $\rightarrow$  Instabiler Strudel
- f)  $\mu_1 = \mu_2^*$ , rein imaginär (wenn  $s = 0$  und  $d > 0$ )  $\rightarrow$  Wirbel

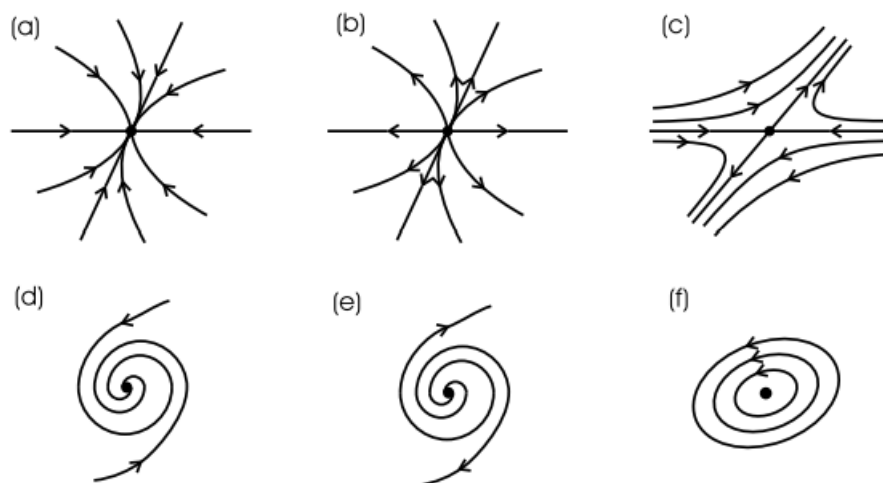


Abbildung 2: Stabilitätstypen eines zweidimensionalen Fixpunktes. a) Stabiler Knoten, b) Instabiler Knoten, c) Sattel, d) Stabiler Strudel, e) Instabiler Strudel, f) Wirbel

[2](S. 429 - 432)

Nun schweiften wir ab von einem zeitunabhängigen Fixpunkt, hin zu einer zeitabhängigen Referenztrajektorie. Genauer gesagt untersuchen wir eine zeitabhängige Trajektorie

Allgemein: an vielen Stellen springen Sie von einem Thema zum nächsten. Sie sollten an diesen Stellen eine (z.B. fette) Überschrift hinzufügen, die die Abschnitte trennt. Auch das habe ich nicht überall markiert

Hier koennte zum Beispiel "Stabilität von Trajektorien"

in der Umgebung einer ebenfalls zeitabhängigen Referenztrajektorie und formulieren Bedingungen für das Verhalten des Abstandes beider Trajektorien zueinander. Die erste Stabilitätsform, die hier formuliert werden kann, ist die *Stabilität nach Liapunov*. Trajektorien, die auf diesen Stabilitätstyp zutreffen, bewegen sich mit voranschreitender Zeit stets in einer bestimmten Umgebung der Referenztrajektorie. Genauer ausformuliert bedeutet dies:

Eine Bahn  $\vec{x}_r(t)$  heißt *Liapunov-stabil*, wenn sich für jedes  $\epsilon > 0$  ein Wert  $\delta(\epsilon) > 0$  finden lässt, so dass gilt:

Jede Lösung mit  $|\vec{x}(t_0) - \vec{x}_r(t_0)| < \delta$  erfüllt für alle Zeiten  $t > t_0$  die Bedingung  $|\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)| < \epsilon$ .

Ausgesprochen bedeutet dies, dass sich die betrachtete Trajektorie immer in einer Röhre ( $N+1$ -dimensional) um die Referenztrajektorie bewegt und diese nicht verlässt.

Natürlich ist diese Bedingung auch erfüllt, falls sich die Trajektorie der Referenztrajektorie immer weiter annähert. In diesem Fall ist die Trajektorie *asymptotisch stabil*. Zusätzlich zu den Bedingungen für Liapunovstabilität muss zusätzlich noch gelten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)| = 0 \quad (30)$$

Nun kann es, ganz im Gegensatz zu der Annäherung an einen Fixpunkt, auch einen Unterschied machen, mit welcher Geschwindigkeit sich die zwei Trajektorien bewegen. Es kann sein, dass die zwei Trajektorien zwar sehr ähnliche Formen haben, den jeweiligen Punkt im Raum jedoch zu ganz unterschiedlichen Zeiten erreichen, weil sie sich unterschiedlich schnell bewegen. Das führt zu einer zeitlichen Verschiebung und  $|\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)|$  wächst. Für diesen Fall wird auch ein eigener Stabilitätstyp eingeführt, nämlich die *orbitale Stabilität*. Ähnlich zur Stabilität nach Lyapunov, ist eine Bahn  $\vec{x}_r(t)$  orbital stabil, wenn sich für jedes  $\epsilon > 0$  ein Wert  $\delta(\epsilon) > 0$  finden lässt, so dass gilt:

Jede Lösung mit  $|\vec{x}(t_0) - \vec{x}_r(t_0)| < \delta$  liegt für alle Zeiten  $t > t_0$  innerhalb einer Röhre vom Radius  $\epsilon$  um die Bahn  $\vec{x}_r(t)$ .

Hierbei wird die Zeitabhängigkeit außer Acht gelassen und lediglich der Aufenthaltsort ist von Bedeutung.

Überschrift: "Periodische Lösungen"

Da die Stabilität von zeitabhängigen Lösungen recht kompliziert und auch umfangreich ist, wird hier lediglich auf den Spezialfall der Stabilität von periodischen Lösungen eingegangen, da es auch für die spätere Diskussion über den Liapunovexponenten von Bedeutung ist. Auch in den späteren Beispielen zu nichtlinearen, schwingenden Systemen wird dies von Bedeutung sein, doch dazu später mehr.

Zunächst wird angenommen, dass sich die Referenztrajektorie mit einer Periodendauer  $T$  wiederholt.  $\vec{x}_r(t+T) = \vec{x}_r(t)$ . Dies ist auch nicht unphysikalisch, da solche Trajektorien für jeden harmonischen Oszillator oder für jedes System mit äußeren periodischen Antrieb realistisch sind.

Wie im Falle der Gleichgewichtslösungen von Fixpunktsystemen (Glg. 16) kann man zur Untersuchung der Stabilität von  $\vec{x}_r(t)$  die Nachbartrajektorie verwenden,

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_r(t) + \vec{\xi}(t) \quad (31)$$

wobei wie zuvor die Störung bzw. die Abweichung  $\vec{\xi}(t)$  klein ist. Kombiniert mit den Bewegungsgleichungen

hat F hier auch eine Zeitabhaengigkeit oder nicht?

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}_r(t) + \vec{\xi}(t), t) \quad (32)$$

ergibt das:

$$\dot{\vec{x}}_r + \dot{\vec{\xi}} = \vec{F}(\vec{x}_r + \vec{\xi}, t) = \vec{F}(\vec{x}_r, t) + \dot{\vec{\xi}} \quad (33)$$

oder nach Umstellen auf  $\dot{\vec{\xi}}$ :

$$\dot{\vec{\xi}} = \vec{F}(\vec{x}_r + \vec{\xi}, t) - \vec{F}(\vec{x}_r, t) \equiv \vec{G}(\vec{\xi}, t) \quad (34)$$

Durch linearisieren der rechten Seite der Gleichung, mithilfe von Taylorreihen, erhält man folgende Schreibweise:

$$\dot{\vec{\xi}}(t) = \mathbf{M}(t)\vec{\xi}(t) \quad (35)$$

wobei wie zuvor  $\mathbf{M}(t)$  die Jacobimatrix ist. Gleich wie Glg. 17 zuvor, so ist auch Glg. 35 ein lineares System von Differentialgleichungen, nur das die früher konstante Koeffizientenmatrix  $\mathbf{M}$  hier zeitabhängig ist, und zwar mit einer Periodizität  $T: \mathbf{M}(t+T) = \mathbf{M}(t)$ . Es handelt sich hierbei um ein lineares System, was es ermöglicht, die Lösung in ein Fundamentalsystem von linear unabhängigen Basislösungen  $\vec{\phi}_1(t), \dots, \vec{\phi}_N(t)$  zu schreiben.

Im weiteren Verlaufe gehen wir auf ein konkretes Beispiel ein, bei dem die Basislösungen zur Zeit  $t = 0$  genau mit den Einheitsvektoren des N-dimensionalen Raumes übereinstimmen. Da die Basislösungen nicht genau bestimmt sind, ist das auch möglich. Es folgt daraus:

$$\vec{\phi}_1(0) = (1, 0, \dots, 0)^T \quad \text{bis} \quad \vec{\phi}_N(0) = (0, 0, \dots, 1)^T \quad (36)$$

Welche Gleichung müssen die  $\phi_i(t)$  erfüllen? Sind die  $\phi_i(t)$  Lösungen mit den unterschiedlichen Anfangsbedingungen?

Die allgemeine Lösung ergibt sich dann aus der Superposition der Basislösungen, mal den Entwicklungskoeffizienten  $c_i$ .

die  $c_i$  sind zeitunabhängig?

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{i=1}^N c_i \vec{\phi}_i(t) \quad (37)$$

Diese Gleichung lässt sich auch in Matrixform bringen:

$$\vec{\xi}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\vec{c} \quad (38)$$

$\mathbf{\Phi}$  ist hierbei eine  $N \times N$  Matrix, deren Spalten jeweils ein Basisvektor des  $N$ -dimensionalen Raumes ist. Aufgrund der zuvor gewählten Anfangsbedingungen ist  $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$  die Einheitsmatrix.

Da wir nun von periodischen Systemen/Differentialgleichungen ausgegangen sind, erfüllt jede Lösung  $\vec{\xi}$  zu den Zeitpunkten  $t$  und  $t + T$  die gleichen Differentialgleichungen. Dadurch ist allerdings die Lösung der Differentialgleichung noch nicht periodisch, doch es erlaubt uns sie sowohl <sup>in</sup> von den Basislösungen  $\vec{\phi}_i(t+T)$ , als auch von  $\vec{\phi}_i(t)$  zu entwickeln. Ausformuliert bedeutet das:

$$\vec{\xi}(t+T) = \mathbf{\Phi}(t+T)\vec{c} \quad \text{und} \quad \vec{\xi}(t+T) = \mathbf{\Phi}(t)\vec{c} \quad (39)$$

Dies zeigt uns, dass ein linearer Zusammenhang zwischen  $\mathbf{\Phi}(t)$  und  $\mathbf{\Phi}(t+T)$  besteht, welcher wäre:

$$\mathbf{\Phi}(t+T) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} \quad (40)$$

Diese  $N \times N$ -Matrix  $\mathbf{C}$  bezeichnet man als die Monodromiematrix und bestimmt das Verhalten der Lösung von einer zur nächsten Periode. Die Werte dieser Matrix sind unter Beachtung von  $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$  leicht ablesbar:

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}(T) \quad (41)$$

Es gilt:

$$\mathbf{\Phi}(nT) = \mathbf{\Phi}^n(T) = \mathbf{C}^n \quad (42)$$

Anhand der  $N$  Eigenwerte  $\lambda_i$  der Monodromiematrix  $\mathbf{C}$  kann man die zeitliche Entwicklung der Lösung  $\vec{\xi}(t)$  ablesen. Diese Eigenwerte werden auch als *Floquet-Multiplikatoren* bezeichnet, für die gilt:

$$\lambda_i(nT) = \lambda_i^n(T) \quad \text{und} \quad \lambda_i(T) = e^{\sigma_i T} \quad (43)$$

Die Exponenten  $\sigma_i$  werden als *Floquet-Exponenten* bezeichnet.

Sind die Beträge der Multiplikatoren alle  $|\lambda_i| < 1$ , d.h.  $\text{Re } \sigma_i < 0$ , so ist die Trajektorie  $\vec{x}_r(t)$  *asymptotisch stabil* und sie ist *instabil*, wenn  $|\lambda_i| > 1$ , d.h.  $\text{Re } \sigma_i > 0$  sind. Der Beweis dieser Bedingungen wird hier nicht weiter behandelt, es soll nur gesagt werden, dass dieser Formalismus zu Stabilitätsanalyse von periodischen Lösungen auf den Mathematiker Gaston Floquet zurückgeht. Hiermit gehen wir gleich über auf das Werk eines anderen Mathematikers, nämlich Alexander Michailowitsch Liapunov, der uns den Liapunovexponenten schenkte. [2](S 444 - 446,448 - 450)

Der Liapunovexponent ist eine Größe, die uns eine quantitative Charakterisierung von chaotischen Bewegungen erlaubt. Weitere solche Größen wären das invariante Maß und die Korrelationsfunktion, welche hier aber nicht behandelt werden.

