

---

Bachelorarbeit  
Institut für Theoretische Physik  
Computational Physics

Chaos in dissipativen mechanischen Systemen

Advisor:  
Univ.-Prof. Dr.rer.nat. Enrico Arrigoni

Jürgen Paust

Mat.Nr. 11702947

Sommersemester 2021

---

## Abstract

Die folgende Bachelorarbeit beschäftigt sich mit dem Gebiet der nichtlinearen Mechanik und taucht im Zuge dessen genauer in die Welt der dissipativen, chaotischen Systeme ein. Nach einer anfänglichen Übersicht über die wichtigsten Fachbegriffe behandelt die erste Hälfte der Arbeit Konzepte und Methoden der Mechanik, mit denen auf theoretischer Basis der Grundstock für die Untersuchung chaotischer Systeme gelegt wird. In der zweiten Hälfte werden mit den nun eingeführten Konzepten Beispiele aus der nichtlinearen Mechanik behandelt. Konkret werden zwei oszillierende Systeme mit unterschiedlichen Verfahren beschrieben, um im Zuge dessen dem chaotischen Verhalten in diesen dissipativen, nichtlinearen Systemen quantitative Größen anzuhängen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Chaos</b>	<b>5</b>
2.1	Grundlegendes über Chaos . . . . .	5
2.2	Über den Phasenraum und dynamische Systeme . . . . .	6
2.3	Stabilität und Liapunovexponent . . . . .	9
2.3.1	Stabilität . . . . .	9
2.3.2	Liapunovexponent . . . . .	16
2.4	Seltsame Attraktoren und Kolmogorov-Entropie . . . . .	20
2.4.1	Seltsame Attraktoren . . . . .	20
2.4.2	Kolmogorov-Entropie . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Beispiele zu chaotischer Mechanik</b>	<b>24</b>
3.1	Einfaches Fadenpendel . . . . .	24
3.2	Periodisch getriebenes Pendel . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>Bibliographie und Abbildungsverzeichnis</b>	<b>43</b>

## 1 Einleitung

Im echten Leben versteht man unter dem Begriff 'Chaos' gerne etwas, das keinen Regelmäßigkeiten gehorcht, etwas, aus dem man nicht schlau wird und etwas, das man 'vertreiben' muss, um ein Muster oder einen Sinn zu erkennen. Der Wunsch, eine Regelmäßigkeit bzw. Gesetzmäßigkeiten in Chaos zu finden erscheint dementsprechend widersprüchlich, ist doch Chaos etwas, das grundsätzlich keinen solchen Prinzipien unterliegt. Oder? Ganz so ist es zum Glück nicht. Der Begriff Chaos alleine existiert in der Physik so nicht, sondern wird ersetzt durch 'deterministisches Chaos'. Deterministisch bedeutet in diesem Zusammenhang, dass wenn alle Anfangsbedingungen des Systems genau bekannt sind, das System exakt vorhergesagt werden kann. Da wir in der realen Welt jedoch an Messungenauigkeiten gebunden sind, ist es unmöglich, die exakten Anfangsbedingungen zu kennen. Deterministisches Chaos reagiert sehr sensibel auf diese Ungenauigkeiten, was bedeutet, dass man nicht bis in alle Ewigkeit vorhersagen kann, wie sich dieses System verhalten wird. Nun muss dies nicht unbedingt ein Problem darstellen, da man vielleicht gar nicht daran interessiert ist, wie das System in der Ewigkeit aussieht. Aus diesem Grund ist es Gang und Gäbe, bei vielerlei Berechnungen Idealisierungen zu treffen, damit das System kein chaotisches Verhalten an den Tag legen kann. Eine Gruppe von Systemen, die nicht chaotisch sind, sind Systeme, die man analytisch lösen kann, das heißt mit Stift und Papier. Eine viel größere Gruppe von Systemen ist jedoch nicht analytisch lösbar. Diese muss man entweder so vereinfachen, dass sie zwar alle wichtigen Ergebnisse im Kern umfassen, jedoch gleichzeitig wieder analytisch lösbar sind, oder man behandelt sie numerisch. Die numerische Behandlung von nicht analytisch lösbaren Systemen ist dank den Computern nun wesentlich zugänglicher, also noch vor 100 Jahren. Dementsprechend jung ist die Chaosforschung, die stark auf numerische Methoden angewiesen ist. Nichtlineare Systeme sind genau solche Systeme, die man in der Regel nicht analytisch lösen kann und die unter bestimmten Voraussetzungen chaotisches Verhalten an den Tag legen können. Diese nichtlinearen, chaotischen Systeme können nochmals unterteilt werden in konservative und dissipative Systeme. Bei dissipativen Systemen bleibt, grob gesagt, die Gesamtenergie im System nicht erhalten, sondern wird zum Beispiel über Reibung in Wärme umgewandelt und verlässt das System. Mit eben diesen nichtlinearen, chaotischen, dissipativen Systemen wollen wir uns im Folgenden beschäftigen. Dafür benötigt man ein Vorwissen über lineare Algebra, klassische Mechanik, Differentialgleichungen und die numerischen Methoden zur Behandlung von Differentialgleichungen. Das Wissen in Kapitel 2 ist von den Büchern *Klassische Mechanik II* von Walter Greiner und *Deterministisches Chaos: Eine Einführung* von Heinz Georg Schuster. Die numerischen Berechnungen mit dazugehörigen Plots (siehe Kap. Beispiele zur chaotischen Mechanik), wurden allesamt von mir in Python erzeugt.

## 2 Chaos

Bevor wir uns in wilde Konzepte und komplizierte Definitionen stürzen, sollte zuerst der vage Begriff des Chaos erklärt werden. Es ist zunächst wichtig zu wissen, dass hier rein nur die Rede vom deterministischen Chaos ist. Deterministisches Chaos und chaotische Bewegungen zeichnen sich durch vielerlei Eigenschaften aus. Unter anderem dadurch, dass:

- Das zeitliche Signal der Bewegung des untersuchten Objektes chaotisch aussieht
- Ein breitbandiges Rauschen im Leistungsspektrum vorhanden ist
- Es in der Poincaréabbildung (siehe Kap. 2.1) viele Punkte gibt, die den Raum nach und nach ausfüllen

Der Begriff deterministisch steht in diesem Zusammenhang dafür, dass die Vorhersage über den Zustand des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt in der Zukunft zwar möglich ist, aber auch nur dann, wenn man die Anfangsbedingungen des Systems genau kennt. Chaos steht in diesem Zusammenhang dafür, dass man den zukünftigen Zustand des Systems zwar vollständig bestimmen kann, doch wenn man die Anfangsbedingungen des Systems nur geringfügig ändert, sieht der zeitliche Verlauf gänzlich anders aus. [1] (S. 14)

### 2.1 Grundlegendes über Chaos

Nun haben wir oben bereits einige Begriffe gehört, die mit Chaos zu tun haben. Diese und noch weitere grundlegende Begriffe und Konzepte sollen hier erklärt werden.

Nichtlineares System: Ein nichtlineares System, ist ein System bei dem in der ihm beschreibenden Differentialgleichung ein nichtlinearer Term auftritt. Ein simples Beispiel einer nichtlinearen DGL ist:

$$\dot{x} - A * \cos(x) = 0 \quad (1)$$

Dissipatives System: Im Gegensatz zu konservativen Systemen zeichnen sich dissipative Systeme dadurch aus, dass der dynamische Fluss nicht volumenerhaltend ist. In solchen Systemen schrumpft das Phasenraumvolumen mit der Zeit. Systeme mit Reibungstermen gehören dieser Gruppe an. Mehr dazu in Kap. 2.2.

Poincaré-Schnitt: Eine Methode zur Diskretisierung von Trajektorien im **N-dimensionalen Phasenraum**, wobei N die Summe der generalisierten Koordinaten und Impulse ist die **nötig sind, um das System im Hamiltonformalismus zu beschreiben**. Es wird ein Übergang von einer kontinuierlichen Bahn auf eine diskrete Punktfolge geschaffen, die auf einer geometrischen Eigenschaft der Trajektorie beruht, nämlich dem Durchstoßen einer (N-1)-dimensionalen Hyperebene. Ein Punkt im Poincaré-Schnitt wird dort eingezeichnet, wo die Trajektorie die Hyperebene schneidet. **Bei einem vierdimensionalen Phasenraum**

(wenn das System je zwei generalisierte Koordinaten und Impulse hat) kann z.B. die  $q_1 - q_2 - p_1$ -Hyperebene geschnitten werden. Dadurch wird die Dimension des Phasenraumes von 4 auf 3 reduziert. Dies gilt natürlich für beliebige  $N$ .

Poincaré-Abbildung: Um nun genauere Aussagen über das System zu treffen, reicht der Poincaré-Schnitt nicht. Man verwendet eine Abbildung:

$$f : \vec{x}_n \rightarrow \vec{x}_{n+1} \quad (2)$$

wobei  $x_n$  und  $x_{n+1}$  auf der  $N-1$ -dimensionalen Hyperebene liegen. Es werden also alle Punkte der Folge mit ihren Nachbarn verknüpft. Es handelt sich hierbei um eine Abbildung  $f$ , die die einzelnen Punkte des Poincaré-Schnitts mittels wiederholter Iteration der Poincaré-Abbildung erzeugt.

$$\vec{x}_1 = f(\vec{x}_0), \quad \vec{x}_2 = f(\vec{x}_1) = f^2(\vec{x}_0), \quad \vec{x}_n = f^n(\vec{x}_0) \quad (3)$$

Mittels Eigenschaften der iterierten Poincaré-Abbildung  $f^N$  für  $N \rightarrow \infty$  lassen sich Aussagen über das Langzeitverhalten der Trajektorie treffen. [2](S. 424, 447, 448)

## 2.2 Über den Phasenraum und dynamische Systeme

Im Hamiltonformalismus werden für ein mechanisches System mit  $f$  Freiheitsgraden,  $f$  generalisierte Koordinaten  $q_1, \dots, q_i$  und  $f$  generalisierte Impulse  $p_1, \dots, p_i$  benötigt, um den Bewegungszustand des Systems zum Zeitpunkt  $t$  genau zu bestimmen. Die Koordinaten  $q_i$  und die Impulse  $p_i$  lassen sich als Koordinaten des Phasenraumes verwenden, welcher  $2f$ -dimensional ist. Hierbei entspricht der Konfigurationsraum dem  $f$ -dimensionalen Unterraum der Koordinaten  $q_i$  und der Impulsraum dem  $f$ -dimensionalen Unterraum der Impulse  $p_i$ .