Um den Liapunovexponenten zu verstehen, betrachten wir zunächst eine eindimensionale diskrete Abbildung

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (44)$$

Solch eine Abbildung kann z.B. die Poincaré-Abbildung eines dynamischen Systems sein. Benachbarte Punkte können durch solch eine Abbildung mit zunehmenden Iterationen separiert werden. Wie sehr sich eine Punktfolge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  durch Abänderung der Anfangsbedingung um eine Zahl  $\epsilon$  ändert, kann durch den Liapunovexponenten beschrieben werden.

Man betrachte den Startwert einer Punktfolge  $x_0$  und einen um  $x_0 + \epsilon$  verschobenen Wert des Startwertes. Nach N Iterationen der Abbildung  $f(x)$  wird aus den Startpunkten

$$x_0 \xrightarrow{N \text{ Iterationen}} f^N(x_0) \quad (45)$$

$$x_0 + \epsilon \xrightarrow{N \text{ Iterationen}} f^N(x_0 + \epsilon) \quad (46)$$

Wo die Differenz der beiden Startpunkte zu Beginn noch  $\epsilon$  betrug, ist sie nun nach den Iterationen  $\epsilon e^{N\lambda(x_0)}$  Daraus folgt: **also**

$$\epsilon e^{N\lambda(x_0)} = |f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)| \quad (47)$$

(das ist approximativ so)

Der Faktor  $e^{\lambda(x_0)}$  ist hierbei die mittlere Streckung zweier benachbarter Punkte nach einer Iteration.



Für den Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 0$  und  $N \rightarrow \infty$  resultiert daraus eine Ausdruck für den Liapunovexponenten  $\lambda(x_0)$ :

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right| \quad (48)$$

Durch Anwendung der Kettenregel auf die Abbildungen, folgt eine alternative Schreibweise des Liapunovexponenten

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{d}{dx_0} f^N(x_0) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| \quad (49)$$

dieser schritt ist mir nicht sofort klar

[1] (S.24, 25)

das verstehe ich nicht, wenn alle xi gleich sind, dann laut (44) ist f die identitaet

Sind alle Werte von  $x_i$  gleich, reduziert sich  $\lambda$  zum Spezialfall

$$\lambda(x_0) = \ln |f'(x_0)| \quad (50)$$

Somit beschreibt der Liapunovexponent die mittlere Ausbreitungsrate pro Iteration des Abstandes von zwei unterschiedlichen Trajektorien.

Ist bei einem dynamischen System  $\lambda > 0$ , wird es als chaotisch bezeichnet und es benötigt nicht viele Iterationen, um bei nur kleinen Änderungen der Anfangsbedingungen große Abstände der Trajektorien im Phasenraum zu haben. Somit haben wir ein Maß dafür gefunden, ob ein dynamisches System chaotisch ist oder nicht. Der Zustand eines solchen Systems mit positivem Liapunovexponenten kann also, aufgrund der endlichen Messgenauigkeit physikalischer Methoden, nicht beliebig weit in die Zukunft vorherbestimmt werden, obwohl die zum System dazugehörigen Differenzialgleichungen mathematisch eindeutig lösbar sein können.

Das Konzept des Liapunovexponenten kann auch auf mehrere Dimensionen erweitert werden. Im Falle von drei Dimensionen können drei unabhängige Exponenten  $\lambda_i$ , mit  $i = 1, 2, 3$  berechnet werden. Ausgangspunkt der Berechnung stellt hierbei die Stabilität periodischer Bahnen dar, die Floquet behandelte.

In Übereinstimmung mit Glg.(48) kann man die Definition auch auf die kleine Störung  $\vec{\xi}$  übertragen, um deren zeitliche Entwicklung herauszufinden.

was ist  $\xi$  ?

$$\lambda_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{|\vec{\xi}(t)|}{|\vec{\xi}(t_0)|} \quad (51)$$

was ist das ?  
warum sie reden  
was ist  $\vec{x}_r$  ?

Obwohl  $\lambda_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0}$  von der Referenztrajektorie  $\vec{x}_r(t)$  abhängt und somit auch vom Startpunkt, ist  $\lambda$  in der Nähe eines Attraktors nicht mehr abhängig von der Referenzbahn.  $\lambda_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0}$  ist auch von der Richtung der Störung  $\vec{\xi}_0 = \vec{\xi}(t_0)$ . Im N-dimensionalen Raum existieren N

Okay, Sie reden vom N-dimensionalen Raum  
dann bitte neuer Abschnitt

Liapunovexponenten, bei denen Entartungen auftreten können, sowie  $N$  linear unabhängige Vektoren  $\vec{e}_i$ .

$$\lambda_i = \lambda_{\vec{x}_r \vec{e}_i} \quad (52)$$

Die Exponenten sollen in einer absteigenden Reihenfolge ~~geordnet~~ *zu ordnen* sein,  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$ . Der größte von ihnen ( $\lambda_1$ ) kann leicht berechnet werden, dazu wird lediglich die linearisierte Bewegungsgleichung (Glg.(35)) mit zufällig gewählten Anfangsstörungen  $\vec{\xi}(t_0)$  aufintegriert. Diese Anfangsstörung kann wie folgt zerlegt werden:

$$\vec{\xi}(t_0) = \sum_{i=1}^N c_i \vec{e}_i \quad (53)$$

Dieser Vektor wird auch immer einen Anteil in  $\vec{e}_i$  haben, der zu dem größten Liapunovexponenten gehört. In dieser Lösung wird nach einer gewissen Zeit diejenige Komponente der Störung dominieren, die am schnellsten wächst. Glg.(51) liefert durch die Limesbildung automatisch den maximalen Exponenten  $\lambda_1$ . Zur Berechnung des ganzen Satzes, muss lediglich die zeitliche Entwicklung aller  $N$  linear unabhängigen Störungen  $\xi_i$  mit  $\vec{\xi}_i(t_0) = \vec{e}_i$  betrachtet werden.

Bemerkenswert ist es, dass im Falle einer periodischen Bahn  $\vec{x}_r(t+T) = \vec{x}_r(t)$  der Wert der Liapunovexponenten übereinstimmt mit den Werten der Floquet-Exponenten. Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung dieses Begriffs.

Da die Liapunovexponenten maßgeblich über die Langzeitentwicklung des Systems entscheiden und es in mehrdimensionalen Systemen mehrere Exponenten gibt, erhält man unterschiedliche Attraktoren, abhängig von der Kombination der Liapunovexponenten. Hat ein System zum Beispiel mindestens einen positiven Exponenten, zieht benachbarte Trajektorien jedoch trotzdem an, existiert ein *seltsamer Attraktor*, welcher besonders interessant ist.

In einem System mit z.B. drei Freiheitsgraden existieren drei unabhängige Liapunovexponenten ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ). Je nach Vorzeichenkombination erhält man verschiedene Attraktoren:

a)  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, -)$  : Fixpunkt

b)  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$  : Grenzyklus

c)  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$  : Torus

d)  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$  : Chaotischer Attraktor

Fall a): Die Nachbartrajektorien laufen aus allen Richtungen in einem gemeinsamen Fixpunkt zusammen.

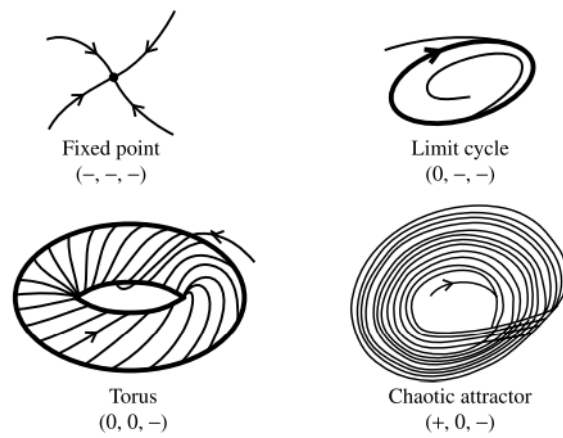


Abbildung 3: Mögliche Attraktortypen für ein System mit drei Freiheitsgraden

Fall b): Da  $\lambda_1 = 0$ , liegt eine periodische Bewegung vor. Der Attraktor hat die Topologie eines Kreises.

Fall c): Da  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ , liegt wieder eine periodische Bewegung vor, nur diesmal in zwei Dimensionen. Der Attraktor hat die Topologie eines Torus. In diesem Fall schraubt sich die Trajektorie um den Torus. Es gibt in diesem Falle zwei Umlauffrequenzen,  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , die insofern wichtig sind, da sie angeben, ob es sich um eine periodische oder eine quasiperiodische Bahn handelt. Ist der Bruch  $\omega_1/\omega_2$  eine irrationale Zahl, so ist die Bahn quasiperiodisch und wird sich nie schließen.

Fall d): Wenn der größte Liapunovexponent  $\lambda_1$  positiv ist, ist die Trajektorie stark von den Anfangsbedingungen abhängig und das System im gesamten weist chaotische Eigenschaften auf. Der Attraktor wird in diesem Fall chaotischer Attraktor genannt. Typisch ist  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$ , wobei es jedoch auch andere Kombinationen für chaotische Attraktoren gibt. Diese Art von Attraktoren sind geometrisch seltsame Attraktoren, die die eigenartigen Eigenschaften haben, Gebilde mit einer gebrochenen Dimension zu sein, was bedeutet, dass es weder Linien noch Flächen sind, sondern etwas dazwischen.

Nun da wir unsere Diskussion über die Stabilität und den Liapunovexponenten von dynamischen Systemen bereits mit dem Konzept der Attraktoren beendet haben, gehen wir im nächsten Kapitel noch näher seltsame Attraktoren ein. [2](S.463 - 465)

## 2.4 Seltsame Attraktoren und Kolmogorov-Entropie

Zu den Eigenschaften eines seltsamen Attraktors gehört natürlich die grundlegende Eigenschaft, hinreichend nahe Trajektorien in einem begrenztem Gebiet des Phasenraumes anzuziehen. Diese Eigenschaft teilen sie sich auch mit allen anderen Attraktoren. Ausschlaggebend für die seltsamen Attraktoren ist die Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen sowie das Zusammenziehen der Volumenelemente. Wir erinnern uns, dass dieses Zusammenziehen der Volumenelemente die grundlegende Eigenschaft von dissipativen Systemen ist. Eine Abnahme des Volumenelements bedeutet hier jedoch nicht, dass sich auch die Längen in allen Raumrichtungen verkleinern. Vielmehr entfernen sich

) nicht so klar

zwei benachbarte Punkte exponentiell voneinander, während sich das Volumenelement zusammenzieht, was zu einer positiven Kolmogorov-Entropie führt. Des Weiteren bleibt das Volumenelement trotz Streckung und Stauchung in einem beschränkten Gebiet, was eine Faltung des Elements bedeutet. Dieser Streckungs- Stauchungs- und Rückfaltungsprozess führt zu den chaotischen Bewegungen der Trajektorie. [1](S.104)

Erklären, oder  
Referenz, oder schreiben  
(siehe unten)

ABSCHNITT - FÜR FÜR

Eine weitere erwähnenswerte Eigenschaft von seltsamen Attraktoren ist, dass sie gebrochene Hausdorffdimensionen besitzen. Nur kurz wird hier das Konzept der Hausdorffdimension angeschnitten:

nicht ganz klar,  
was Sie hier meinen

Man nehme an, eine Punktmenge im N-dimensionalen Raum werde mit einer "Kugel" mit dem Durchmesser  $l$  überzogen, sodass alle Punkte innerhalb der Kugel liegen. Nun lässt man den Durchmesser  $l$  der Kugel gegen Null gehen und erzeugt so viele Kugeln wie nötig in der Nähe der Punktmenge, um immer noch alle Punkte im Inneren einer Kugel zu haben. Diese Anzahl an Kugeln ist eine Funktion  $N(l)$  in Abhängigkeit des Kugeldurchmessers. Je kleiner  $l$ , desto größer  $N(l)$ . Die Hausdorffdimension berechnet sich für  $l$  gegen Null wie folgt:

(nicht wie eine "Lins" aus)  
benutzen sie bitte einen  
 $l$  Maßstab

$N$  benutzen Sie  
schon für die  
Raumdimension

$$N(l) \propto \frac{1}{l^D} \quad (54)$$

$$D = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log(N(l))}{\log(l)} \quad (55)$$

Für eine ~~gewöhnliche~~  <sup>$D=1$  ist</sup> Kurve ist  $D = 1$ , da umgekehrt proportional viele "Kugeln" benötigt werden wie der Durchmesser ist. Für eine ~~Fläche~~ <sup>Fläche</sup> wächst die Zahl der erforderlichen Kugel proportional zu  $1/R^2$ , weshalb  $D = 2$  ist. Eine seltsamer Attraktor hat nun eine Hausdorffdimension  $D$ , die keine ganze Zahl ist. Sie kann auch eine rationale Zahl sein. Zum Beispiel hat die Koch-Kurve  $D = 1,26185...$  [1](S.54)

Neben der Hausdorffdimension gibt es noch ein ganzes ~~Set~~ <sup>Satz</sup> an anderen Dimensionen das eingeführt wurde um seltsame Attraktoren und Fraktale im Allgemeinen zu beschreiben. Ein weiteres Beispiel dafür ist die Boxcounting-Dimension. Obwohl diese Dimensionen alle das Selbe beschreiben, können sie unterschiedliche Werte annehmen, aufgrund der unterschiedlichen Arten wie sie numerisch berechnet werden. [3](Generalized dimensions and entropies from a measured time series Pawelzik and Schuster)

was ist die Verbindung  
von diesen Dimensionen  
mit Chaos und  
mit Bewegungsgleichungen

Als ein Weiteres und auch als das letzte Maß zur Beschreibung und Charakterisierung von chaotischen Bewegungen führen wir nun die Kolmogorov-Entropie  $K$  ein. Zum Einstieg erinnern wir uns daran, dass schon in der Thermodynamik die Entropie als ein Maß für den Informationsgehalt bezeichnet wurde. Ein Anstieg der Entropie wurde gleichgesetzt mit einem Anstieg an Unwissenheit über das System. Shannon definierte die Entropie über eine ~~Wahrscheinlichkeit~~ <sup>Wahrscheinlichkeit</sup>. Die Wahrscheinlichkeit  $P_i$  mit der man ein System im Zustand  $i$  findet,

$$S \propto - \sum_i P_i \cdot \log(P_i) \quad (56)$$

Die Kolmogorov-Entropie  $K$  kann auf die Shannon-Entropie zurückgeführt werden, da sie auch Aussagen über die Information in einem dynamischen System liefert. Genauer gesagt ist  $K$  proportional zur Verlustrate der Information über ein dynamisches System mit der Zeit.

Zum Berechnen der  $K$ -Entropie betrachte man eine Trajektorie eines dynamischen Systems, auf einem seltsamen Attraktor, im  $N$ -dimensionalen Phasenraum. Dieser Phasenraum wird in Kästchen der Größe  $l^N$  unterteilt und misst den Systemzustand in den Zeitabständen  $\tau$ .  $P_{i_0 \dots i_n}$  sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Trajektorie zu  $\vec{x}(t=0)$  durch Kästchen  $i_0$ , zu  $\vec{x}(t=\tau)$  durch Kästchen  $i_1, \dots$  und zu  $\vec{x}(t=n\tau)$  durch Kästchen  $i_n$  läuft. Nun berechnet sich  $K_n$  nach der Formel von Shannon folgendermaßen:

$$K_n = - \sum_{i_0 \dots i_n} P_{i_0 \dots i_n} \log(P_{i_0 \dots i_n}) \quad (57)$$

Diese Größe ist proportional zur Information, die benötigt wird, um ein System auf einer bestimmten Trajektorie festzusetzen. Die Differenz  $K_{n+1} - K_n$  ist genau der Wert, der benötigt wird um vorherzusagen in welchem Kästchen  $i_{n+1}$  sich die Trajektorie befinden wird, unter der Voraussetzung, man weiß in welchen Kästchen  $i_0 \dots i_n$  sich die Trajektorie bisher befunden hat. Dies bedeutet, dass der Wert  $K_{n+1} - K_n$  den Informationsverlust angibt, wenn man von Zeitpunkt  $n$  auf  $n+1$  übergeht. Als mittlere Informationsverlustrate definieren wir  $K$ :

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n) = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{i_0 \dots i_{N-1}} P_{i_0 \dots i_{N-1}} \log(P_{i_0 \dots i_{N-1}}) \quad (58)$$

Durch die Limesbildung von  $l \rightarrow 0$ , wird die spezielle Anordnung der Kästchen im Phasenraum irrelevant gemacht. Die Kolmogorov-Entropie wird für ein System mit regulärer Bewegung (z.B. Rotation eines Körpers, laminare Strömungen, uvm.) 0 und für Systeme mit deterministischen Chaos eine positive Konstante. Für ein System das stochastische Dynamik aufweist, wird  $K$  unendlich.

Sowohl der Liapunovexponent als auch die Kolmogorov-Entropie sind invariant unter Koordinatentransformationen. Bei eindimensionalen Abbildungen ist  $K$  gleich dem positiven Liapunovexponenten. In höheren Dimensionen verlieren wir bei chaotischen Systemen Information mit voranschreitender Zeit, was auch an einem positiven Wert für  $K$  abgelesen werden kann. Gleichzeitig haben solche Systeme positive Liapunovexponenten, mit deren Rate sich die Systeme ausbreiten. Es existiert ein Zusammenhang zwischen der Kolmogorov-Entropie und den Liapunovexponenten. Die Rate des Informationsverlusts  $K$  ist nämlich die gemittelte Summe der positiven Liapunovexponenten.

$$K = \int d^N x \rho(\vec{x}) \sum_i \lambda_i^+(\vec{x}) \quad (59)$$

von  $S$  ?

die

Sie meinen, sich im Kästchen ... BEFINDET

bestimmen

Sie reden hier von der Raumdimension. Bitte so benennen.

was bedeutet das? Erklären oder Referenz

die  
Titel

$\rho(\vec{x})$  ist hier die invariante Dichte auf dem Attraktor. Das Integral in dieser Gleichung wird oft lediglich zu 1, da der Liapunovexponent meist nicht von  $\vec{x}$  abhängt.  $K$  ist dann lediglich die Summe der positiven Liapunovexponenten. sind

Zuletzt wollen wir uns noch die mittlere Vorhersagezeit eines chaotischen Systems ansehen, welche angibt, wie weit man die Entwicklung des Systems vorhersagen kann. Grundsätzlich können genaue Aussagen über die Entwicklung des Systems nur für Zeiten kleiner als  $T_m$  gemacht werden, danach sind nur noch statistische Aussagen möglich. Im Falle eindimensionaler Abbildungen gilt:

$$T_m = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad (60)$$

Dieser Ausdruck kann mit der K-Entropie auf mehrere Dimensionen verallgemeinert werden:

$$T_m \propto \frac{1}{K} \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad (61)$$

entspricht in diesen Definitionen die Genauigkeit mit der das System bzw. der Anfangszustand bestimmt werden kann und beeinflusst  $T_m$  nur logarithmisch.

Zusammenfassend sind wir genauer auf den seltsamen Attraktor eingegangen und haben ihm die Eigenschaft einer positiven K-Entropie zugewiesen. Danach haben wir mit der Definition der Kolmogorov-Entropie die mittlere Rate des Informationsverlustes mit der Zeit für ein dynamisches System eingeführt, die eine positive Konstante ist, wenn das System deterministisches Chaos aufweist. Gleichzeitig haben wir eine Beziehung zum Liapunovexponenten hergestellt, wobei  $K$  das Phasenraumintegral mal der Summe der positiven Liapunovexponenten war. Abschließend haben wir sowohl mit  $K$  als auch mit  $\lambda$  eine Zeitspanne definiert, innerhalb der man die Entwicklung des Systems genau weiß. [1](S.109 - 111, 115, 116)

## 2.5 Bifurkationen

Viele dynamische Systeme hängen von einem oder mehreren Kontrollparametern ab, die unter anderem darüber entscheiden, ob sich das System chaotisch oder regelmäßig verhält. Solche Kontrollparameter können die Reibung, die Frequenz oder Stärke einer äußeren Kraft und vieles mehr sein. In Abhängigkeit dieser Parameter  $\mu$  kann sich das Langzeitverhalten der Lösungen schlagartig ändern. Es ist zum Beispiel möglich, dass das System bei  $\mu$  auf einer stabilen Trajektorie unterwegs ist, doch sobald  $\mu$  einen kritischen Wert  $\mu_c$  überschreitet, gibt es zwei zur selben Zeit stabil existierende Lösungen, oder das System weist ab  $\mu_c$  gar chaotisches Verhalten ohne stabile Lösungen auf. Der Übergang von einer zu zwei stabilen Lösungen wird *Bifurkation* genannt.

Es werden hier verschiedene Formen von Bifurkationen betrachtet, wobei hier jedoch nur auf den einfachsten Fall mit einem einzigen Kontrollparameter eingegangen wird. Der

Wieso? Wenn das System deterministisch ist?

das ist die Antwort, Das hätten Sie vorher formulieren müssen

das haben Sie nicht gemacht?

→ mehr als eine Zusammenfassung wäre eine Vermischung zu dem, was nun kommt.

Phasenraum des Systems kann weiterhin f-dimensional sein, doch das gesamte System hängt nur von z.B. der Reibung ab.

Statische Bifurkationen treten bei stationären Fixpunkten  $\vec{x}_0$  auf, die schon in Kap. 2.3 eingeführt wurden. Glg. (15) wird nun durch den Kontrollparameter  $\mu$  modifiziert

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}_0, \mu) = 0 \quad (62)$$

Die Lage des Fixpunktes hängt somit implizit vom Kontrollparameter ab. Solche Fixpunkte existieren, wie schon zuvor diskutiert, wenn es eine Jacobimatrix  $\mathbf{M}$  gibt, deren Determinante nicht Null ist. Ist diese Determinante nun jedoch Null, so kann von einer Bifurkation ausgegangen werden. Dies geschieht, wenn ein Eigenwert der Matrix  $\mathbf{M}$  in Abhängigkeit vom Kontrollparameter  $\mu$  Null wird. Dies ist eng mit der Stabilitätsanalyse verbunden. Es werden nun ein paar Beispiele für Bifurkationstypen mit deren Normalform und einem Beispiel genannt, ohne näher darauf einzugehen.

- a) Sattelknoten-Bifurkation:  $\dot{x} = F(x, \mu) = \mu - x^2$
- b) Heugabel-Bifurkation:  $\dot{x} = F(x, \mu) = \mu x - x^3$
- c) Transkritische Bifurkation:  $\dot{x} = F(x, \mu) = \mu x - x^2$
- d) Hopf-Bifurkation:  $\dot{x} = F(x, \mu) = x((\lambda + i) + (\alpha + i\beta)|x|^2)$

wobei in d)  $\lambda$  der Eigenwert,  $\alpha, \beta$  reelle Parameter und  $x$  eine komplexe Zahl sind. [2](S. 454 - 457)

### 3 Beispiele zu chaotischer Mechanik

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Anwendungsbeispielen von einigen oben genannten Konzepten. Zuerst sehen wir uns das einfache Pendel an, wobei wir auf zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen dieses einfachen schwingenden Systems eingehen werden, wobei bei keinen von beiden Chaos auftreten wird. Es soll als Vergleich zum darauffolgenden Beispiel dienen, in dem chaotisches Verhalten nachweisbar ist, nämlich dem periodisch getriebenen Pendel.

#### 3.1 Einfaches Fadenpendel

Wie bereits erwähnt ist das einfache Pendel bzw. das Fadenpendel unser erstes System mit dem wir uns beschäftigen wollen. Ein Aufbau wie in Abb. 4 gezeigt wird durch die Gleichung

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} * \sin(\theta(t)) = 0 \quad (63)$$

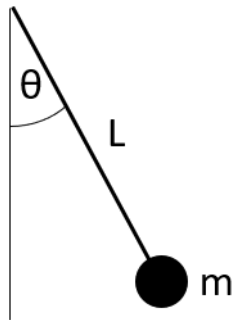


Abbildung 4: Fadenpendel

beschrieben. Wie man sofort sieht, ist das eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei man zum Lösen dieser Gleichung die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  einführt, um es in ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung überzuführen.

Die resultierenden und zu lösenden Gleichungen haben dann die Form

$$\omega = \dot{\theta} \quad (64)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l} * \sin(\theta) \quad (65)$$

Da mit dem  $\sin(\theta)$  weiterhin eine Nichtlinearität vorhanden ist, ist diese Gleichung nicht ohne Weiteres analytisch lösbar. (Tatsächlich ist dieses Problem eines der wenigen nicht-linearen Systeme, die analytisch gelöst werden können, jedoch wird dazu die Reihenentwicklung des vollständigen elliptischen Integrals 1. Art benötigt. Da dies jedoch nicht ohne Weiteres machbar ist, wird im Weiteren angenommen, dass dieses Problem nur numerisch bewältigbar ist.) Um dieses Problem zu umgehen, gibt es zwei Ansätze. Man kann zum Einen die Kleinwinkelnäherung des Sinus verwenden, die es uns erlaubt, für kleine Auslenkungen den  $\sin(\theta)$  durch  $\theta$  zu ersetzen. Damit ist Glg.(64) nun zu einer linearen Gleichung geworden und kann analytisch gelöst werden. Der andere Ansatz wäre, die Nichtlinearität zu behalten und auf numerische Lösungsverfahren zum Lösen von Differentialgleichungen zurückzugreifen. Wir werden beides tun und die Ergebnisse vergleichen.