Eine Phasenbahn (auch Trajektorie genannt) im Phasenraum ist der zeitliche Verlauf des repräsentativen Punktes  $(q_i, p_i)$ . Ist die Hamilton-Funktion bekannt, lässt sich somit also die gesamte Phasenbahn aus nur einem Punkt berechnen. Des Weiteren gehört zu jedem Punkt im Phasenraum genau eine Phasenbahn und zwei Bahnen können sich nicht schneiden. Als Konsequenz der Eindeutigkeit der Hamilton-Gleichung ergibt sich, dass unterschiedliche Anfangsbedingungen auch unterschiedliche Phasenbahnen haben. Physikalisch bedeutet das, dass wenn ein Punkt im Phasenraum zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt ist, auch die Vergangenheit und Zukunft des Systems durch Integration determinierbar ist. Handelt es sich beim beschriebenen System um ein konservatives System, so ist der Punkt auf seiner Phasenbahn durch die Bedingung  $E = \text{const} = H(q, p)$  auf eine  $(2f - 1)$ -dimensionale Hyperfläche beschränkt. [2] (S.325)

Für ein System mit  $f = 1$  (siehe Kap. 3.1) wird der Phasenraum zur Phasenebene mit der Auslenkung und der Geschwindigkeit als Komponenten. Siehe Abb. 1 bzw. 5a

Befinden sich nun mehrere unabhängige Punkte im Phasenraum, die alle unterschiedliche Startbedingungen besitzen, so liegen diese zum Zeitpunkt  $t_0$  in einem Gebiet  $G_0$ . Zum

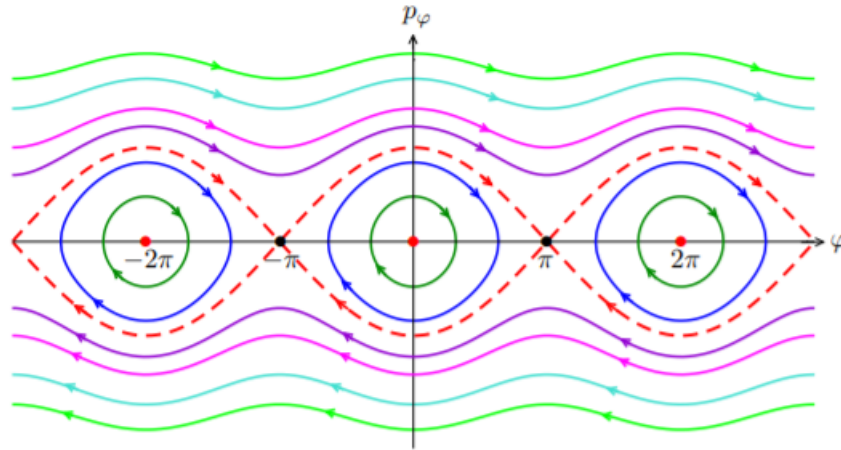


Abbildung 1: Phasenraum mit Trajektorien für das ebene Pendel

Zeitpunkt  $t_1$  befinden sich alle Punkte in einem Gebiet  $G_1$ , welches, wie auch  $G_0$  2f-dimensional ist und ein Phasenraumvolumen von

$$\Delta V = \Delta q_1 * \dots * \Delta q_f * \Delta p_1 * \dots * \Delta p_f$$

aufspannen.

Wenn sich die Punkte der Begrenzung dieses Phasenraumvolumens  $\Delta V$ , gemäß den kanonischen Gleichungen bewegen, so sagt der Satz von Liouville, dass dieses Volumen mit Ablauf der Bewegung gleich bleibt. Man beachte dabei, dass dies bei dissipativen Systemen nicht gilt. Wie bereits erwähnt, verringert sich in diesem Fall das Phasenraumvolumen mit der Zeit, der dynamische Fluss des Systems ist also nicht volumenerhaltend. [2] (S. 325 - 327)

Grundlegend beschäftigen wir uns also mit Systemen, die durch Differentialgleichungen folgender Art beschrieben werden können:

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t), t; \lambda) \quad (4)$$

hierbei ist  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$  ein Spaltenvektor aus endlich vielen dynamischen Variablen, die das System beschreiben,  $\vec{F}$  ist eine meist nichtlineare Funktion von  $\vec{x}$ , welche auch explizit von der Zeit  $t$ , als auch von einem Kontrollparameter  $\lambda$  abhängen kann.

Glg.(4) beinhaltet auch die Hamiltonschen Gleichungen als Spezialfall.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (5)$$

Wenn man den Vektor  $\vec{x}$  als 2f-dimensionalen Vektor, mit den generalisierten Koordinaten und Impulsen definiert,  $\vec{x} = (q_1, \dots, p_f; p_1, \dots, p_f)^T$ , lässt sich Glg.(4) zu einer

Matrixgleichung umschreiben wobei die  $p_i$  die kanonischen Impulse sind.

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \mathbf{J}\vec{\nabla}_{\vec{x}}H \quad (6)$$

Wobei  $\vec{\nabla}_{\vec{x}}H$  der Gradient der Hamiltonfunktion

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}}H = \left( \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^T \quad (7)$$

und  $\mathbf{J}$  eine  $2f \times 2f$ -Matrix ist, die für die Vertauschung der Komponenten und für die Vorzeichen da ist.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & +\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

mit  $\mathbf{I}$  als  $N \times N$  Einheitsmatrix.

Die Lösungen für die Glg.(4) können sehr unterschiedlich ausfallen. Auch dissipative Systeme können damit beschrieben werden. Es ist allerdings nicht ausreichend, einzelne Trajektorien zu untersuchen, sondern viel mehr muss die Gesamtheit aller Trajektorien im Phasenraum angeschaut werden, um das System besser zu verstehen.

Da sich in dissipativen System das  $2f$ -dimensionale Phasenraumvolumen mit der Zeit immer weiter verkleinert, ist es praktisch, sich ein Maß für diese Verkleinerung herzuleiten, was auch der Bewegungsgleichung (4) genügt.

Man betrachtet zunächst das Volumenelement  $\Delta V(\vec{x})$ , das sich zur Zeit  $t = t_0$  am Ort  $\vec{x} = \vec{x}_0$  aufhält. Das besagte Volumen ist nicht anderes als:

$$\Delta V(\vec{x}) = \prod_{i=1}^N \Delta x_i(\vec{x}) \quad (9)$$

was so viel wie das Produkt aller Seitenlängen ist.

Die Zeitableitung dieses Volumenelements wird anschließend unter Beachtung der Kettenregel berechnet.

$$\frac{d}{dt}\Delta V(\vec{x}) = \prod_{j=1}^N \Delta x_j(\vec{x}) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Delta x_i(\vec{x})} * \frac{d\Delta x_i(\vec{x})}{dt} \quad (10)$$



Teilen durch Glg.(9) gibt

$$\frac{1}{\Delta V(\vec{x})} * \frac{d}{dt} \Delta V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Delta x_i(\vec{x})} * \frac{d\Delta x_i(\vec{x})}{dt} \quad (11)$$

Die Zeitableitung zweier Ecken des Hyperwürfels in i-Richtung ist entsprechend Glg. (4) bei den Trajektorien  $\vec{x}_0(t_0) = \vec{x}_0$  und  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 + \vec{e}_i \Delta x_i$  demnach

$$\left. \frac{d\Delta x_i}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{d}{dt} (x_i(t) - x_{0i}(t)) \right|_{t_0} = F_i(\vec{x}_0 + \vec{e}_i \Delta x_i, t; \lambda) - F_i(\vec{x}_0, t; \lambda) \quad (12)$$

Dieser Ausdruck ergibt für kleine  $\Delta x_i$  in der Taylorentwicklung von  $\vec{F}(\vec{x})$

$$\left. \frac{d\Delta x_i}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right|_{x_0} \Delta x_i \quad (13)$$

Glg. (11) an den Stellen  $t_0 = t$  und  $\vec{x}_0 = \vec{x}$  ergibt unter Verwendung von Glg. (13)

$$\Lambda(\vec{x}) := \frac{1}{\Delta V(\vec{x})} * \frac{d}{dt} \Delta V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \vec{\nabla} * \vec{F} \quad (14)$$

Dieses Ergebnis besagt, dass die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{F}$  die zeitliche Änderung  $\Lambda$  des Phasenraumvolumens vorgibt. In diesem Ergebnis ist ebenfalls der Satz von Liouville enthalten, da die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes eines Hamiltonschen Systems **verschwindet**. Das System ist dann konservativ.

Somit haben wir eine quantitative Bedingung **um** dissipative Systeme **zu charakterisieren**, nämlich  $\Lambda = \vec{\nabla} * \vec{F} < 0$ , welche zunächst jedoch nur für einen Punkt  $\vec{x}$  im Phasenraum stimmt. Um über das gesamte Verhalten der Trajektorien Aussagen treffen zu können, muss  $\Lambda(\vec{x})$  über eine Trajektorie  $\vec{x}(t)$  gemittelt werden.

Wie die Trajektorien im Phasenraum zusammen oder auseinanderlaufen ist somit noch nicht geklärt. Zum einen können sie, im einfachsten Fall, in einem gemeinsamen Punkt zusammenlaufen (Gleichgewichtspunkt), zum anderen können sie aber in der einen Richtung zusammenlaufen, in der anderen jedoch auseinanderlaufen. [2] (S. 422 - 426)

## 2.3 Stabilität und Liapunovexponent

### 2.3.1 Stabilität

**Stabilität von Fixpunkten:** Um die Diskussion über Stabilität zu eröffnen, beginnen wir mit dem einfachsten Fall, nämlich mit der Gleichgewichtslösung eines dynamischen

Systems. Das System soll unabhängig von der Zeit sein und in  $\vec{x}_0$  soll gelten:

$$\vec{F}(\vec{x}_0) = 0 \rightarrow \vec{x}(t) = \vec{x}_0 = \text{const.} \quad (15)$$

Dieses  $\vec{x}_0$  ist der Fixpunkt, auch kritischer Punkt oder Gleichgewichtspunkt genannt. Ob und zu welchem Fixpunkt (falls es mehrere gibt) sich das System nähert, ist die Frage, die es zu beantworten gilt. So ein Fixpunkt zieht eine Trajektorie zu sich und ist der einfachste Fall eines Attraktors. (Mehr zu Attraktoren in Kapitel (2.4)).

Wir behandeln zunächst die Frage, wie stabil so eine Gleichgewichtslösung ist. Dazu betrachten wir die Trajektorien in der Nähe des Fixpunktes. Der Abstand zum Fixpunkt

$$\vec{\xi}(t) = \vec{x}(t) - \vec{x}_0 \quad (16)$$

soll dabei klein sein, da dies das Problem sehr vereinfacht. Man kann nun nämlich mit dem niedrigsten Term der Taylorentwicklung von  $\vec{F}(\vec{x})$ , die Bewegungsgleichung linearisieren und auf folgende Form bringen:

$$\frac{d}{dt}\vec{\xi}(t) = \mathbf{M}\vec{\xi}(t) \quad (17)$$

$\mathbf{M}$  ist hier die Jacobimatrix von  $\vec{F}(\vec{x})$ , ausgewertet an  $\vec{x}_0$ . Die Elemente dieser Matrix sind:

$$M_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \quad (18)$$

Die nun linearisierte Bewegungsgleichung ist nun analytisch lösbar. Im eindimensionalen Fall ist die Jacobimatrix nur eine Zahl  $\mu$  und die Lösung der Glg. (17) hat die Form:

$$\xi(t) = e^{\mu t}\xi(0) \quad (19)$$

Je nach Vorzeichen von  $\mu$  hat die Lösung verschiedene Konsequenzen. Eine stabile Lösung liegt vor, wenn  $\mu < 0$  ist, da nun die Störungen exponentiell abklingen. Eine instabile Lösung liegt vor, wenn  $\mu > 0$  ist, da die Störungen hier exponentiell zunehmen. Im Falle von  $\mu = 0$  liegt ein labiles Gleichgewicht vor, das Verhalten der Störungen bestimmen die höheren Ableitungen.

Verallgemeinern lässt sich diese Stabilitätsanalyse auf N Dimensionen, indem man auf 1 normierte Lösungsvektoren  $\vec{u}(t)$  einführt. Wir fordern, dass alle Komponenten dieses Vektors die gleichen exponentiell zeitabhängigen Eigenschaften aufweisen wie zuvor im 1 dim. Fall.

$$\vec{u}(t) = e^{\mu t}\vec{u} \quad (20)$$

Mit Glg. (17) erhält man das Eigenwertproblem

$$M\vec{u} = \mu\vec{u} \quad (21)$$

welches nur dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn die Determinante 0 ist.

$$\det(M_{ij} - \mu\delta_{ij}) = 0 \quad (22)$$

Diese Gleichung (Polynom N-ter Ordnung) hat N Eigenwerte  $\mu_n$  mit N Eigenvektoren  $\vec{u}_n$ . Eine allgemeine Lösung für Glg. (17) lässt sich dann durch eine Überlagerung der Eigenwerte mit den Entwicklungskoeffizienten  $c_n$ , welche aus den Anfangsbedingungen bei  $t = 0$  bestimmt werden, zusammenstellen.