Dass die obige Differentialgleichung nicht die eines echten Pendels, das in der realen Welt existiert, ist, erkennt man daran, dass in diesem System keine Dissipation auftritt. Mit anderen Worten es gibt keinen Reibungsterm, der die Bewegungsenergie des schwingenden Systems langsam in Wärmeenergie umwandelt und es somit mit der Zeit zum Anhalten bringt. Solche Reibungen existieren jedoch in der realen Welt, weswegen wir auch hier eine Unterscheidung treffen werden. Es folgt nun eine Liste von Differentialgleichungen, die den besprochenen Systemen entspricht.

- $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0$  (I) Nichtlineares mathematisches Pendel
- $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0$  (II) Lineares mathematisches Pendel



- $\ddot{\theta}(t) + r\dot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0$  (III) Nichtlineares gedämpftes Pendel

Beginnen wir mit (I) dem nichtlinearen Pendel. Um diese Gleichung zu lösen, werden, wie schon erwähnt, numerische Lösungsverfahren gebraucht. Solche Verfahren, die imstande sind, Differentialgleichungen numerisch zu lösen, sind zum Beispiel das Euler-Verfahren oder das Runge-Kutta-Verfahren. Hier wird ein Runge-Kutta-Verfahren verwendet um die Gleichung (I) mit den Anfangsbedingungen  $\theta_0 = \pi/2$  und  $\omega_0 = 0$  zu lösen. Zusätzlich soll noch erwähnt sein, dass in der numerischen Berechnung und dem Erstellen der Plotts, der Faktor  $g/l = 1$  gesetzt wurde.

Die Ergebnisse werden geplottet

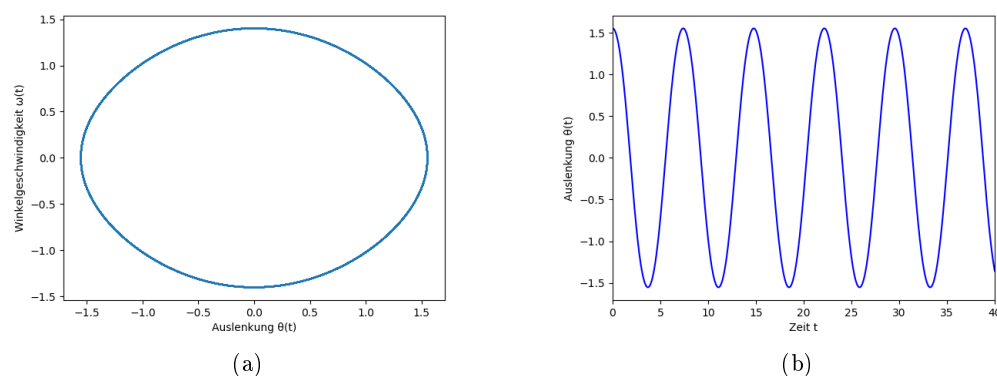


Abbildung 5: Phasenraumportrait (a) und zeitlicher Verlauf der Auslenkung  $\theta$  (b) des ungedämpften nichtlinearen Pendels

Abb. 5a zeigt, dass sich die Trajektorie auf einem stabilen Zyklus befindet und auch dort bleibt, da es in diesem System keine Dissipation gibt. Dies erkennt man auch daran, dass in Gleichung (I) kein Reibungsterm vorhanden ist. Die Amplitude der Auslenkung (Abb.5b) bleibt also zeitlich konstant. Auch die Frequenz mit der  $\theta$  zwischen  $\pi/2$  und  $-\pi/2$  oszilliert, ändert sich nicht.

Als nächstes wollen wir den linearisierten Fall des einfachen Pendels betrachten und mit den Ergebnissen des nichtlinearen Falls vergleichen. Gleichung (II) ist zwar rein analytisch lösbar, doch da es hier aber nicht um das Lösen von Bewegungsgleichungen geht, wird dies übersprungen und die Ergebnisse werden gleich geplottet.

Vergleicht man diese mit den Ergebnissen des nichtlinearen Pendels, sieht man, dass sich sowohl das Phasenraumportrait, als auch die Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit unterscheiden. In Abbildung 6a wurden für beide Fälle die gleichen Startbedingungen ( $\theta_0 = \pi/2$  und  $\omega_0 = 0$ ) verwendet. In Abb. 6b erkennt man auch einen Unterschied in der Periodendauer der Pendeloszillation. Dieser Unterschied ist in der Spektralanalyse der Auslenkung  $\theta$  noch deutlicher zu erkennen und wird in Abb. 7 dargestellt. Darin ist zu erkennen, dass sich sowohl die Frequenz  $f$ , als auch die Periodendauer  $T$  von  $\theta$ , im Fall des nichtlinearen Systems abhängig von den Startbedingungen verändern, während dies beim linearisierten System nicht der Fall ist. Zu erwähnen ist, dass auf der y-Achse in Abb.7 die Leistungsspektraldichte (PSE) aufgetragen ist, welche in unseren Überlegungen jedoch nicht weiter von Bedeutung ist.

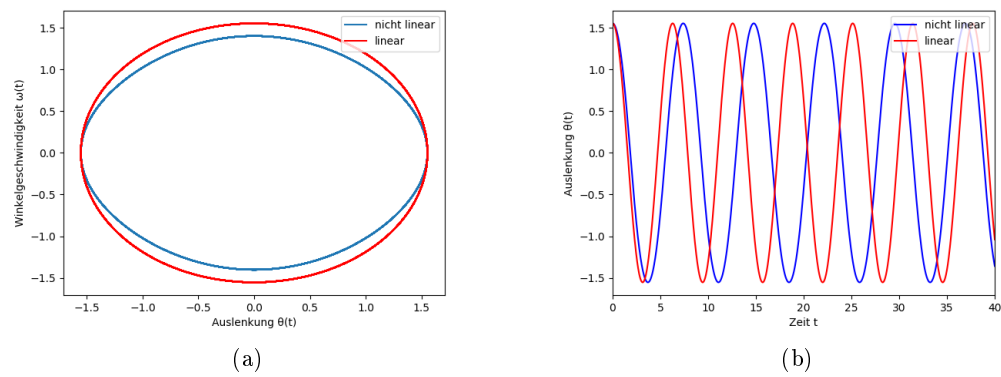


Abbildung 6: Vergleich des Phasenraumportraits (a) und des Verlaufs der Auslenkung  $\theta$  (b) zwischen linearen und nichtlinearen Fall

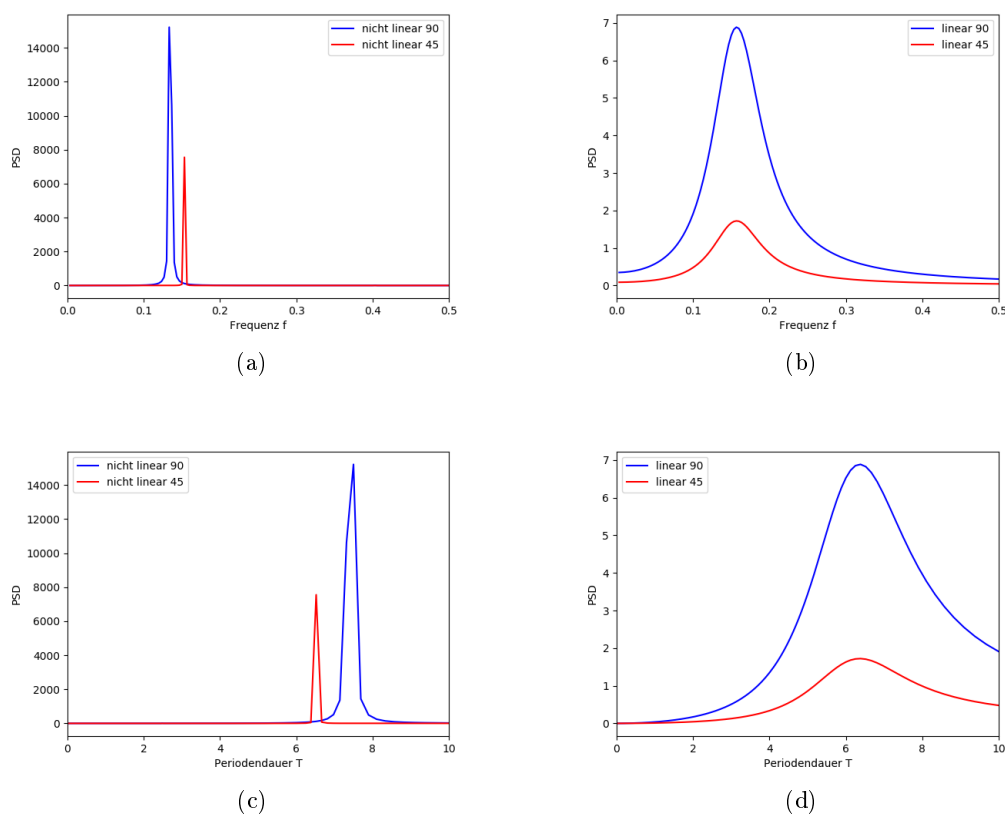


Abbildung 7: Fourieranalyse des Verlaufs der Auslenkung für die Startbedingungen  $\theta_0 = 90^\circ$  und  $\theta_0 = 45^\circ$ . (a) Frequenzspektrum für das nichtlineare System, (b) Frequenzspektrum für das lineare System, (c) Periodendauer für das nichtlineare System  $T_{90} = 7.50$ ,  $T_{45} = 6.52$ , (d) Periodendauer für das lineare System  $T_{90} = T_{45} = 6.38$

Anhand des deutlichen Unterschieds der Lösungen in Abb. 6 ist es nun berechtigt, die Frage nach der Gültigkeit der Kleinwinkelnäherung zu stellen. Betrachtet man die zwei Systeme nochmals, wählt jedoch andere Startbedingungen ( $\theta_0 = \pi/4$  und  $\omega_0 = 0$ ), ist

es möglich die Gültigkeit der Kleinwinkelnäherung zu überprüfen. In Abb. 8 sieht man, dass sich mit kleiner werdender Ursprungsauslenkung, die Lösung der Kleinwinkelnäherung immer näher der Lösung des nichtlinearen Systems annähert. Dies ist auch in der Annäherung der Frequenz und Periodendauer in Abb.7 zu sehen.

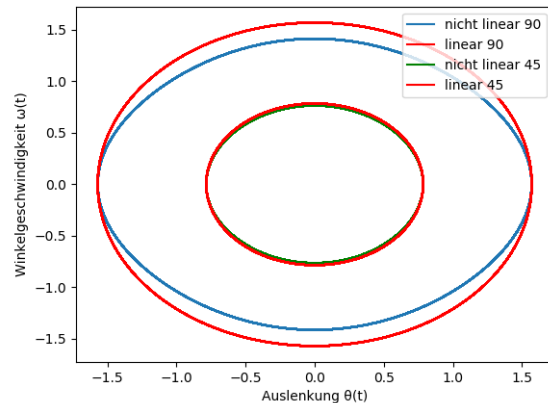


Abbildung 8: Vergleich des Phasenraumportraits zwischen linearen und nichtlinearen Fall für Ursprungsauslenkungen von  $\pi/2$  und  $\pi/4$

Zuguter Letzt betrachten wir noch Gleichung (III), bei der nun Dissipation mit in Spiel kommt. Der Reibungsterm  $r$  bewirkt eine Umwandlung der im System enthaltenen Energie in Wärme. Man bemerke, dass dies in den Systemen (I) und (II) nicht der Fall war, in ihnen war die Gesamtenergie zeitlich konstant, wengleich sie auch von den Startbedingungen  $\theta_0$  und  $\omega_0$  abhängig war.

Gleichung (III), welche nun wieder eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, wird wieder in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung übergeführt.

$$\omega = \dot{\theta} \quad (66)$$

$$\dot{\omega} = -r * \omega - \frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (67)$$

Der Bruch  $g/l = 1$  und  $r = 0.1$  bzw.  $r = 0.5$ . Die Startbedingungen sind  $\theta_0 = \pi/2$  und  $\omega_0 = 0$ . In Abb. 9 sieht man einen deutlichen Trend des Systems in Richtung Equilibrium. Je höher der Reibungsterm, desto schneller der Abklingvorgang. Dieses System, obwohl dissipativ, ist ebenfalls noch nicht chaotisch, hat jedoch, anders als die Systeme (I) und (II), einen weiteren Parameter, der für Unruhe sorgen kann.

Um nun die im ersten Teil besprochenen theoretischen Konzepte zur Anwendung zu bringen, überprüfen wir zunächst, ob dieses System auch nach obiger Definition dissipativ ist. Wie in Kap. 2.1 und 2.2 erwähnt, ist ein System dann dissipativ, wenn sich das Phasenraumvolumen mit der Zeit verkleinert. Ein quantitatives Maß dafür, wurde mit Glg.(14) eingeführt. Um Glg.(14) verwenden zu können, müssen wir zunächst das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{F}$  einführen. Dazu nehmen wir die Standardform der Bewegungsgleichung (III) her (Glg.(67/68)) und berechnen die zeitliche Ableitung der Trajektorie

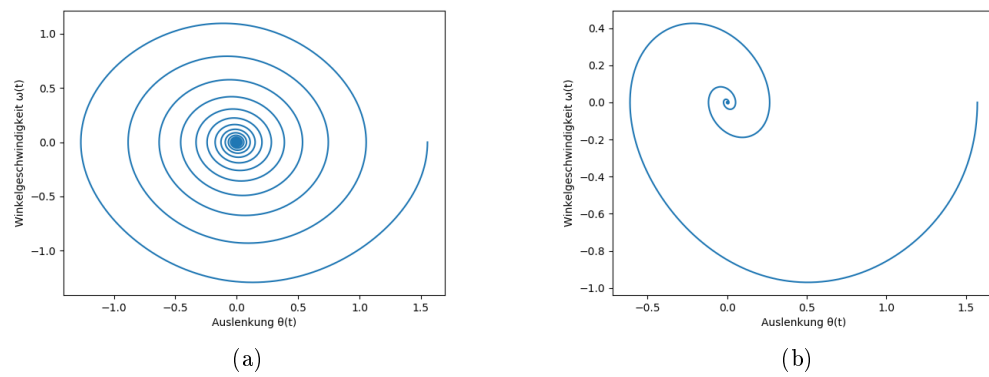


Abbildung 9: Phasenraumportraits des gedämpften nichtlinearen Pendel für  $r = 0.1$  (a) und  $r = 0.5$  (b)

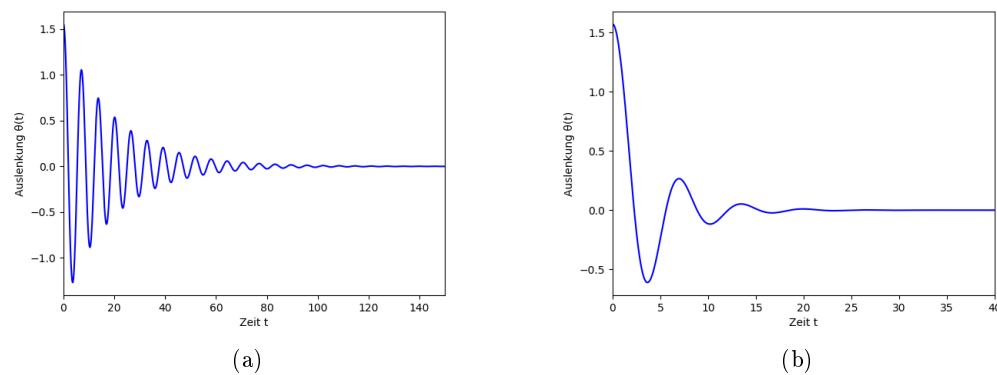


Abbildung 10: Auslenkung  $\theta$  des gedämpften nichtlinearen Pendel für  $r = 0.1$  (a) und  $r = 0.5$  (b)

im Phasenraum.

$$\dot{\vec{\theta}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -r\omega - \sin(\theta) \end{pmatrix} = \vec{F}(\vec{\theta}) \quad (68)$$

Nun kann man Glg.(14) anwenden

$$\Lambda = \vec{\nabla} * \vec{F}(\vec{\theta}) = -r \quad (69)$$

Da  $r > 0$  ist, ist  $\Lambda < 0$  und daraus folgt, dass das System dissipativ ist. Es ist leicht zu überprüfen, dass die Systeme (I) und (II) nicht dissipativ (also konservativ) sind. In diesem Fall ist  $\Lambda = 0$ .

Aus Abb. 9 liegt die Vermutung nahe, dass sich das System (III) auf einen Fixpunkt zubewegt, den es in den Systemen (I) und (II) nicht gibt. Dieser Fixpunkt liegt bei

$\theta = \omega = 0$ . Um diesen Punkt genauer zu analysieren, bedienen wir uns dem Kap. 2.3. Der erste Schritt besteht darin, die Jacobimatrix von  $\vec{F}(\vec{x})$  zu berechnen, siehe Glg.(18):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & -r \end{pmatrix} \quad (70)$$

Setzt man nun den Fixpunkt in die Matrix ein und berechnet  $s$  und  $d$ , erhält man:

$$s = \frac{1}{2}(0 - r) = -\frac{r}{2} \quad (71)$$

$$d = 0 * (-r) + \cos(0) * 1 = 1 \quad (72)$$

Da in unserem System  $r > 0$  ist, folgt  $s < 0$  und  $d > s^2$ , was  $\mu_1 = \mu_2^*$ , negativer Realteil entspricht, daher ist der Fixpunkt  $\theta = \omega = 0$  von System (III) ein stabiler Strudel, was auch leicht anhand der Abbildungen erkennbar ist.

### 3.2 Periodisch getriebenes Pendel

Als letztes Beispiel dient das periodisch getriebene Pendel, welches ein Musterbeispiel für chaotisches Verhalten ist. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\theta} + r\dot{\theta} + \sin(\theta) = f\cos(\Omega t) \quad (73)$$

wobei  $r$  wie zuvor ein zur Geschwindigkeit proportionaler Reibungsparameter ist,  $\sin(\theta)$  ist eine zu  $\theta$  proportionale Rückstellkraft und der Term auf der rechten Seite fungiert als eine zeitlich periodische, äußere, anregende Kraft mit der Stärke  $f$  und der Frequenz  $\Omega$ .

Die Vorgangsweise ist gleich wie zuvor und bringen die Gleichung erstmal in ihre Standardform, zeigen, dass es sich um ein dissipatives System handelt, lösen dieses System von gekoppelten DGL's numerisch, plotten sowohl das Phasenraumportrait als auch den Verlauf der Auslenkung und betrachten anschließend weitere schon zuvor eingeführte Größen zur Charakterisierung des Verhalten des Systems.

Die Standardform des Systems wird wieder durch Einführung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  durchgeführt.

$$\dot{\omega} = -r\omega - \sin(\theta) + f\cos(\phi) \quad (74)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (75)$$

$$\dot{\phi} = \Omega \quad (76)$$

Um das quantitative Maß  $\Lambda$  für die Dissipation zu erhalten, wird zunächst die Divergenz des Phasenraumflusses berechnet.

$$\vec{F}(\vec{\theta}) = \dot{\vec{\theta}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -r\omega - \sin(\theta) + f\cos(\phi) \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (77)$$

$$\Lambda = \nabla * \vec{F}(\vec{\theta}) = -r \quad (78)$$

Für jedes  $r > 0$  ist somit  $\Lambda < 0$  und damit ist das System dissipativ.

Nun werden in Abhängigkeit eines Kontrollparameters die Phasenraumportraits und die zeitlichen Verläufe der Auslenkung  $\theta$  berechnet und graphisch dargestellt. Dieser Kontrollparameter ist hier die Stärke  $f$  der äußeren, antreibenden Kraft. Die Frequenz der äußeren Kraft wird fixiert auf  $\Omega = 2/3$  und der Reibungsparameter wird auf  $r = 0.5$  fixiert. Je nach Wert des Kontrollparameter wird sich das dynamische System nun anders verhalten und entweder chaotische oder periodische Eigenschaften vorweisen.

Da  $f$  nun allerdings ein kontinuierlicher Parameter ist, muss man wissen, an welchen Stellen man das System abtastet, wenn man es nicht an jeder Stelle einzeln betrachten will. Dafür kann man sich das Bifurkations- oder auch Attraktordiagramm zunutze machen. Dieses Diagramm gibt einen globalen Überblick über die Anzahl der Perioden bzw. der möglichen Werte einer Phasenraumkoordinate, in Abhängigkeit des Systemparameters. In Abb. 11 sieht man dieses Diagramm für das periodisch getriebene, gedämpfte Pendel für einen Parameterbereich von 0 bis 10. In diesem Diagramm kann man ablesen, für welche  $f$ -Werte sich das System periodisch oder chaotisch verhält.

In Abb. 13 ist der Parameterbereich von 0.9 bis 1.6 vergrößert. In ihm werden 8  $f$ -Werte ausgewählt, an denen das System genauer untersucht werden soll. Natürlich können auch beliebige andere Werte untersucht werden, nur die beobachtbaren Phänomene werden die Gleichen bleiben.

In Abb. 14 und 15 wird deutlich, wie der Parameter  $f$  das Verhalten des Systems beeinflusst. Bei  $f = 0.9$  liegt ein periodisches Verhalten mit fester, einfacher Periode vor. Bei  $f = 1.075$  findet eine Periodenverdoppelung statt und das Pendel schwingt nun mit zwei, wenn auch nur leicht unterschiedlichen Frequenzen. Eine weitere Periode kommt bei  $f = 1.12$  dazu, um dann bei  $f = 1.2$  ins Chaos zu verfallen. In diesem Fall gibt es keine feste Frequenz und das System ist sehr empfindlich bezüglich den Anfangsbedingungen. Kennt man diese genau, kann man die Entwicklung des Systems genau vorhersagen. Weichen diese jedoch nur leicht ab, kann man nicht vorhersagen, wo sich das Pendel zu einer Zeit in der Zukunft befindet. Wie weit man das System mit abweichenden Anfangsbedingungen vorhersagen kann, hängt von der Größe der Abweichung ab und kann mit der in Kap. 2.4 eingeführten mittleren Vorhersagezeit bestimmt werden. Das chaotische Verhalten des Systems zeichnet sich im Verlauf der Auslenkung durch eine Vielzahl von Frequenzen aus, das an ein Rauschen erinnert. Je weiter  $f$  auf 1.4 zugeht, desto periodischer wird es wieder, bis es bei  $f = 1.4$  wieder nur eine Periode hat. Ab dann finden weitere Periodenverdoppelungen statt, bis sich bei  $f = 1.5$  wieder chaotisches Verhalten

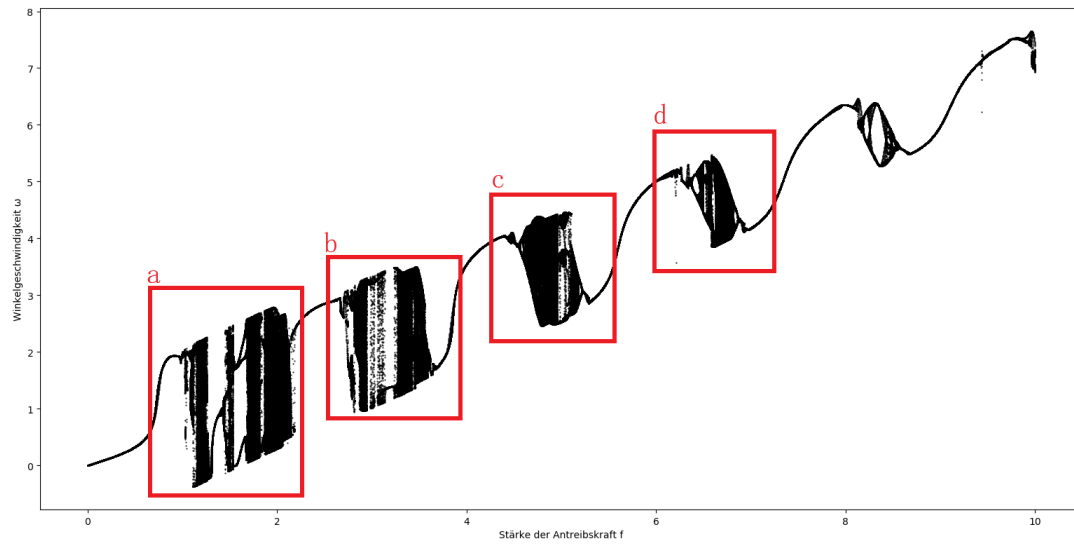
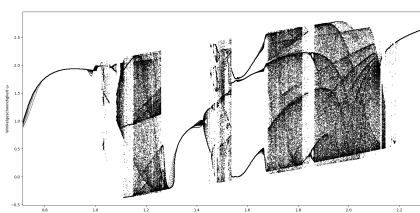
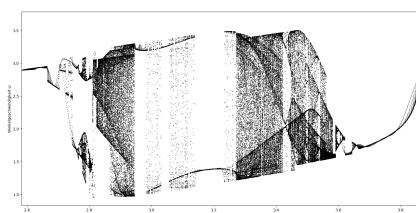


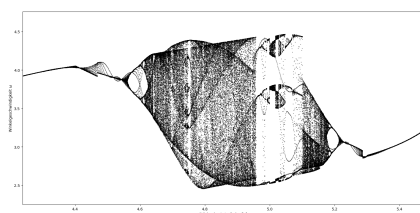
Abbildung 11: Bifurkationsdiagramm des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels für einen Kontrollparameterbereich von  $f = 0$  bis  $f = 10$ . Die roten Bereiche sind in Abb. 12 vergrößert dargestellt



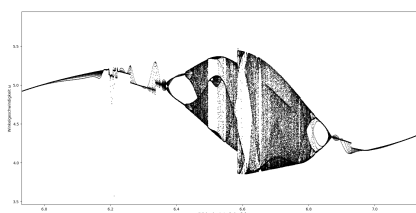
(a)