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{i=1}^N c_n e^{\mu_n t} \vec{u}_n \quad (23)$$

Die  $\mu_n$  Eigenwerte können sowohl reell als auch komplex sein und treten, wenn komplex, immer paarweise auf.

Für die Charakterisierung eines Gleichgewichtspunktes sind die Realteile der Eigenwerte wichtig. Sind alle Realteile der Eigenwerte der Jacobimatrix negativ, so ist der Fixpunkt  $\vec{x}_0$  asymptotisch stabil.

Ist mindestens einer der Realteile negativ, so nimmt die Auslenkung in die Richtung  $\vec{u}_n$  exponentiell zu und der Fixpunkt ist instabil. Von einem degenerierten Fixpunkt ist dann die Rede, wenn  $Re(\mu_n = 0)$

Die lineare Stabilitätsanalyse ist jedoch nur in einer gewissen Umgebung um den Fixpunkt gültig, und auch nur dann wenn die Funktion (das Vektorfeld)  $\vec{F}$  genügend glatt ist.

Die nun definierten Regeln für lineare Stabilität in N Dimensionen werden gut im speziellen zweidimensionalen Fall veranschaulicht. Man nehme ein System mit **einem** Freiheitsgraden an ( $x_1 = q$  und  $x_2 = p$ ) Die Jacobimatrix ist in diesem Fall eine  $2 \times 2$  Matrix. Dadurch ergibt sich eine charakteristische Gleichung der Form:

$$\begin{pmatrix} M_{11} - \mu & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \mu \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

Das quadratische Polynom ist dann:

$$\mu^2 - (M_{11} + M_{22})\mu + M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 0 \quad (25)$$

oder, unter Verwendung folgender Definitionen

$$s = \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}) = \frac{1}{2}Sp(M) \quad (26)$$

$$d = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = \det(M) \quad (27)$$

ist Glg. (25) dann

$$\mu^2 - 2s\mu + d = 0 \quad (28)$$

Die zwei Lösungen dieser Gleichungen hängen von den Konstanten  $s$  und  $d$  ab und durch Variation von Größe und Vorzeichen von  $s$  und  $d$  ergeben sich 6 grundlegende Lösungen für  $\mu_1$  und  $\mu_2$ .

$$\mu_{1/2} = s \pm \sqrt{s^2 - d} \quad (29)$$

Die 6 Lösungen für  $\mu_1, \mu_2$  sind:

- a)  $\mu_1, \mu_2$  reell und beide negativ (wenn  $s < 0$  und  $0 < d < s^2$ ) → Stabiler Knoten
- b)  $\mu_1, \mu_2$  reell und beide positiv (wenn  $s > 0$  und  $0 < d < s^2$ ) → Instabiler Knoten
- c)  $\mu_1, \mu_2$  reell mit unterschiedlichen Vorzeichen (wenn  $d < 0$ ) → Sattel
- d)  $\mu_1 = \mu_2^*$ , negativer Realteil (wenn  $s < 0$  und  $d > s^2$ ) → Stabiler Strudel
- e)  $\mu_1 = \mu_2^*$ , positiver Realteil (wenn  $s > 0$  und  $d > s^2$ ) → Instabiler Strudel
- f)  $\mu_1 = \mu_2^*$ , rein imaginär (wenn  $s = 0$  und  $d > 0$ ) → Wirbel

[2](S. 429 - 432)

**Stabilität von Trajektorien:** Nun schweifen wir ab von einem zeitunabhängigen Fixpunkt, hin zu einer zeitabhängigen Referenztrajektorie. Genauer gesagt untersuchen wir eine zeitabhängige Trajektorie in der Umgebung einer ebenfalls zeitabhängigen Referenztrajektorie und formulieren Bedingungen für das Verhalten des Abstandes beider Trajektorien zueinander. Die erste Stabilitätsform, die hier formuliert werden kann, ist die *Stabilität nach Liapunov*. Trajektorien, die auf diesen Stabilitätstyp zutreffen, bewegen sich mit voranschreitender Zeit stets in einer bestimmten Umgebung der Referenztrajektorie. Genauer ausformuliert bedeutet dies:

Eine Bahn  $\vec{x}_r(t)$  heißt *Liapunov-stabil*, wenn sich für jedes  $\epsilon > 0$  ein Wert  $\delta(\epsilon) > 0$  finden lässt, so dass gilt:

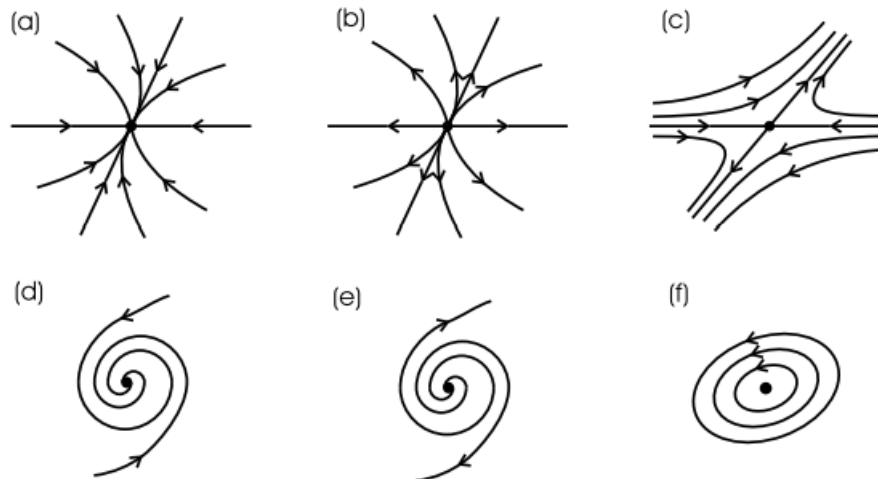


Abbildung 2: Stabilitätstypen eines zweidimensionalen Fixpunktes. a) Stabiler Knoten, b) Instabiler Knoten, c) Sattel, d) Stabiler Strudel, e) Instabiler Strudel, f) Wirbel

Jede Lösung mit  $|\vec{x}(t_0) - \vec{x}_r(t_0)| < \delta$  erfüllt für alle Zeiten  $t > t_0$  die Bedingung  $|\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)| < \epsilon$ .

Ausgesprochen bedeutet dies, dass sich die betrachtete Trajektorie immer in einer Röhre ( $N+1$ -dimensional) um die Referenztrajektorie bewegt und diese nicht verlässt.

Natürlich ist diese Bedingung auch erfüllt, falls sich die Trajektorie der Referenztrajektorie immer weiter annähert. In diesem Fall ist die Trajektorie *asymptotisch stabil*. Zusätzlich zu den Bedingungen für Liapunovstabilität muss **in diesem Fall** noch gelten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)| = 0 \quad (30)$$

Nun kann es, ganz im Gegensatz zu der Annäherung an einen Fixpunkt, auch einen Unterschied machen, mit welcher Geschwindigkeit sich die zwei Trajektorien bewegen. Es kann sein, dass die zwei Trajektorien zwar sehr ähnliche Formen haben, den jeweiligen Punkt im Raum jedoch zu ganz unterschiedlichen Zeiten erreichen, weil sie sich unterschiedlich schnell bewegen. Das führt zu einer zeitlichen Verschiebung und  $|\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)|$  wächst. Für diesen Fall wird auch ein eigener Stabilitätstyp eingeführt, nämlich die *orbitale Stabilität*. Ähnlich zur Stabilität nach Lyapunov, ist eine Bahn  $\vec{x}_r(t)$  orbital stabil, wenn sich für jedes  $\epsilon > 0$  ein Wert  $\delta(\epsilon) > 0$  finden lässt, so dass gilt:

Jede Lösung mit  $|\vec{x}(t_0) - \vec{x}_r(t_0)| < \delta$  liegt für alle Zeiten  $t > t_0$  innerhalb einer Röhre vom Radius  $\epsilon$  um die Bahn  $\vec{x}_r(t)$ .

Hierbei wird die Zeitabhängigkeit außer Acht gelassen und lediglich der Aufenthaltsort ist von Bedeutung.

**Stabilität von Trajektorien mit periodischen Lösungen:** Da die Stabilität von zeitabhängigen Lösungen recht kompliziert und auch umfangreich ist, wird hier lediglich

auf den Spezialfall der Stabilität von periodischen Lösungen eingegangen, da es auch für die spätere Diskussion über den Liapunovexponenten von Bedeutung ist. Ein Beispiel das die folgenden Konzepte veranschaulicht wird es in dieser Arbeit nicht geben, jedoch ist der Van-der-Pol-Oszillator ein gutes Beispiel um eine Anwendung für die Diskussion von der Stabilität von Trajektorien zu finden.<sup>1</sup>

Zunächst wird angenommen, dass sich die Referenztrajektorie mit einer Periodendauer  $T$  wiederholt.  $\vec{x}_r(t+T) = \vec{x}_r(t)$ . Dies ist auch nicht unphysikalisch, da solche Trajektorien für jeden harmonischen Oszillator oder für jedes System mit äußeren periodischen Antrieb realistisch sind. Es kann sich hier sowohl um ein autonomes System handeln, dann ist  $\vec{F}$  nicht explizit von der Zeit abhängig. Es gilt dann  $\vec{F}(\vec{x}) = \dot{\vec{x}}$ . Ist das System allerdings nicht autonom nehmen wir an dass auch  $\vec{F}$  periodisch ist, also  $\vec{F}(\vec{x}, t+T) = \vec{F}(\vec{x}, t)$ . Solche Systeme sind periodisch fremderregt, es gibt in diesem Fall einen zeitabhängigen äußeren Antrieb, der sich auch auf die Trajektorie auswirkt.

Wie im Falle der Gleichgewichtslösungen von Fixpunktsystemen (Glg. 16) kann man zur Untersuchung der Stabilität von  $\vec{x}_r(t)$  die Nachbartrajektorie verwenden,

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_r(t) + \vec{\xi}(t) \quad (31)$$

wobei wie zuvor die Störung bzw. die Abweichung  $\vec{\xi}(t)$  klein ist. Kombiniert mit den Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}, t) \quad \dot{\vec{x}}_r(t) = \vec{F}(\vec{x}_r, t) \quad (32)$$

ergibt das:

$$\dot{\vec{x}}_r + \dot{\vec{\xi}} = \vec{F}(\vec{x}_r + \vec{\xi}, t) = \vec{F}(\vec{x}_r, t) + \dot{\vec{\xi}} \quad (33)$$

oder nach Umstellen auf  $\dot{\vec{\xi}}$ :

$$\dot{\vec{\xi}} = \vec{F}(\vec{x}_r + \vec{\xi}, t) - \vec{F}(\vec{x}_r, t) \equiv \vec{G}(\vec{\xi}, t) \quad (34)$$

Durch linearisieren der rechten Seite der Gleichung, mithilfe von Taylorreihen, erhält man folgende Schreibweise:

$$\dot{\vec{\xi}}(t) = \mathbf{M}(t)\vec{\xi}(t) \quad (35)$$

wobei wie zuvor  $\mathbf{M}(t)$  die Jacobimatrix ist. Gleich wie Glg. 17 zuvor, so ist auch Glg. 35 ein lineares System von Differentialgleichungen, nur dass die früher konstante Koeffizientenmatrix  $\mathbf{M}$  hier zeitabhängig ist, und zwar mit einer Periodizität  $T$ :  $\mathbf{M}(t+T)$

<sup>1</sup>Weitere Literatur dazu ist [2](S.440-442,451-453)

=  $\mathbf{M}(t)$ . Es handelt sich hierbei um ein lineares System, was es ermöglicht, die Lösung in ein Fundamentalsystem von linear unabhängigen Basislösungen  $\vec{\phi}_1(t), \dots, \vec{\phi}_N(t)$  zu schreiben.