(b)



(c)



(d)

Abbildung 12: Bifurkationsdiagramme des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels für unterschiedliche Bereiche von  $f$

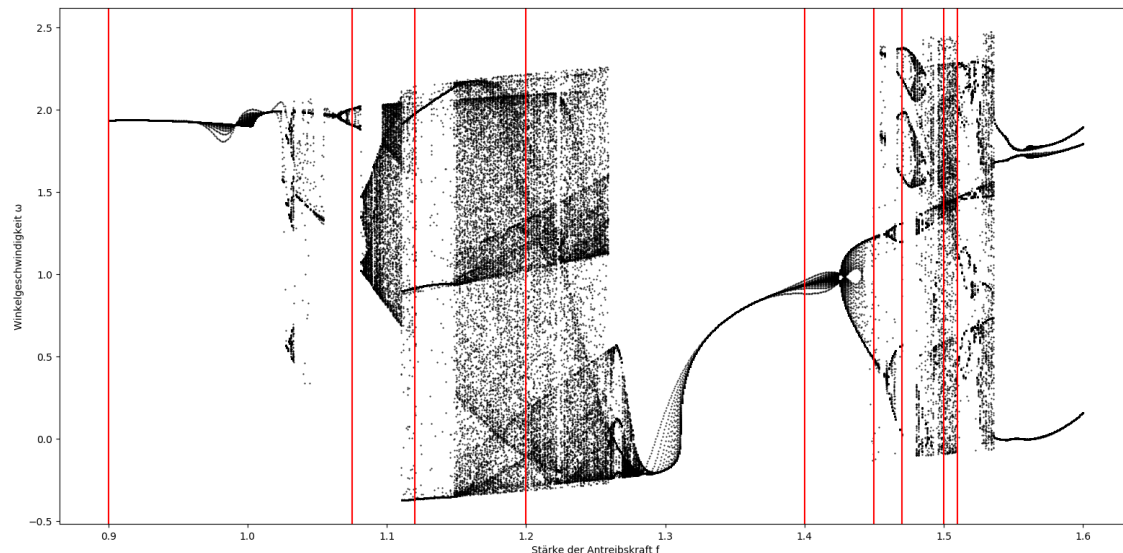


Abbildung 13: Bifurkationsdiagramm des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels. Die roten Linien sind an jenen  $f$ -Werten, an denen Phasenraumportraits und Poincaré-Schnitte gemacht werden

durchsetzt. Der Übergang von Periodizität in Chaos mittels Periodenverdoppelung, wird Bifurkationskaskade (siehe Kap. 2.5) genannt.

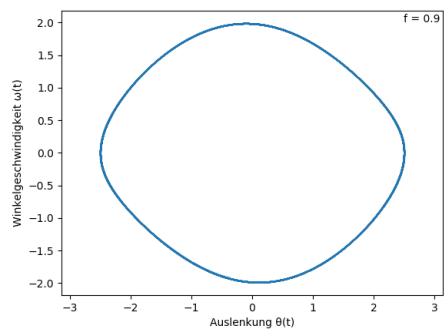
Um zu verdeutlichen, dass sich zu gewissen Werten von  $f$  mehrere Perioden befinden, wurden die Frequenzspektren (Abb. 16) erstellt. Zum Vergleich wurde in jedes Spektrum das Spektrum von  $f = 0.9$  eingefügt. Es ist ersichtlich, dass sich in den chaotischen Bereichen mehrere Frequenzen im Spektrum befinden, wohingegen sich bei  $f = 0.9$  und  $f = 1.4$  nur eine durchsetzt. Bei  $f = 1.45$  gibt es noch einen zweiten Peak, der auf die Periodenverdopplung zurückzuführen ist. Die kleinen Peaks sind auf die anfänglichen Einschwingvorgänge, die in die Fourieranalyse miteingeflossen sind zurückzuführen. Sie tragen jedoch nichts zum Langzeitverhalten des Systems bei.

Betrachtet man die Poincaré-Schnitte der Phasenraumtrajektorien für unterschiedliche Kontrollparameter (Abb. 17), erkennt man, dass sich periodisches Verhalten im Poincaré-Schnitt durch einzelne Punkte auszeichnet, die jedoch immer am gleichen Ort bleiben. Weist das System nun allerdings chaotisches Verhalten auf, so erkennt man einen seltsamen Attraktor mit fraktaler Hausdorffdimension (siehe Kap. 2.4).

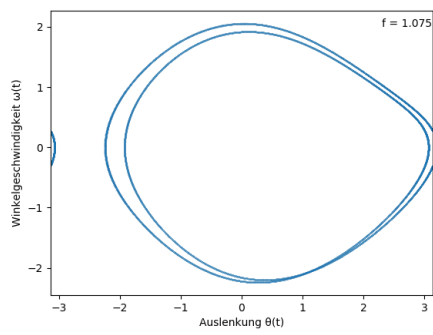
Betrachtet man den Poincaré-Schnitt für  $f = 1.2$  und  $f = 1.5$  genauer, erkennt man auch warum dieses Objekt keine ganzzahlige (also eine fraktale) Dimension hat. Zoomt man in Abb. 18 rein, erkennt man, dass die scheinbar dünne Fläche (also 2-dimensional), tatsächlich eine Anhäufung von mehreren Punkten ist, die bei langer Iteration zu einer Linie werden (also 1-dimensional). Deshalb liegen die Hausdorffdimension und die Boxcounting-Dimension des Schnittes zwischen 1 und 2. Ein mögliche Methode zur numerischen Bestimmung der Boxcounting-Dimension ist das Anlegen eines Rasters über dem Plot des Poincaré-Schnittes.

Um das Chaos in diesem System weiter quantifizieren zu können, bedient man sich weiter an den Konzepten aus Kap. 2.3 und 2.4, nämlich dem Liapunovexponent und der

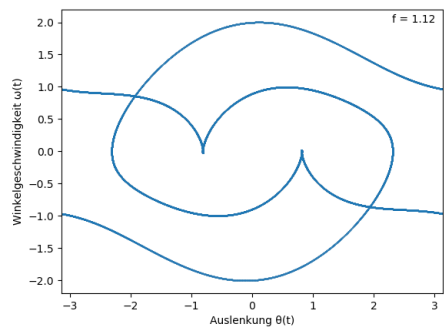




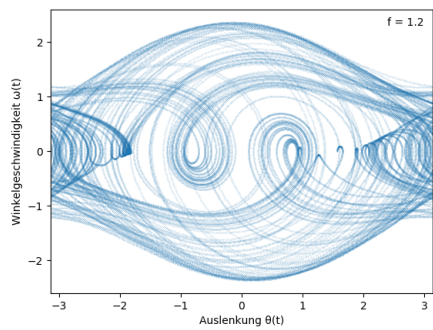
(a)



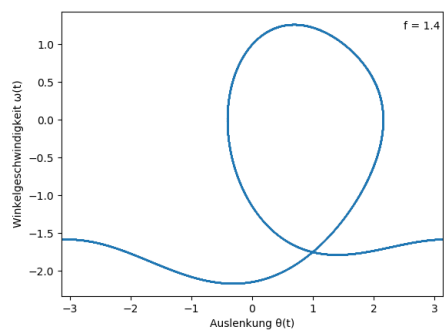
(b)



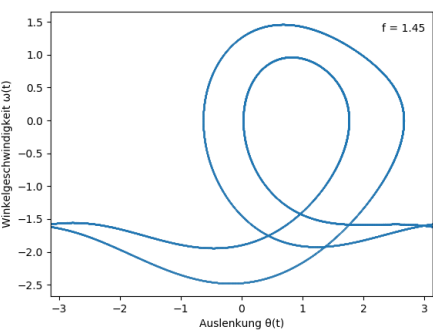
(c)



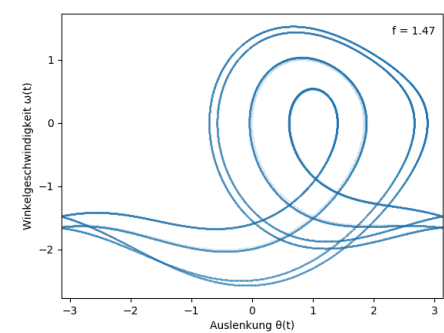
(d)



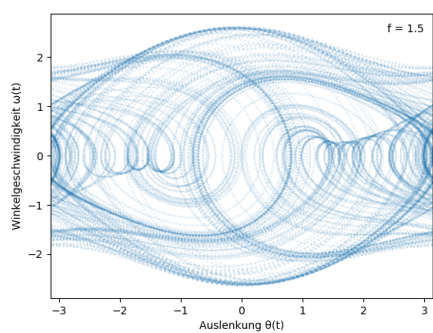
(e)



(f)

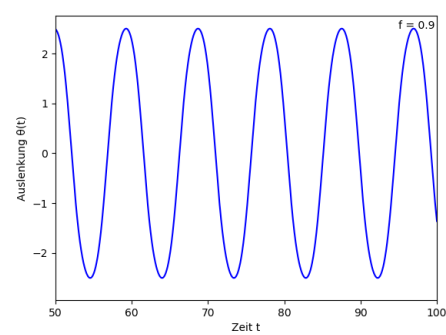


(g)

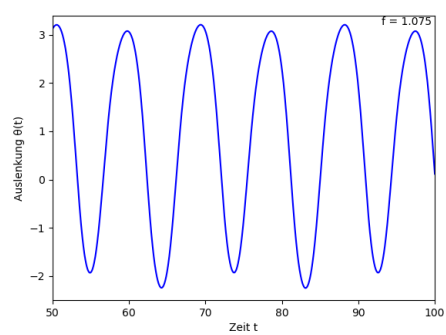


(h)

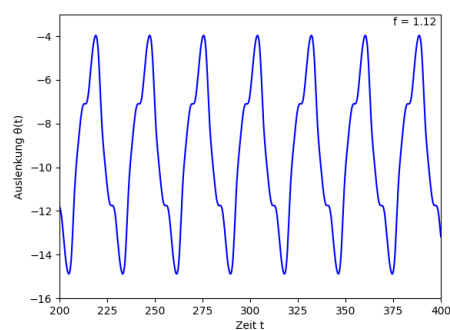
Abbildung 14: Phasenraumportrait des periodisch getriebenen Pendels für unterschiedliche Stärken der Antriebskraft  $f$



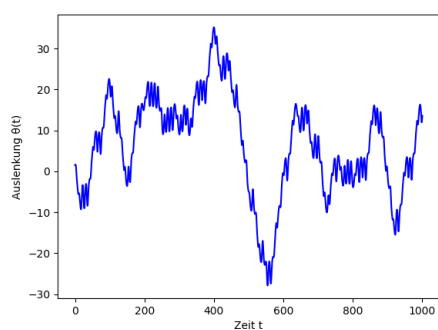
(a)



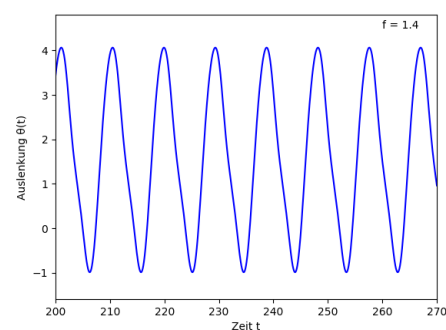
(b)



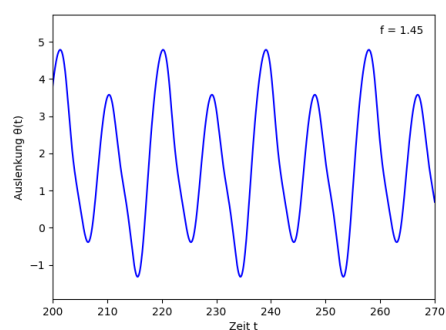
(c)



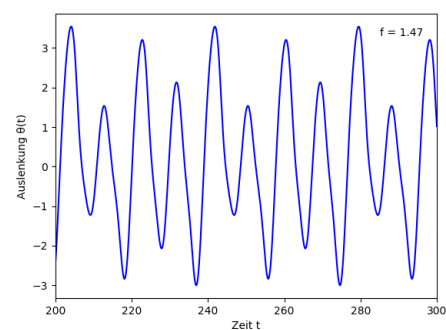
(d)



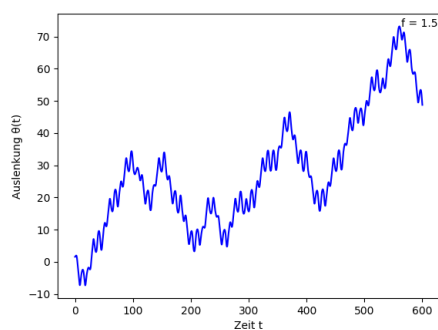
(e)



(f)



(g)



(h)