Da die Basislösungen nicht genau bestimmt sind, wählen wir sie zur Zeit  $t = 0$  so, dass sie genau mit den Einheitsvektoren des  $N$ -dimensionalen Raumes übereinstimmen. Es folgt daraus:

$$\vec{\phi}_1(0) = (1, 0, \dots, 0)^T \quad \text{bis} \quad \vec{\phi}_N(0) = (0, 0, \dots, 1)^T \quad (36)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich dann aus der Superposition der Basislösungen, mal den Entwicklungskoeffizienten  $c_i$ .

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{i=1}^N c_i \vec{\phi}_i(t) \quad (37)$$

Diese Gleichung lässt sich auch in Matrixform bringen:

$$\vec{\xi}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\vec{c} \quad (38)$$

$\mathbf{\Phi}$  ist hierbei eine  $N \times N$  Matrix, deren Spalten jeweils ein Basisvektor des  $N$ -dimensionalen Raumes ist. Aufgrund der zuvor gewählten Anfangsbedingungen ist  $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$  die Einheitsmatrix.

Da wir nun von periodischen Systemen/Differentialgleichungen ausgegangen sind, erfüllt jede Lösung  $\vec{\xi}$  zu den Zeitpunkten  $t$  und  $t + T$  die gleichen Differentialgleichungen. Dadurch ist allerdings die Lösung der Differentialgleichung noch nicht periodisch, doch es erlaubt uns sie sowohl in den Basislösungen  $\vec{\phi}_i(t + T)$ , als auch in  $\vec{\phi}_i(t)$  zu entwickeln. Ausformuliert bedeutet das:

$$\vec{\xi}(t + T) = \mathbf{\Phi}(t + T)\vec{c} \quad \text{und} \quad \vec{\xi}(t + T) = \mathbf{\Phi}(t)\vec{c} \quad (39)$$

Dies zeigt uns, dass ein linearer Zusammenhang zwischen  $\mathbf{\Phi}(t)$  und  $\mathbf{\Phi}(t + T)$  besteht, welcher wäre:

$$\mathbf{\Phi}(t + T) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} \quad (40)$$

Diese  $N \times N$ -Matrix  $\mathbf{C}$  bezeichnet man als die Monodromiematrix und bestimmt das Verhalten der Lösung von einer zur nächsten Periode. Die Werte dieser Matrix sind unter

Beachtung von  $\Phi(0) = I$  leicht ablesbar:

$$C = \Phi(T) \quad (41)$$

Diese Matrix  $C$  ist durch das N-malige Aufintegrieren der Glg.(35) mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen von 0 bis T berechenbar. Ihre Spalten sind dann genau die N Lösungsvektoren  $\phi_i(T)$ .  $\Phi(t)$  für große Zeiten ist dann durch mehrmalige Iteration von Glg.(40) zu erhalten.

Es gilt:

$$\Phi(nT) = \Phi^n(T) = C^n \quad (42)$$

Anhand der N Eigenwerte  $\lambda_i$  der Monodromiematrix  $C$  kann man die zeitliche Entwicklung der Lösung  $\xi(t)$  ablesen. Diese Eigenwerte werden auch als *Floquet-Multiplikatoren* bezeichnet, für die gilt:

$$\lambda_i(nT) = \lambda_i^n(T) \quad \text{und} \quad \lambda_i(T) = e^{\sigma_i T} \quad (43)$$

Die Exponenten  $\sigma_i$  werden als *Floquet-Exponenten* bezeichnet.

Sind die Beträge der Multiplikatoren alle  $|\lambda_i| < 1$ , d.h.  $\text{Re } \sigma_i < 0$ , so ist die Trajektorie  $\vec{x}_r(t)$  *asymptotisch stabil* und sie ist *instabil*, wenn  $|\lambda_i| > 1$ , d.h.  $\text{Re } \sigma_i > 0$  sind. Der Beweis dieser Bedingungen wird hier nicht weiter behandelt, es soll nur gesagt werden, dass dieser Formalismus zu Stabilitäsanalyse von periodischen Lösungen auf den Mathematiker Gaston Floquet zurückgeht. Hiermit gehen wir gleich über auf das Werk eines anderen Mathematikers, nämlich Alexander Michailowitsch Liapunov, der uns den Liapunovexponenten schenkte. [2](S 444 - 446, 448 - 450)

### 2.3.2 Liapunovexponent

Der Liapunovexponent ist eine Größe, die uns eine quantitative Charakterisierung von chaotischen Bewegungen erlaubt. Weitere solche Größen wären das invariante Maß und die Korrelationsfunktion, welche hier aber nicht behandelt werden.

Um den Liapunovexponenten zu verstehen, betrachten wir zunächst eine eindimensionale diskrete Abbildung

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (44)$$

Solch eine Abbildung kann z.B. die Poincaré-Abbildung eines dynamischen Systems sein. Benachbarte Punkte können durch solch eine Abbildung mit zunehmenden Iterationen



separiert werden. Wie sehr sich eine Punktfolge  $x_0, x_1, x_2, \dots$  durch Abänderung der Anfangsbedingung um eine Zahl  $\epsilon$  ändert, kann durch den Liapunovexponenten beschrieben werden.

Man betrachte den Startwert einer Punktfolge  $x_0$  und einen um  $x_0 + \epsilon$  verschobenen Wert des Startwertes. Nach  $N$  Iterationen der Abbildung  $f(x)$  wird aus den Startpunkten

$$x_0 \xrightarrow{N \text{ Iterationen}} f^N(x_0) \quad (45)$$

$$x_0 + \epsilon \xrightarrow{N \text{ Iterationen}} f^N(x_0 + \epsilon) \quad (46)$$

Wo die Differenz der beiden Startpunkte zu Beginn noch  $\epsilon$  betrug, ist sie nun nach den Iterationen  $\epsilon e^{N\lambda(x_0)}$  also:

$$|f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)| = \epsilon e^{N\lambda(x_0)} \quad (47)$$

Der Faktor  $e^{\lambda(x_0)}$  ist hierbei die mittlere Streckung zweier benachbarter Punkte nach einer Iteration.

Für den Grenzfall  $\epsilon \rightarrow 0$  und  $N \rightarrow \infty$  resultiert daraus eine Ausdruck für den Liapunovexponenten  $\lambda(x_0)$ :

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \epsilon) - f^N(x_0)}{\epsilon} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right| \quad (48)$$

Durch Anwendung der Kettenregel auf die Abbildungen, folgt eine alternative Schreibweise des Liapunovexponenten

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{d}{dx_0} f^N(x_0) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| \quad (49)$$

Man beachte beim Anwenden der Kettenregel, dass

$$\frac{d}{dx_0} f^2(x_0) = \frac{d}{dx} f[f(x_0)] = f'[f(x_0)]f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0) \quad (50)$$

[1] (S.24, 25)

Ist bei einem dynamischen System  $\lambda > 0$ , wird es als chaotisch bezeichnet und es benötigt nicht viele Iterationen, um bei nur kleinen Änderungen der Anfangsbedingungen große Abstände der Trajektorien im Phasenraum zu haben. Somit haben wir ein Maß dafür gefunden, ob ein dynamisches System chaotisch ist oder nicht. Der Zustand eines solchen Systems mit positivem Liapunovexponenten kann also, aufgrund der endlichen Messgenauigkeit physikalischer Methoden, nicht beliebig weit in die Zukunft vorherbestimmt

werden, obwohl die zum System dazugehörigen Differenzialgleichungen mathematisch eindeutig lösbar sein können.

**Systeme mit mehreren Liapunovexponenten:** Das Konzept des Liapunovexponenten kann auch auf mehrere Dimensionen erweitert werden. Im Falle von drei Dimensionen können drei unabhängige Exponenten  $\lambda_i$ , mit  $i = 1, 2, 3$  berechnet werden. Ausgangspunkt der Berechnung stellt hierbei die Stabilität periodischer Bahnen dar, die Floquet behandelte (siehe Kap. 2.3.1). Man beachte dabei jedoch, dass sich die folgende Definition nicht auf eine Abbildung, wie der Poincaré-Abbildung bezieht, sondern auf die Trajektorie selbst.<sup>2</sup>

Die Definition von  $\lambda$  kann man auch auf die kleine Störung  $\vec{\xi}$  übertragen, um deren zeitliche Entwicklung herauszufinden, wobei  $\lambda_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0}$  hier nun von der kleinen Störung  $\vec{\xi}$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  der Referenztrajektorie  $\vec{x}_r$  abhängt.

$$\lambda_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{|\vec{\xi}(t)|}{|\vec{\xi}(t_0)|} \quad (51)$$

Obwohl  $\lambda_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0}$  von der Referenztrajektorie  $\vec{x}_r(t)$  abhängt und somit auch vom Startpunkt, ist  $\lambda_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0}$  im Einzugsgebiet eines Attraktors nicht mehr abhängig von der Referenzbahn. Jedoch kann eine andere Wahl der Trajektorie dazu führen, dass sich die Werte von  $\lambda_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0}$  ändern, weil man in das Einzugsgebiet eines anderen Attraktors kommt. Für Näheres zu Attraktoren siehe Kap. 2.4.1.  $\lambda_{\vec{x}_r, \vec{\xi}_0}$  ist auch von der Richtung der Störung  $\vec{\xi}_0 = \vec{\xi}(t_0)$  abhängig. Im N-dimensionalen Raum existieren N Liapunovexponenten, bei denen Entartungen auftreten können, sowie N linear unabhängige Vektoren  $\vec{e}_i$ .

$$\lambda_i = \lambda_{\vec{x}_r, \vec{e}_i} \quad (52)$$

Es ist nützlich die Exponenten in einer absteigenden Reihenfolge zu ordnen,  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$ . Der größte von ihnen ( $\lambda_1$ ) kann leicht berechnet werden, dazu wird lediglich die linearisierte Bewegungsgleichung (Glg.(35)) mit zufällig gewählten Anfangsstörungen  $\vec{\xi}(t_0)$  aufintegriert. Diese Anfangsstörung kann wie folgt zerlegt werden:

$$\vec{\xi}(t_0) = \sum_{i=1}^N c_i \vec{e}_i \quad (53)$$

Dieser Vektor wird auch immer einen Anteil in  $\vec{e}_i$  haben, der zu dem größten Liapunovexponenten gehört. In dieser Lösung wird nach einer gewissen Zeit diejenige Komponente der Störung dominieren, die am schnellsten wächst. Glg.(51) liefert durch die Limesbildung automatisch den maximalen Exponenten  $\lambda_1$ . Zur Berechnung aller N Liapunovexponenten, muss die zeitliche Entwicklung aller N linear unabhängigen Störungen  $\vec{\xi}_i$  mit  $\vec{\xi}_i(t_0) = \vec{e}_i$  betrachtet werden.

<sup>2</sup>Für eine Herleitung über eine mehrdimensionale Abbildung, siehe [1] (S.112)

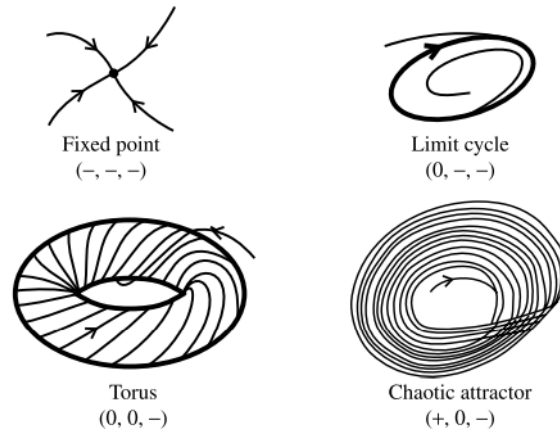


Abbildung 3: Mögliche Attraktortypen für ein System mit drei Freiheitsgraden

Bemerkenswert ist es, dass im Falle einer periodischen Bahn  $\vec{x}_r(t + T) = \vec{x}_r(t)$  der Wert der Liapunovexponenten übereinstimmt mit den Werten der Realteile der Floquet-Exponenten. Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung dieses Begriffs.

Da die Liapunovexponenten maßgeblich über die Langzeitentwicklung des Systems entscheiden und es in mehrdimensionalen Systemen mehrere Exponenten gibt, erhält man unterschiedliche Attraktoren, abhängig von der Kombination der Liapunovexponenten. **Hat ein System zum Beispiel mindestens einen positiven Exponenten und mindestens einen negativen, zieht es benachbarte Trajektorien in eine Richtung an und treibt es in eine andere Richtung auseinander. In diesem Fall existiert ein seltsamer Attraktor, welcher besonders interessant ist. Mehr zu seltsamen Attraktoren in Kap. 2.4.1.**

In einem System mit z.B. drei Freiheitsgraden existieren drei unabhängige Liapunovexponenten  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Je nach Vorzeichenkombination **der Realteile** erhält man verschiedene Attraktoren:

- a)  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, -)$  : Fixpunkt
- b)  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$  : Grenzyklus
- c)  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$  : Torus
- d)  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$  : Chaotischer Attraktor

Fall a): Die Nachbartrajektorien laufen aus allen Richtungen in einem gemeinsamen Fixpunkt zusammen.

Fall b): Da  $\lambda_1 = 0$ , liegt ein periodische Bewegung vor. Der Attraktor hat die Topologie eines Kreises.

Fall c): Da  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ , liegt wieder eine periodische Bewegung vor, nur diesmal in zwei Dimensionen. Der Attraktor hat die Topologie eines Torus. In diesem Fall schraubt sich die Trajektorie um den Torus. Es gibt in diesem Falle zwei Umlauffrequenzen,  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , die insofern wichtig sind, da sie angeben, ob es sich um eine periodische oder

eine quasiperiodische Bahn handelt. Ist der Bruch  $\omega_1/\omega_2$  eine irrationale Zahl, so ist die Bahn quasiperiodisch und wird sich nie schließen.

Fall d): Wenn der größte Liapunovexponent  $\lambda_1$  positiv ist, ist die Trajektorie stark von den Anfangsbedingungen abhängig und das System im gesamten weist chaotische Eigenschaften auf. Der Attraktor wird in diesem Fall chaotischer Attraktor genannt. Typisch ist  $\lambda_1 > 0, \lambda_1 = 0, \lambda_1 < 0$ , wobei es jedoch auch andere Kombinationen für chaotische Attraktoren gibt, z.B. (+,+,-). Wichtig ist die Kombination aus negativen und positiven Exponenten. Diese Art von Attraktoren sind geometrisch seltsame Attraktoren, die die eigenartigen Eigenschaften haben, Gebilde mit einer gebrochenen Dimension zu sein, was bedeutet, dass es weder Linien noch Flächen sind, sondern etwas dazwischen.

Nun da wir unsere Diskussion über die Stabilität und den Liapunovexponenten von dynamischen Systemen bereits mit den Konzept der Attraktoren beendet haben, gehen wir im nächsten Kapitel noch näher seltsame Attraktoren ein. [2](S.463 - 465)

## 2.4 Seltsame Attraktoren und Kolmogorov-Entropie

### 2.4.1 Seltsame Attraktoren

Zu den Eigenschaften eines seltsamen Attraktors gehört natürlich die grundlegende Eigenschaft, hinreichend nahe Trajektorien in einem begrenztem Gebiet des Phasenraumes anzuziehen. Diese Eigenschaft teilen sie sich auch mit allen anderen Attraktoren. Ausschlaggebend für die seltsamen Attraktoren ist die Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen sowie das Zusammenziehen der Volumenelemente. Wir erinnern uns, dass dieses Zusammenziehen der Volumenelemente die grundlegende Eigenschaft von dissipativen Systemen ist. Eine Abnahme des Volumenelements bedeutet hier jedoch nicht, dass sich auch die Längen in allen Raumrichtungen verkleinern. Vielmehr entfernen sich zwei benachbarte Punkte in der einen Richtung exponentiell voneinander, während sie sich zwei andere Punkte exponentiell voneinander entfernen. Das Volumenelement verzerrt sich und zieht sich im Betrag zusammen, was zu einer positiven Kolmogorov-Entropie führt (siehe Kap. 2.4.2). Da es sich um einen Attraktor handelt, also ein beschränktes Gebiet im Phasenraum, bleibt das Volumenelement ständig in ebendiesem beschränkten Gebiet. Damit dies bei exponentiell wachsender Entfernung zweier Nachbartrajektorien der Fall sein kann, wird das Volumenelement gleichzeitig 'zusammengefalten'. Dieser Streckungs- Stauchungs- und Rückfaltungsprozess führt zu den chaotischen Bewegungen der Trajektorie und kann im Poincaré-Schnitt gesehen werden. [1](S.104)

**Hausdorffdimension:** Eine weitere erwähnenswerte Eigenschaft von seltsamen Attraktoren ist, dass sie gebrochene verallgemeinerte Dimensionen besitzen. Nur kurz wird hier das Konzept der Hausdorffdimension angeschnitten, welche nicht die einzige verallgemeinerte Dimension ist die ein seltsamer Attraktor haben kann. Eine Weitere wäre zum Beispiel die Boxcounting-Dimension. Der Unterschied liegt in den unterschiedlichen numerischen Berechnungsmethoden, weshalb sich auch die Werte der einzelnen Dimensionen (von ein und dem selben Attraktor) unterscheiden können. [3]

Man nehme an, eine Punktmenge im N-dimensionalen Raum werde mit einer "Kugel" mit dem Durchmesser  $l$  überzogen, sodass alle Punkte innerhalb der Kugel liegen. Nun lässt

man den Durchmesser  $l$  der Kugel gegen Null gehen und erzeugt so viele Kugeln wie nötig in der Nähe der Punktmenge, um immer noch alle Punkte im Inneren einer Kugel zu haben. Diese Anzahl an Kugeln ist eine Funktion  $n(l)$  in Abhängigkeit des Kugeldurchmessers. Je kleiner  $l$ , desto größer  $n(l)$ . Die Hausdorffdimension berechnet sich für  $l$  gegen Null wie folgt:

$$n(l) \propto \frac{1}{l^D} \quad (54)$$

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log(n(l))}{\log(l)} \quad (55)$$

Für  $N = 1$  ist  $D = 1$ , da umgekehrt proportional viele "Kugeln" benötigt werden wie der Durchmesser ist. Für  $N = 2$  wächst die Zahl der erforderlichen Kugel proportional zu  $1/R^2$ , weshalb  $D = 2$  ist. Eine seltsamer Attraktor hat nun eine Hausdorffdimension  $D$ , die keine ganze Zahl ist. Sie kann auch eine rationale Zahl sein. Zum Beispiel hat die Koch-Kurve  $D = 1,26185\dots$  [1](S.54)

$D$  eines seltsamen Attraktors ist immer eine rationale Zahl. Der Wert der verallgemeinerten Dimension hängt, wie schon erwähnt, von der numerischen Berechnung ab, bleibt allerdings immer eine rationale Zahl. Zoomt man genauer in einen seltsamen Attraktor hinein, erkennt man eine sich wiederholende Struktur. Das nennt man Selbstähnlichkeit und tritt nur bei geometrischen Gebilden mit fraktaler verallgemeinerter Dimension, wie dem seltsamen Attraktor, auf. Liegt eine Trajektorie im Einzugsgebiet dieses Attraktors, spiegelt sich das auch im Poincaréschnitt des Systems wider. Der Poincaré-Schnitt besitzt dann nämlich ebenfalls diese Selbstähnlichkeit und hat auch eine fraktale verallgemeinerte Dimension. Mit der Selbstähnlichkeit kann man nun anhand eines Attraktors chaotisches Verhalten eines Systems feststellen.

### 2.4.2 Kolmogorov-Entropie

Als ein Weiteres und auch als das letzte Maß zur Beschreibung und Charakterisierung von chaotischen Bewegungen führen wir nun die Kolmogorov-Entropie  $K$  ein. Zum Einstieg erinnern wir uns daran, dass schon in der Thermodynamik die Entropie als ein Maß für den Informationsgehalt bezeichnet wurde. Ein Anstieg der Entropie wurde gleichgesetzt mit einem Anstieg an Unwissenheit über das System. Shannon definierte die Entropie über die Wahrscheinlichkeiten  $P_i$  mit der man ein System im Zustand  $i$  findet, als

$$S \propto - \sum_i P_i * \log(P_i) \quad (56)$$

Die Kolmogorov-Entropie  $K$  kann auf die Shannon-Entropie zurückgeführt werden, da sie auch Aussagen über die Information in einem dynamischen System liefert. Genauer gesagt ist  $K$  proportional zur Verlustrate der Information über ein dynamisches System mit der Zeit.

Zum Berechnen der K-Entropie betrachte man eine Trajektorie eines dynamischen Systems, auf einem seltsamen Attraktor, im N-dimensionalen Phasenraum. Dieser Phasenraum wird in Kästchen der Größe  $l^N$  unterteilt die den Systemzustand in den Zeitabständen  $\tau$  bestimmen.  $P_{i_0 \dots i_n}$  sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich die Trajektorie zu  $\vec{x}(t=0)$  in Kästchen  $i_0$ , zu  $\vec{x}(t=\tau)$  in Kästchen  $i_1, \dots$  und zu  $\vec{x}(t=n\tau)$  in Kästchen  $i_n$  befindet. Nun berechnet sich  $K_n$  nach der Formel von Shannon folgendermaßen:

$$K_n = - \sum_{i_0 \dots i_n} P_{i_0 \dots i_n} \log(P_{i_0 \dots i_n}) \quad (57)$$

Diese Größe ist proportional zur Information, die benötigt wird, um ein System auf einer bestimmten Trajektorie festzusetzen. Die Differenz  $K_{n+1} - K_n$  ist genau der Wert, der benötigt wird um vorherzusagen in welchem Kästchen  $i_{n+1}$  sich die Trajektorie befinden wird, unter der Voraussetzung, man weiß in welchen Kästchen  $i_0 \dots i_n$  sich die Trajektorie bisher befunden hat. Dies bedeutet, dass der Wert  $K_{n+1} - K_n$  den Informationsverlust angibt, wenn man von Zeitpunkt n auf n+1 übergeht. Als mittlere Informationsverlustrate definieren wir K:

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n) \quad (58)$$

Durch die Limesbildung von  $l \rightarrow 0$ , wird die spezielle Anordnung der Kästchen im Phasenraum irrelevant gemacht. Die Kolmogorov-Entropie wird für ein System mit regulärer Bewegung (z.B. Rotation eines Körper, laminare Strömungen, uvm.) 0 und für Systeme mit deterministischen Chaos eine positive Konstante. Für ein System das stochastische Dynamik aufweist, wird K unendlich.