Abbildung 15: Zeitlicher Verlauf der Auslenkung  $\theta$  des periodisch getriebenen Pendels für unterschiedliche Stärken der Antriebskraft  $f$

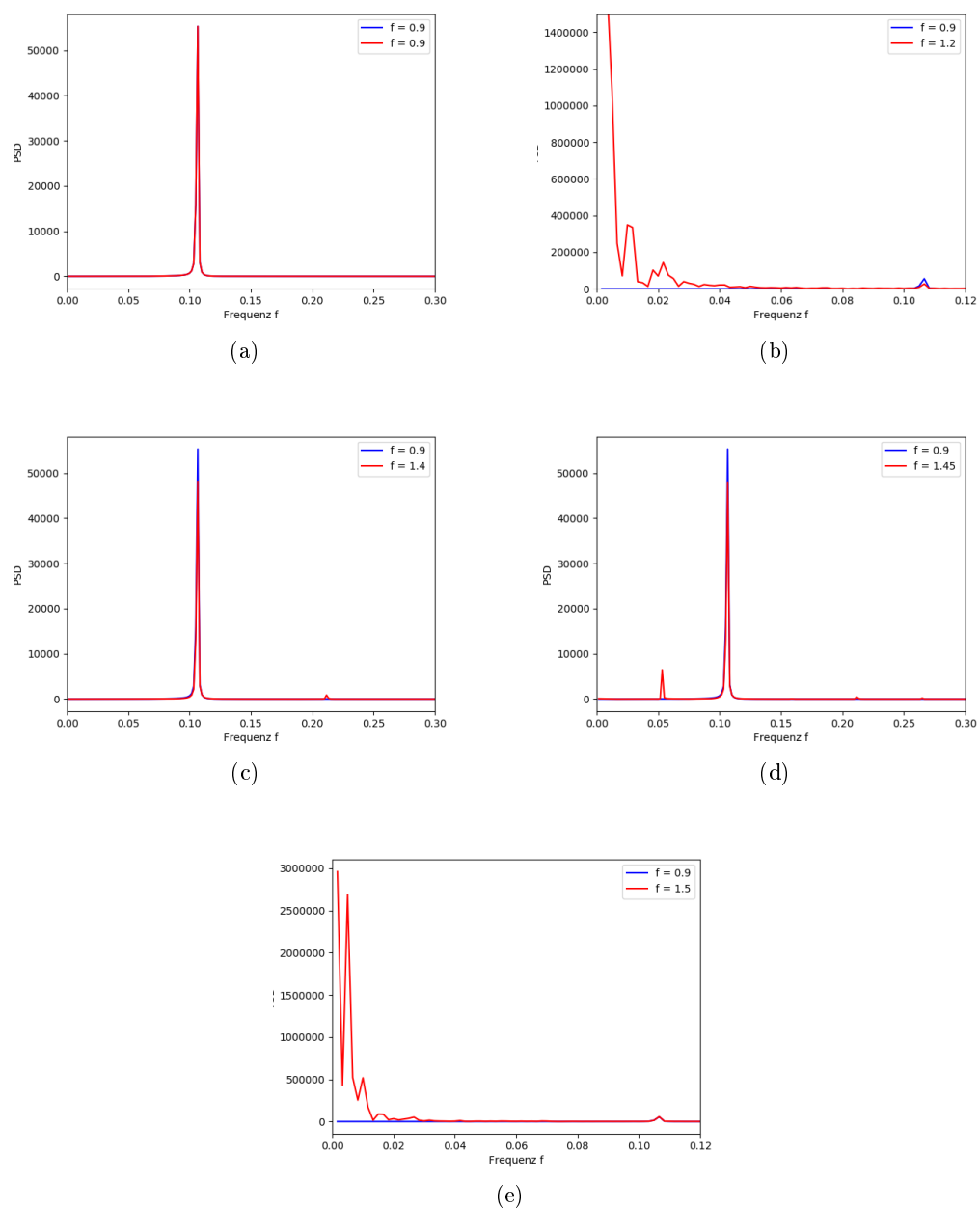


Abbildung 16: Fourieranalyse des Verlaufs der Auslenkung für unterschiedliche Kontrollparameterwerte  $f$

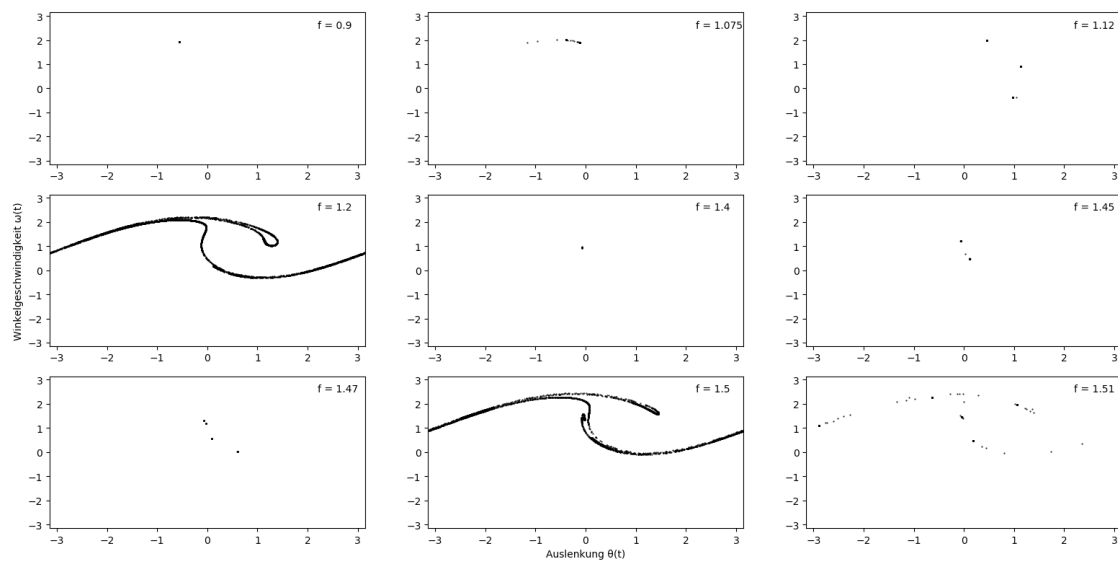


Abbildung 17: Poincaré-Schnitte der Phasenraumtrajektorien bei unterschiedlichen Werten für  $f$

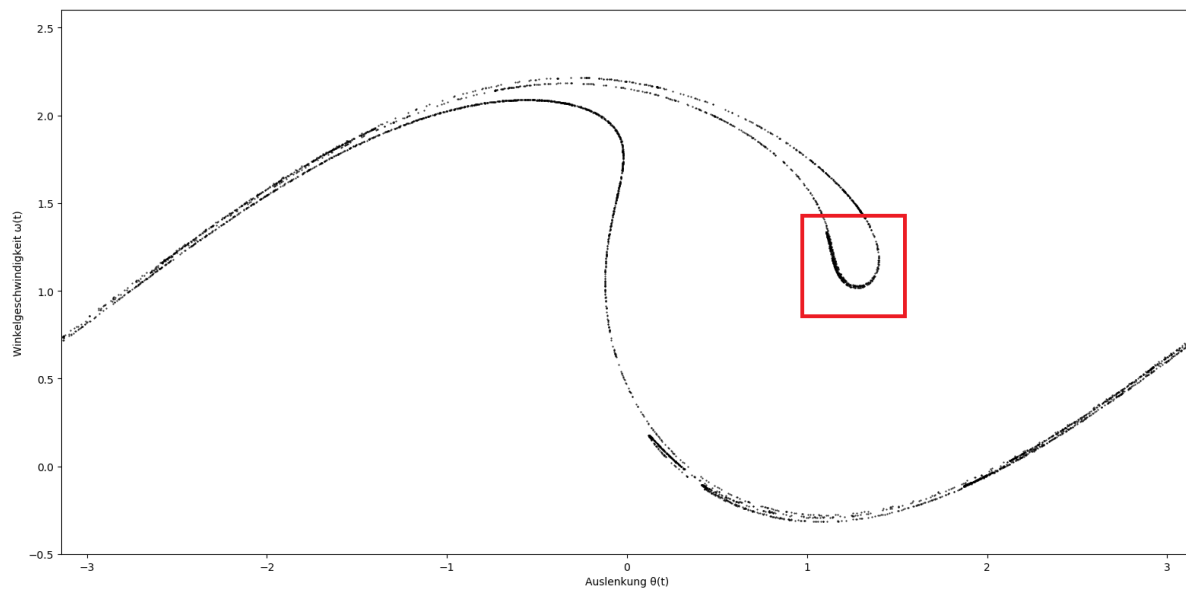
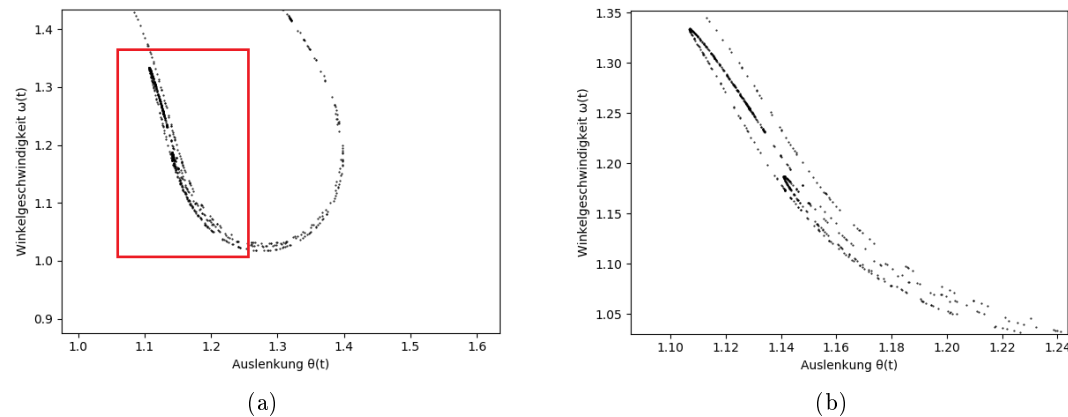


Abbildung 18: Vergrößerter Poincaré-Schnitt für  $f = 1.2$ , in einem Bereich mit chaotischem Verhalten


 Abbildung 19: Zoom in den Poincaré-Schnitt bei  $f = 1.2$ 

Kolmogorov-Entropie. In Abb. 21 wurden die einzelnen Liapunovexponenten, in Abhängigkeit vom Kontrollparameter  $f$  geplottet. Dort wo der Exponent negativ ist, entfernen sich benachbarte Trajektorien im Phasenraum nicht exponentiell voneinander und das System ist periodisch. Dort wo er positiv ist, weist das System deterministisches Chaos auf. Vergleicht man nun Abb. 21 mit Abb. 13, so erkennt man, dass sich dort, wo die Bifurkationskaskaden beginnen, der Liapunovexponent von einem negativen Wert immer mehr der Nulllinie nähert, bis er schließlich positiv wird, was dem mit vielen Punkten ausgefüllten Bereich im Bifurkationsdiagramm entspricht. Es ist noch zu erwähnen, dass es sich hier um ein System mit 3 Liapunovexponenten handelt, da dieses System insgesamt 3 Freiheitsgrade besitzt. Abb. 21 bezieht sich dabei auf den größten ( $\lambda_1$ ).  $\lambda_2 = -0.25$ , da im Falle der maximalen Stabilität die Summe aller  $\lambda$  gleich dem Wert des negativen Reibungsparameters ( $r = -0.5$ ) sein muss.  $\lambda_3 = 0$ , da der dazugehörige Freiheitsgrad  $\phi$  ist. Wenn nun anhand der  $\lambda_i$  der Attraktortyp identifiziert werden soll, betrachtet man wieder Abb. 3. Im Fall von  $\lambda_1 < 0$ , bekommt man (0,-,-) und der Attraktortyp ist ein stabiler Grenzzyklus. Wenn nun allerdings  $\lambda_1 > 0$  wird, bekommt man (+,0,-) und man erhält einen seltsamen Attraktor. [2](S. 500, 501)

Obwohl sich die Kolmogorov-Entropie zwar auch über Glg. (58) berechnen lässt, ist es hier von Vorteil, sie über den Liapunovexponenten zu berechnen, was aufgrund der eindimensionalen Abbildung auch möglich ist. Das Integral in Glg. (59) wird als 1 angenommen. Daraus folgt:

$$K = \sum_i \lambda_i^+(\vec{x}) \quad (79)$$

Nun kann man  $K$  aus der Summe der positiven Liapunovexponenten ermitteln. Da lediglich  $\lambda_1$  in chaotischen Bereichen größer als 0 ist, ist die Kolmogorov-Entropie in unserem Fall

$$K = \begin{cases} \lambda_1 & \text{für } \lambda_1 \geq 0 \\ 0 & \text{für } \lambda_1 < 0 \end{cases} \quad (80)$$