Sowohl der Liapunovexponent als auch die Kolmogorov-Entropie sind invariant unter Koordinatentransformationen. Bei Systemen mit einem Freiheitsgrad, also zweidimensionalem Phasenraum ist K gleich dem positiven Liapunovexponenten. In höheren Dimensionen verlieren wir bei chaotischen Systemen Information mit voranschreitender Zeit, was auch an einem positiven Wert für K abgelesen werden kann. Gleichzeitig haben solche Systeme positive Liapunovexponenten, mit deren Rate sich die Systeme ausbreiten. Es existiert ein Zusammenhang zwischen der Kolmogorov-Entropie und den Liapunovexponenten. Die Rate des Informationsverlusts K ist nämlich die gemittelte Summe der positiven Liapunovexponenten. Da die Liapunovexponenten meist nicht von  $\vec{x}$  abhängen, ist K einfach die Summe der positiven Liapunovexponenten.<sup>3</sup>

$$K = \sum_i \lambda_i^+(\vec{x}) \quad (59)$$

**Mittlere Vorhersagezeit:** Zuletzt wollen wir uns noch die mittlere Vorhersagezeit  $T_m$  eines chaotischen Systems ansehen, welche angibt, wie weit man die Entwicklung des

<sup>3</sup>Hängt  $\lambda$  doch von  $\vec{x}$  ab, so muss man ein Integral über  $d^N x$  von der Summe der positiven Liapunovexponenten mal der invarianten Dichte  $\rho(x)$  machen. Mehr dazu findet man in [1](S.110)

Systems vorhersagen kann, wenn die Anfangsbedingungen mit einer Genauigkeit  $l$  bestimmen kann. Grundsätzlich können genaue Aussagen über die Entwicklung des Systems nur für Zeiten kleiner als  $T_m$  gemacht werden, danach sind nur noch statistische Aussagen möglich. Im Falle eindimensionaler Abbildungen gilt:

$$T_m = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{1}{l}\right) \quad (60)$$

Dieser Ausdruck kann mit der K-Entropie auf mehrere Dimensionen verallgemeinert werden:

$$T_m \propto \frac{1}{K} \log\left(\frac{1}{l}\right) \quad (61)$$

Wäre  $l = 0$ , also könnte man die Anfangsbedingungen unendlich genau bestimmen, so würde der Logarithmus ins Unendliche divergieren und  $T_m = \infty$ . Man könnte also, auch wenn  $K > 0$  ist, das System bis in alle Zeiten vorhersagen. Dies ist der Fall, weil es sich um deterministisches Chaos handelt, siehe Kap. 2.

Wir sind nun genauer auf den seltsamen Attraktor eingegangen und haben danach mit der Definition der Kolmogorov-Entropie die mittlere Rate des Informationsverlustes mit der Zeit für ein dynamisches System eingeführt, die eine positive Konstante ist, wenn das System deterministisches Chaos aufweist. Gleichzeitig haben wir eine Beziehung zum Liapunovexponenten hergestellt, wobei  $K$  die Summe der positiven Liapunovexponenten war. Abschließend haben wir sowohl mit  $K$  als auch mit  $\lambda$  eine Zeitspanne definiert, innerhalb der man die Entwicklung des Systems genau weiß. Im Weiteren werden die bis jetzt theoretisch eingeführten Konzepte auf konkrete Beispiele angewandt, um einerseits die Konzepte in Anwendung zu sehen und um andererseits die Beispielsysteme zu analysieren. [1](S.109 - 111, 115, 116)

### 3 Beispiele zu chaotischer Mechanik

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Anwendungsbeispielen von einigen oben genannten Konzepten. Zuerst sehen wir uns das einfache Pendel an, wobei wir auf drei unterschiedliche Betrachtungsweisen dieses einfachen schwingenden Systems eingehen werden, wobei bei keinen von beiden Chaos auftreten wird. Es soll als Vergleich zum darauffolgenden Beispiel dienen, in dem chaotisches Verhalten nachweisbar ist, nämlich dem periodisch getriebenen Pendel.

#### 3.1 Einfaches Fadenpendel

**Aufgabenstellung:** Wie bereits erwähnt ist das einfache Pendel bzw. das Fadenpendel unser erstes System mit dem wir uns beschäftigen wollen. Ein Aufbau wie in Abb. 4 gezeigt wird durch die Gleichung

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} * \sin(\theta(t)) = 0 \quad (62)$$

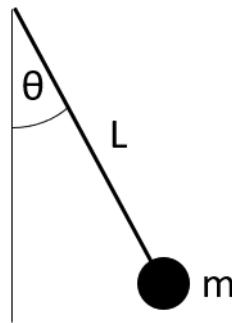


Abbildung 4: Fadenpendel

beschrieben. Wie man sofort sieht, ist das eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei man zum Lösen dieser Gleichung die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  einführt, um es in ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung überzuführen.

Die resultierenden und zu lösenden Gleichungen haben dann die Form

$$\omega = \dot{\theta} \quad (63)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l} * \sin(\theta) \quad (64)$$

Da mit dem  $\sin(\theta)$  weiterhin eine Nichtlinearität vorhanden ist, ist diese Gleichung nicht



ohne Weiteres analytisch lösbar.<sup>4</sup> Um dieses Problem zu umgehen, gibt es zwei Ansätze. Man kann zum Einen die Kleinwinkelnäherung des Sinus verwenden, die es uns erlaubt, für kleine Auslenkungen den  $\sin(\theta)$  durch  $\theta$  zu ersetzen. Damit ist Glg.(63) nun zu einer linearen Gleichung geworden und kann analytisch gelöst werden. Der andere Ansatz wäre, die Nichtlinearität zu behalten und auf numerische Lösungsverfahren zum Lösen von Differentialgleichungen zurückzugreifen. Wir werden beides tun und die Ergebnisse vergleichen.

Dass die obige Differentialgleichung nicht die eines echten Pendels, das in der realen Welt existiert, ist, erkennt man daran, dass in diesem System keine Dissipation auftritt. Mit anderen Worten es gibt keinen Reibungsterm, der die Bewegungsenergie des schwingenden Systems langsam in Wärmeenergie umwandelt und es somit mit der Zeit zum Anhalten bringt. Solche Reibungen existieren jedoch in der realen Welt, weswegen wir auch hier eine Unterscheidung treffen werden. Es folgt nun eine Liste von Differentialgleichungen, die den besprochenen Systemen entspricht.

- $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0$  (I) Nichtlineares mathematisches Pendel
- $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$  (II) Lineares mathematisches Pendel
- $\ddot{\theta}(t) + r\dot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0$  (III) Nichtlineares gedämpftes Pendel

**Nichtlineares mathematisches Pendel (I):** Beginnen wir mit (I) dem nichtlinearen Pendel. Um diese Gleichung zu lösen, werden, wie schon erwähnt, numerische Lösungsverfahren gebraucht. Solche Verfahren, die imstande sind, Differentialgleichungen numerisch zu lösen, sind zum Beispiel das Euler-Verfahren oder das Runge-Kutta-Verfahren. Hier wird ein Runge-Kutta-Verfahren verwendet um die Gleichung (I) mit den Anfangsbedingungen  $\theta_0 = \pi/2$  und  $\omega_0 = 0$  zu lösen. Zusätzlich soll noch erwähnt sein, dass in der numerischen Berechnung der Faktor  $g/l = 1$  gesetzt wurde.

Die Ergebnisse werden geplottet

Abb. 5a zeigt, dass sich die Trajektorie auf einem stabilen Zyklus befindet und auch dort bleibt, da es in diesem System keine Dissipation gibt. Dies erkennt man auch daran, dass in Gleichung (I) kein Reibungsterm vorhanden ist. Die Amplitude der Auslenkung (Abb.5b) bleibt also zeitlich konstant. Auch die Frequenz mit der  $\theta$  zwischen  $\pi/2$  und  $-\pi/2$  oszilliert, ändert sich nicht.

**Vergleich zwischen (I) und (II):** Als nächstes wollen wir den linearisierten Fall des einfachen Pendels betrachten und mit den Ergebnissen des nichtlinearen Falls vergleichen. Gleichung (II) ist zwar rein analytisch lösbar, doch da es hier aber nicht um das Lösen von Bewegungsgleichungen geht, wird dies übersprungen und die Ergebnisse werden gleich geplottet.

Vergleicht man diese mit den Ergebnissen des nichtlinearen Pendels, sieht man, dass sich sowohl das Phasenraumportrait, als auch die Auslenkung in Abhängigkeit der Zeit

<sup>4</sup>Tatsächlich ist dieses Problem eines der wenigen nichtlinearen Systeme, die analytisch gelöst werden können, jedoch wird dazu die Reihenentwicklung des vollständigen elliptischen Integrals 1. Art benötigt. Da dies jedoch nicht ohne Weiteres machbar ist, wird im Weiteren angenommen, dass dieses Problem nur numerisch bewältigbar ist.

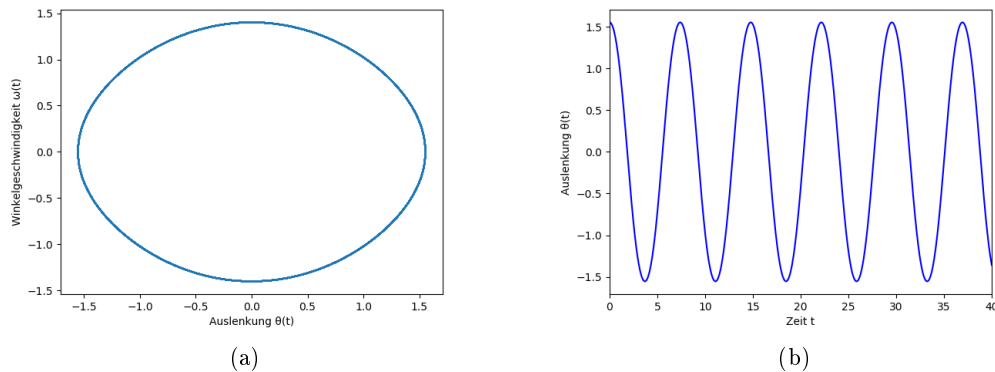


Abbildung 5: Phasenraumportrait (a) und zeitlicher Verlauf der Auslenkung  $\theta$  (b) des ungedämpften nichtlinearen Pendels

unterscheiden. In Abbildung 6a wurden für beide Fälle die gleichen Startbedingungen ( $\theta_0 = \pi/2$  und  $\omega_0 = 0$ ) verwendet. In Abb. 6b erkennt man auch einen Unterschied in der Periodendauer der Pendeloszillation. Dieser Unterschied ist in der Spektralanalyse der Auslenkung  $\theta$  noch deutlicher zu erkennen und wird in Abb. 7 dargestellt. Darin ist zu erkennen, dass sich sowohl die Frequenz  $f$ , als auch die Periodendauer  $T$  von  $\theta$ , im Fall des nichtlinearen Systems abhängig von den Startbedingungen verändern, während dies beim linearisierten System nicht der Fall ist. Zu erwähnen ist, dass auf der y-Achse in Abb.7 die Leistungsspektraldichte (PSE) aufgetragen ist, welche in unseren Überlegungen jedoch nicht weiter von Bedeutung ist.

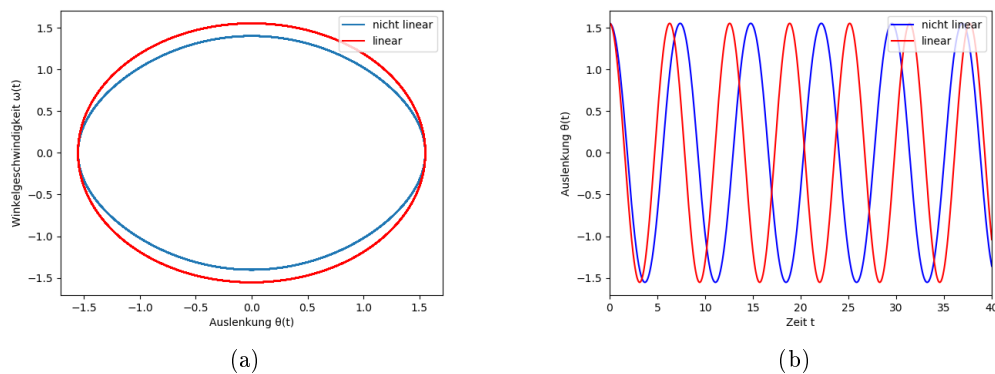


Abbildung 6: Vergleich des Phasenraumportraits (a) und des Verlaufs der Auslenkung  $\theta$  (b) zwischen linearen und nichtlinearen Fall

Anhand des deutlichen Unterschieds der Lösungen in Abb. 6 ist es nun berechtigt, die Frage nach der Gültigkeit der Kleinwinkelnäherung zu stellen. Betrachtet man die zwei Systeme nochmals, wählt jedoch andere Startbedingungen ( $\theta_0 = \pi/4$  und  $\omega_0 = 0$ ), ist es möglich die Gültigkeit der Kleinwinkelnäherung zu überprüfen. In Abb. 8 sieht man, dass sich mit kleiner werdender Ursprungsauslenkung, die Lösung der Kleinwinkelnäherung immer näher der Lösung des nichtlinearen Systems annähert. Dies ist auch in der Annäherung der Frequenz und Periodendauer in Abb.7 zu sehen.

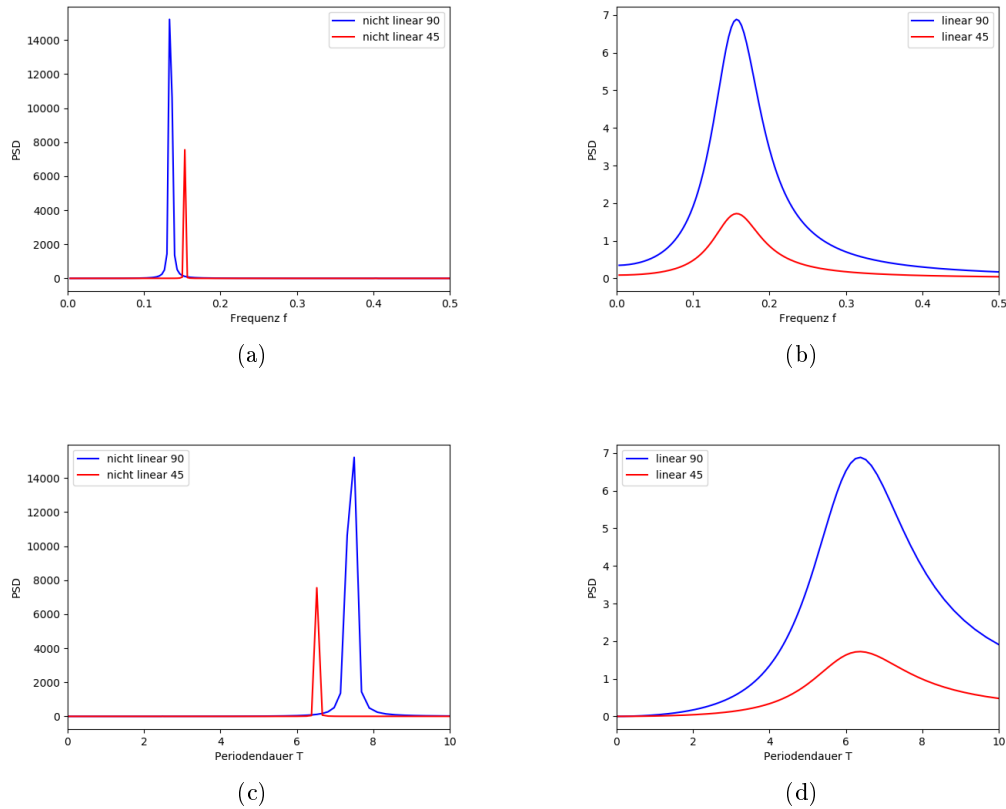


Abbildung 7: Fourieranalyse des Verlaufs der Auslenkung für die Startbedingungen  $\theta_0 = 90^\circ$  und  $\theta_0 = 45^\circ$ . (a) Frequenzspektrum für das nichtlineare System, (b) Frequenzspektrum für das lineare System, (c) Periodendauer für das nichtlineare System  $T_{90} = 7.50$ ,  $T_{45} = 6.52$ , (d) Periodendauer für das lineare System  $T_{90} = T_{45} = 6.38$

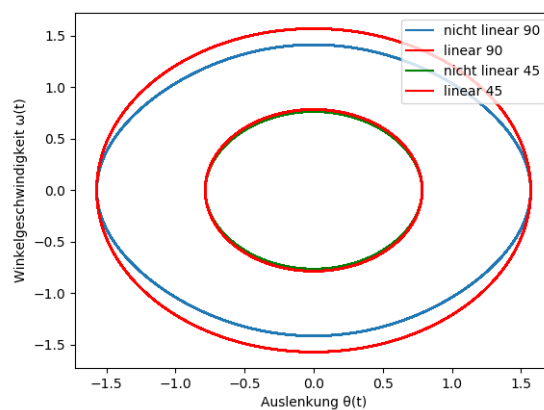


Abbildung 8: Vergleich des Phasenraumportraits zwischen linearen und nichtlinearen Fall für Ursprungsauslenkungen von  $\pi/2$  und  $\pi/4$

**Nichtlineares gedämpftes Pendel (III):** Zuguter Letzt betrachten wir noch Gleichung (III), bei der nun Dissipation mit in Spiel kommt. Der Reibungsterm  $r$  bewirkt

eine Umwandlung der im System enthaltenen Energie in Wärme. Man bemerke, dass dies in den Systemen (I) und (II) nicht der Fall war, in ihnen war die Gesamtenergie zeitlich konstant, wenngleich sie auch von den Startbedingungen  $\theta_0$  und  $\omega_0$  abhängig war.

Gleichung (III), welche nun wieder eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, wird wieder in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung übergeführt.

$$\omega = \dot{\theta} \quad (65)$$

$$\dot{\omega} = -r * \omega - \frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (66)$$

Der Bruch  $g/l = 1$  und  $r = 0.1$  bzw.  $r = 0.5$ . Die Startbedingungen sind  $\theta_0 = \pi/2$  und  $\omega_0 = 0$ . In Abb. 9 sieht man einen deutlichen Trend des Systems in Richtung Equilibrium. Je höher der Reibungsterm, desto schneller der Abklingvorgang. Dieses System, obwohl dissipativ, ist ebenfalls noch nicht chaotisch, hat jedoch, anders als die Systeme (I) und (II), einen weiteren Parameter, der für Unruhe sorgen kann.

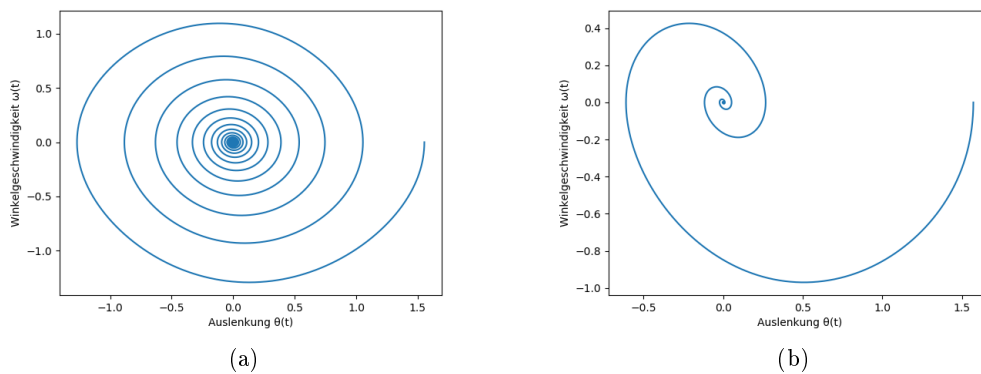


Abbildung 9: Phasenraumportraits des gedämpften nichtlinearen Pendel für  $r = 0.1$  (a) und  $r = 0.5$  (b)

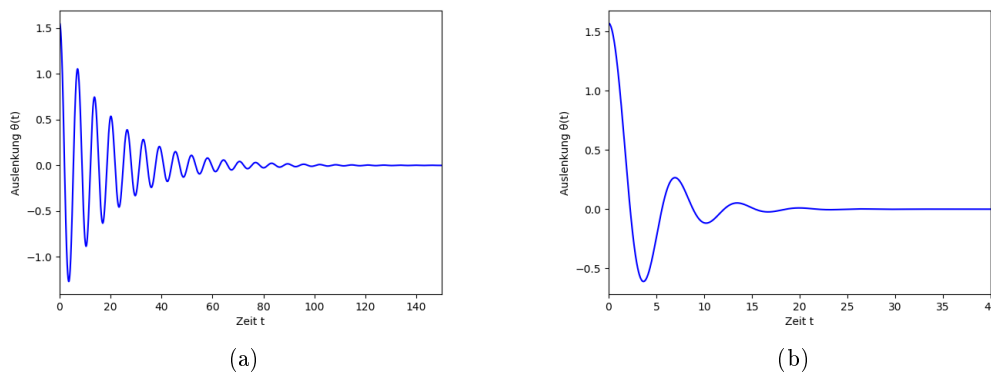


Abbildung 10: Auslenkung  $\theta$  des gedämpften nichtlinearen Pendel für  $r = 0.1$  (a) und  $r = 0.5$  (b)

Um nun die im ersten Teil besprochenen theoretischen Konzepte zur Anwendung zu bringen, überprüfen wir zunächst, ob dieses System auch nach obiger Definition dissipativ ist. Wie in Kap. 2.1 und 2.2 erwähnt, ist ein System dann dissipativ, wenn sich das Phasenraumvolumen mit der Zeit verkleinert. Ein quantitatives Maß dafür, wurde mit Glg.(14) eingeführt. Um Glg.(14) verwenden zu können, müssen wir zunächst das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{F}$  einführen. Dazu nehmen wir die Standardform der Bewegungsgleichung (III) her (Glg.(67/68)) und berechnen die zeitliche Ableitung der Trajektorie im Phasenraum.

$$\dot{\vec{\theta}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -r\omega - \sin(\theta) \end{pmatrix} = \vec{F}(\vec{\theta}) \quad (67)$$

Nun kann man Glg.(14) anwenden

$$\Lambda = \vec{\nabla} * \vec{F}(\vec{\theta}) = -r \quad (68)$$

Da  $r > 0$  ist, ist  $\Lambda < 0$  und daraus folgt, dass das System dissipativ ist. Es ist leicht zu überprüfen, dass die Systeme (I) und (II) nicht dissipativ (also konservativ) sind. In diesem Fall ist  $\Lambda = 0$ .

Aus Abb. 9 liegt die Vermutung nahe, dass sich das System (III) auf einen Fixpunkt zubewegt, den es in den Systemen (I) und (II) nicht gibt. Dieser Fixpunkt liegt bei  $\theta = \omega = 0$ . Um diesen Punkt genauer zu analysieren, bedienen wir uns dem Kap. 2.3. Der erste Schritt besteht darin, die Jacobimatrix von  $\vec{F}(\vec{x})$  zu berechnen, siehe Glg.(18):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & -r \end{pmatrix} \quad (69)$$

Setzt man nun den Fixpunkt in die Matrix ein und berechnet  $s$  und  $d$ , erhält man:

$$s = \frac{1}{2}(0 - r) = -\frac{r}{2} \quad (70)$$

$$d = 0 * (-r) + \cos(0) * 1 = 1 \quad (71)$$

Da in unserem System  $r > 0$  ist, folgt  $s < 0$  und  $d > s^2$ , was  $\mu_1 = \mu_2^*$ , negativer Realteil entspricht, daher ist der Fixpunkt  $\theta = \omega = 0$  von System (III) ein stabiler Strudel, was auch leicht anhand der Abbildungen erkennbar ist.

### 3.2 Periodisch getriebenes Pendel

**Aufgabenstellung:** Als letztes Beispiel dient das periodisch getriebene Pendel, welches ein Musterbeispiel für chaotisches Verhalten ist. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\theta} + r\dot{\theta} + \sin(\theta) = f\cos(\Omega t) \quad (72)$$

wobei  $r$  wie zuvor ein zur Geschwindigkeit proportionaler Reibungsparameter ist,  $\sin(\theta)$  ist eine zu  $\theta$  proportionale Rückstellkraft und der Term auf der rechten Seite fungiert als eine zeitlich periodische, äußere, anregende Kraft mit der Stärke  $f$  und der Frequenz  $\Omega$ .

Die Vorgangsweise ist gleich wie zuvor und bringen die Gleichung erstmal in ihre Standardform, zeigen, dass es sich um ein dissipatives System handelt, lösen dieses System von gekoppelten DGL's numerisch, plotten sowohl das Phasenraumportrait als auch den Verlauf der Auslenkung und betrachten anschließend weitere schon zuvor eingeführte Größen zur Charakterisierung des Verhalten des Systems.