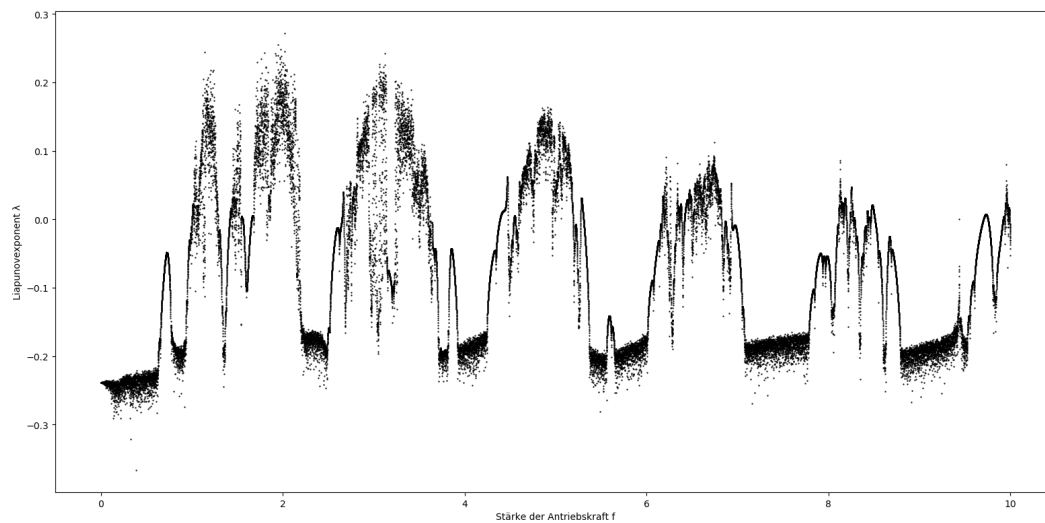


Abbildung 20: Liapunovexponent in Abhängigkeit des Kontrollparameters  $f$

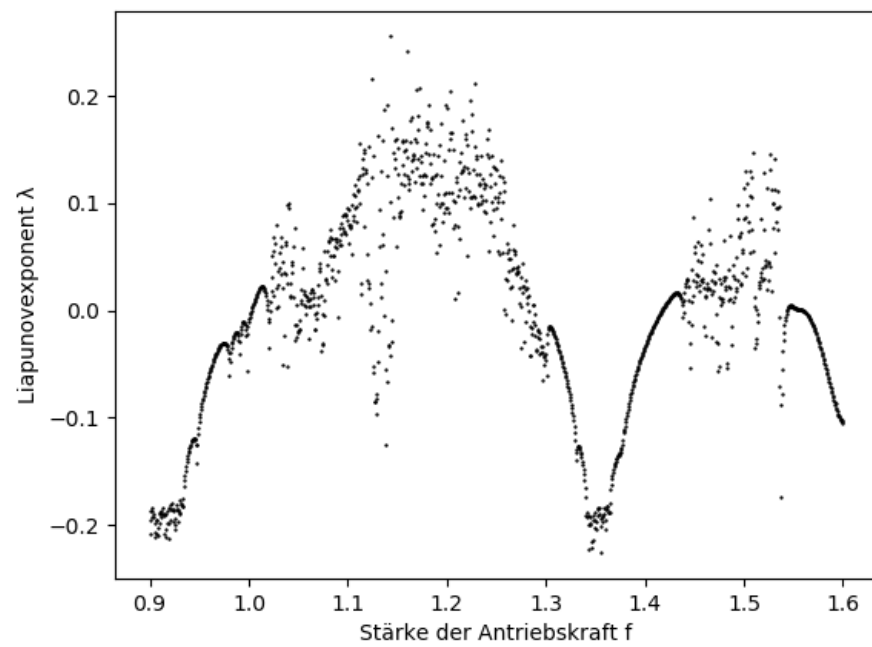


Abbildung 21: Liapunovexponent in Abhängigkeit des Kontrollparameters im Parameterbereich von  $f = 0.9$  bis  $f = 1.6$

Dies ergibt auch Sinn, wenn man über die Aussage der Kolmogorov-Entropie nachdenkt. Eine positive Kolmogorov-Entropie ist gleichzusetzen mit dem Verlust an Information mit voranschreitender Zeit. Sie ist daher eine positive Konstante für den Fall, dass das System deterministisches Chaos aufweist und 0 sonst.

Mithilfe von  $K$  können nun auch Rückschlüsse auf die mittlere Vorhersagezeit  $T_m$  getroffen werden.

$$T_m \propto \frac{1}{K} \log\left(\frac{1}{l}\right) \quad (81)$$

Ohne genau zu definieren wie groß  $l$  ist, ist es erkennbar, dass überall dort wo  $\lambda_1$  negativ ist, also dort wo  $K = 0$  ist,  $T_m$  unendlich wird und der Verlauf des Systems in alle Zeit vorhersagen werden kann, was auch einleuchtet, da dort wieder kein chaotisches Verhalten auftritt. In den Bereichen, wo  $K_m > 0$  ist, hängt die mittlere Vorhersagezeit von der Genauigkeit ab, mit der man die Anfangsbedingungen bestimmen kann. Doch selbst wenn man die Anfangsbedingungen auf ein  $\epsilon \ll 1$  bestimmen kann, wird die mittlere Vorhersagezeit nicht dementsprechend groß, da die Genauigkeit lediglich mit dem Logarithmus in die Gleichung eingeht.

Phänomene, bei denen es von Bedeutung ist, mit Nichtlinearität und chaotischem Verhalten von Systemen umgehen zu können, gibt es in der Natur zu Genüge. Jedoch ist es auch immer eine Frage des Nutzens, da man viele Systeme mit Tricks wie der Kleinwinkelnäherung linearisieren kann und die Ergebnisse ausreichend sind.

Ein gutes Beispiel für einen weiteren solchen Trick findet sich bei der Berechnung von Planetenbahnen. Das Keplerproblem, bei dem sich zwei Körper in ihrem gegenseitigen Schwerfeld befinden, ist exakt lösbar. Diese Lösung enthält dann die Information über die Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Körper, zu jeder Zeit. Bezogen auf das System Erde-Sonne, bedeutet das, dass wir die Erdumlaufbahn exakt berechnen können. Nun ist das Sonnensystem allerdings kein Zweikörperproblem, sondern wegen allen anderen Planeten und Objekten im Sonnensystem ein Vielkörperproblem, welches wiederum nicht exakt lösbar ist. Dieses System weist ebenfalls deterministisches Chaos auf, was bedeutet, dass wir nicht exakt vorhersagen können, wo sich die Planeten in einer Zeit beliebig weit in der Zukunft befinden werden. Jedoch müssen wir das auch nicht zwangsweise, es ist von der Fragestellung abhängig. Eine Fragestellung bei der es sich lohnt sich mit chaotischem Verhalten zu beschäftigen, ist das Herzkammerflimmern.

Es stellt sich nämlich heraus, dass die scheinbar willkürliche Kontraktion des Herzens beim Herzkammerflimmern aufgrund von deterministisch chaotischen elektrischen Impulsen entsteht. Der Übergang von einem periodischen Herzschlag zu einem Chaotischen läuft ebenfalls über Bifurkationskaskaden. Die Kenntnis über dieses Verhalten rettet somit Leben, da es so möglich ist, mit gezielten elektrischen Impulsen den Herzschlag wieder zu stabilisieren. [4](chaos and the transition to ventricular fibrillation)

## 4 Zusammenfassung

Nach anfänglichen Erklärungen des Grundvokabulars der nichtlinearen Mechanik wurden im Laufe der Arbeit Methoden hergeleitet, um dissipative, chaotische Systeme zu charakterisieren und ihnen quantitative Kennwerte zuzuweisen. Konkret wurde in diesem Zuge zuerst ein Ausdruck für die Phasenraumkontraktion zur Bestimmung der Dissipation des Systems hergeleitet. Danach wurde die Stabilität von sowohl zeitunabhängigen als auch zeitabhängigen Fixpunkten betrachtet, wobei man eine parameterabhängige Charakterisierungsmethode solcher Fixpunkte gefunden hat. Da ein dynamisches System mit mehreren Freiheitsgraden jedoch nicht ausschließlich auf Fixpunkte hinsteuert, vor allem nicht, wenn es sich chaotisch verhält, hat man mit dem Liapunovexponenten ein Maß für die Sensibilität des Systems auf Änderungen der Anfangsbedingungen hergeleitet, was es einen tieferen Einblick in das Verhalten des chaotischen Systems ermöglicht. Mit dem Einführen der Konzepte des seltsamen Attraktors, sowie der Kolmogorov-Entropie, ist es gelungen, ein Arsenal an verschiedenen Methoden aufzustellen, das es erlaubt mittels numerischen Methoden chaotische, dissipative Systeme zu analysieren. Diese Konzepte sind in den zwei anschließenden Beispielen nochmals verinnerlicht und veranschaulicht worden.



## 5 Bibliographie und Abbildungsverzeichnis

### Abbildungsverzeichnis

1	Phasenraum mit Trajektorien für das ebene Pendel . . . . .	7
2	Stabilitätstypen eines zweidimensionalen Fixpunktes. a) Stabiler Knoten, b) Instabiler Knoten, c) Sattel, d) Stabiler Strudel, e) Instabiler Strudel, f) Wirbel . . . . .	12
3	Mögliche Attraktortypen für ein System mit drei Freiheitsgraden . . . . .	19
4	Fadenpendel . . . . .	24
5	Phasenraumportrait (a) und zeitlicher Verlauf der Auslenkung $\theta$ (b) des ungedämpften nichtlinearen Pendels . . . . .	25
6	Vergleich des Phasenraumportraits (a) und des Verlaufs der Auslenkung $\theta$ (b) zwischen linearen und nichtlinearen Fall . . . . .	26
7	Fourieranalyse des Verlaufs der Auslenkung für die Startbedingungen $\theta_0 = 90^\circ$ und $\theta_0 = 45^\circ$ . (a) Frequenzspektrum für das nichtlineare System, (b) Frequenzspektrum für das lineare System, (c) Periodendauer für das nichtlineare System $T_{90} = 7.50$ , $T_{45} = 6.52$ , (d) Periodendauer für das lineare System $T_{90} = T_{45} = 6.38$ . . . . .	26
8	Vergleich des Phasenraumportraits zwischen linearen und nichtlinearen Fall für Ursprungsauslenkungen von $\pi/2$ und $\pi/4$ . . . . .	27
9	Phasenraumportraits des gedämpften nichtlinearen Pendel für $r = 0.1$ (a) und $r = 0.5$ (b) . . . . .	28
10	Auslenkung $\theta$ des gedämpften nichtlinearen Pendel für $r = 0.1$ (a) und $r = 0.5$ (b) . . . . .	28
11	Bifurkationsdiagramm des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels für einen Kontrollparameterbereich von $f = 0$ bis $f = 10$ . Die roten Bereiche sind in Abb. 12 vergrößert dargestellt . . . . .	31
12	Bifurkationsdiagramme des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels für unterschiedliche Bereiche von $f$ . . . . .	31
13	Bifurkationsdiagramm des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels. Die roten Linien sind an jenen $f$ -Werten, an denen Phasenraumportraits und Poincaré-Schnitte gemacht werden . . . . .	32
14	Phasenraumportrait des periodisch getriebenen Pendels für unterschiedliche Stärken der Antriebskraft $f$ . . . . .	33
15	Zeitlicher Verlauf der Auslenkung $\theta$ des periodisch getriebenen Pendels für unterschiedliche Stärken der Antriebskraft $f$ . . . . .	34
16	Fourieranalyse des Verlaufs der Auslenkung für unterschiedliche Kontrollparameterwerte $f$ . . . . .	35
17	Poincaré-Schnitte der Phasenraumtrajektorien bei unterschiedlichen Werten für $f$ . . . . .	36
18	Vergrößerter Poincaré-Schnitt für $f = 1.2$ , in einem Bereich mit chaotischem Verhalten . . . . .	36
19	Zoom in den Poincaré-Schnitt bei $f = 1.2$ . . . . .	37
20	Liapunovexponent in Abhängigkeit des Kontrollparameters $f$ . . . . .	38
21	Liapunovexponent in Abhängigkeit des Kontrollparameters im Parameterbereich von $f = 0.9$ bis $f = 1.6$ . . . . .	38

---

## Literatur

- [1] H. G. SCHUSTER. *Deterministisches Chaos: eine Einführung*. VCH, 1994.
- [2] W. GREINER. *Klassische Mechanik II*, Band 8. Harri Deutsch, 2008.
- [3] H. S. K. PAWELZIK. *Generalized dimensions and entropies from a measured time series*. American Physical Society **35** (1987).  
doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.35.481>
- [4] H. S. K. Z. Q. P.-S. C. JAMES N. WEISS, ALAN GARFINKEL. *Chaos and the Transition to Ventricular Fibrillation, A New Approach to Antiarrhythmic Drug Evaluation*. American Heart Association (1999).