Die Standardform des Systems wird wieder durch Einführung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  durchgeführt.

$$\dot{\omega} = -r\omega - \sin(\theta) + f\cos(\phi) \quad (73)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (74)$$

$$\dot{\phi} = \Omega \quad (75)$$

**Dissipation:** Um das quantitative Maß  $\Lambda$  für die Dissipation zu erhalten, wird zunächst die Divergenz des Phasenraumflusses berechnet.

$$\vec{F}(\vec{\theta}) = \dot{\vec{\theta}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -r\omega - \sin(\theta) + f\cos(\phi) \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$\Lambda = \nabla * \vec{F}(\vec{\theta}) = -r \quad (77)$$

Für jedes  $r > 0$  ist somit  $\Lambda < 0$  und damit ist das System dissipativ.

**Bifurkationsdiagramm:** Nun werden in Abhängigkeit eines Kontrollparameters die Phasenraumportraits und die zeitlichen Verläufe der Auslenkung  $\theta$  berechnet und graphisch dargestellt. Dieser Kontrollparameter ist hier die Stärke  $f$  der äußeren, antreibenden Kraft. Die Frequenz der äußeren Kraft wird fixiert auf  $\Omega = 2/3$  und der Reibungsparameter wird auf  $r = 0.5$  fixiert. Je nach Wert des Kontrollparameter wird sich das dynamische System nun anders verhalten und entweder chaotische oder periodische Eigenschaften vorweisen.

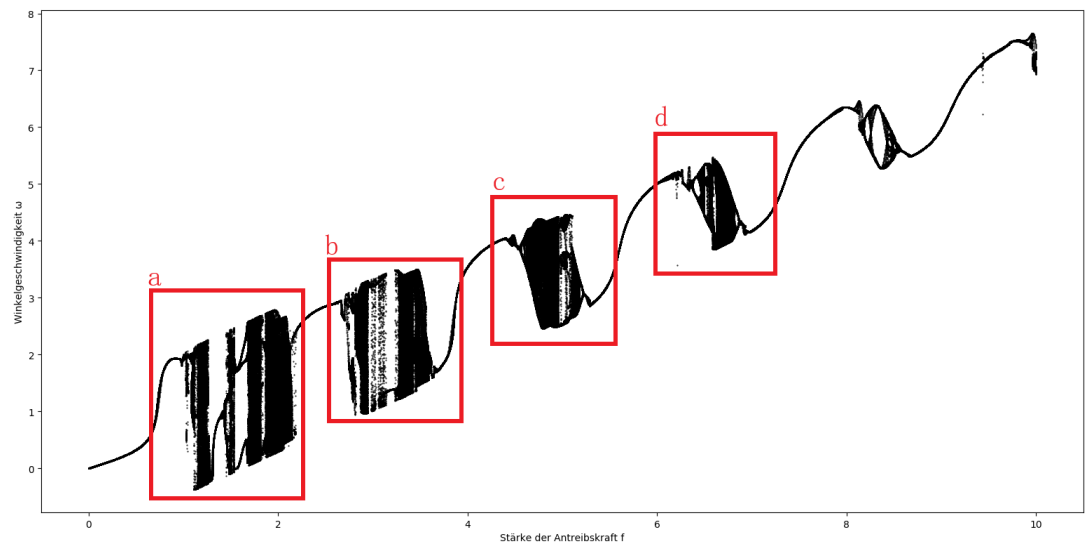


Abbildung 11: Bifurkationsdiagramm des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels für einen Kontrollparameterbereich von  $f = 0$  bis  $f = 10$ . Die roten Bereiche sind in Abb. 12 vergrößert dargestellt

Da  $f$  nun allerdings ein kontinuierlicher Parameter ist, muss man wissen, an welchen Stellen man das System abtastet, wenn man es nicht an jeder Stelle einzeln betrachten will. Dafür kann man sich das Bifurkationsdiagramm zunutze machen.<sup>5</sup> Dieses Diagramm gibt einen globalen Überblick über die Anzahl der Perioden bzw. der möglichen Werte einer Phasenraumkoordinate, in Abhängigkeit des Systemparameters. In Abb. 11 sieht man dieses Diagramm für das periodisch getriebene, gedämpfte Pendel für einen Parameterbereich von 0 bis 10. In diesem Diagramm kann man ablesen, für welche  $f$ -Werte sich das System periodisch oder chaotisch verhält.

In Abb. 13 ist der Parameterbereich von 0.9 bis 1.6 vergrößert. In ihm werden 8  $f$ -Werte ausgewählt, an denen das System genauer untersucht werden soll. Natürlich können auch beliebige andere Werte untersucht werden, nur die beobachtbaren Phänomene werden die Gleichen bleiben.

<sup>5</sup>Eine Bifurkation ist eine plötzliche, in Abhängigkeit eines Kontrollparameters auftretende Änderung des Lösungsverhaltens. Zum Beispiel eine Aufspaltung von einem periodischen Orbit zu zwei periodischen Orbits. Nähere Informationen dazu findet man in [4] (Kapitel 3 Kapitel 6)

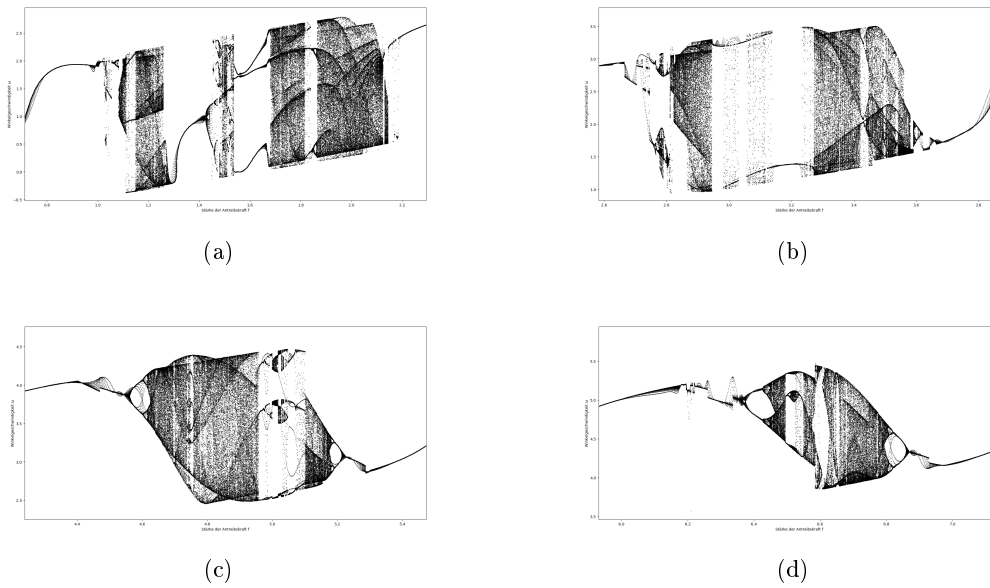


Abbildung 12: Bifurkationsdiagramme des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels für unterschiedliche Bereiche von  $f$

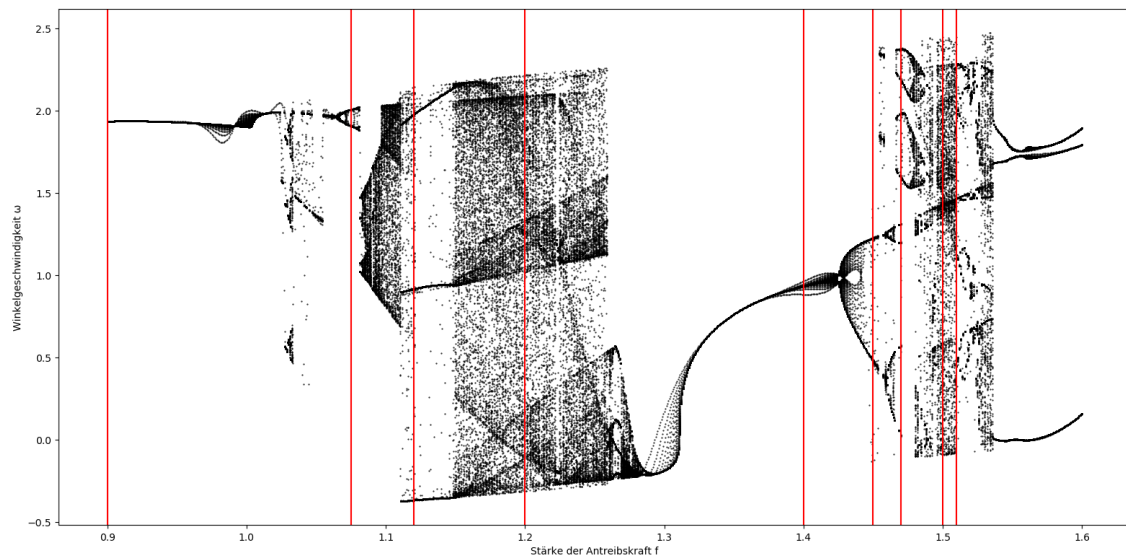


Abbildung 13: Bifurkationsdiagramm des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels. Die roten Linien sind an jenen  $f$ -Werten, an denen Phasenraumportraits und Poincaré-Schnitte gemacht werden



**Phasenraumportrait und Auslenkungsverlauf:** In Abb. 14 und 15 wird deutlich, wie der Parameter  $f$  das Verhalten des Systems beeinflusst. Bei  $f = 0.9$  liegt ein periodisches Verhalten mit fester, einfacher Periode vor. Bei  $f = 1.075$  findet eine Periodenverdoppelung statt und das Pendel schwingt nun mit zwei, wenn auch nur leicht unterschiedlichen Frequenzen. Eine weitere Periode kommt bei  $f = 1.12$  dazu, um dann bei  $f = 1.2$  ins Chaos zu verfallen. In diesem Fall gibt es keine feste Frequenz und das System ist sehr empfindlich bezüglich den Anfangsbedingungen. Kennt man diese genau, kann man die Entwicklung des Systems genau vorhersagen. Weichen diese jedoch nur leicht ab, kann man nicht vorhersagen, wo sich das Pendel zu einer Zeit in der Zukunft befindet. Wie weit man das System mit abweichenden Anfangsbedingungen vorhersagen kann, hängt von der Größe der Abweichung ab und kann mit der in Kap. 2.4 eingeführten mittleren Vorhersagezeit bestimmt werden. Das chaotische Verhalten des Systems zeichnet sich im Verlauf der Auslenkung durch eine Vielzahl von Frequenzen aus, das an ein Rauschen erinnert. Je weiter  $f$  auf 1.4 zugeht, desto periodischer wird es wieder, bis es bei  $f = 1.4$  wieder nur eine Periode hat. Ab dann finden weitere Periodenverdoppelungen statt, bis sich bei  $f = 1.5$  wieder chaotisches Verhalten durchsetzt. Der Übergang von Periodizität in Chaos mittels Periodenverdoppelung, wird Bifurkationskaskade genannt.

**Frequenzanalyse:** Um zu verdeutlichen, dass sich zu gewissen Werten von  $f$  mehrere Perioden befinden, wurden die Frequenzspektra (Abb. 16) erstellt. Zum Vergleich wurde in jedes Spektrum das Spektrum von  $f = 0.9$  eingefügt. Es ist ersichtlich, dass sich in den chaotischen Bereichen mehrere Frequenzen im Spektrum befinden, wohingegen sich bei  $f = 0.9$  und  $f = 1.4$  nur eine durchsetzt. Bei  $f = 1.45$  gibt es noch einen zweiten Peak, der auf die Periodenverdopplung zurückzuführen ist. Die kleinen Peaks sind auf die anfänglichen Einschwingvorgänge, die in die Fourieranalyse miteingeflossen sind zurückzuführen. Sie tragen jedoch nichts zum Langzeitverhalten des Systems bei.

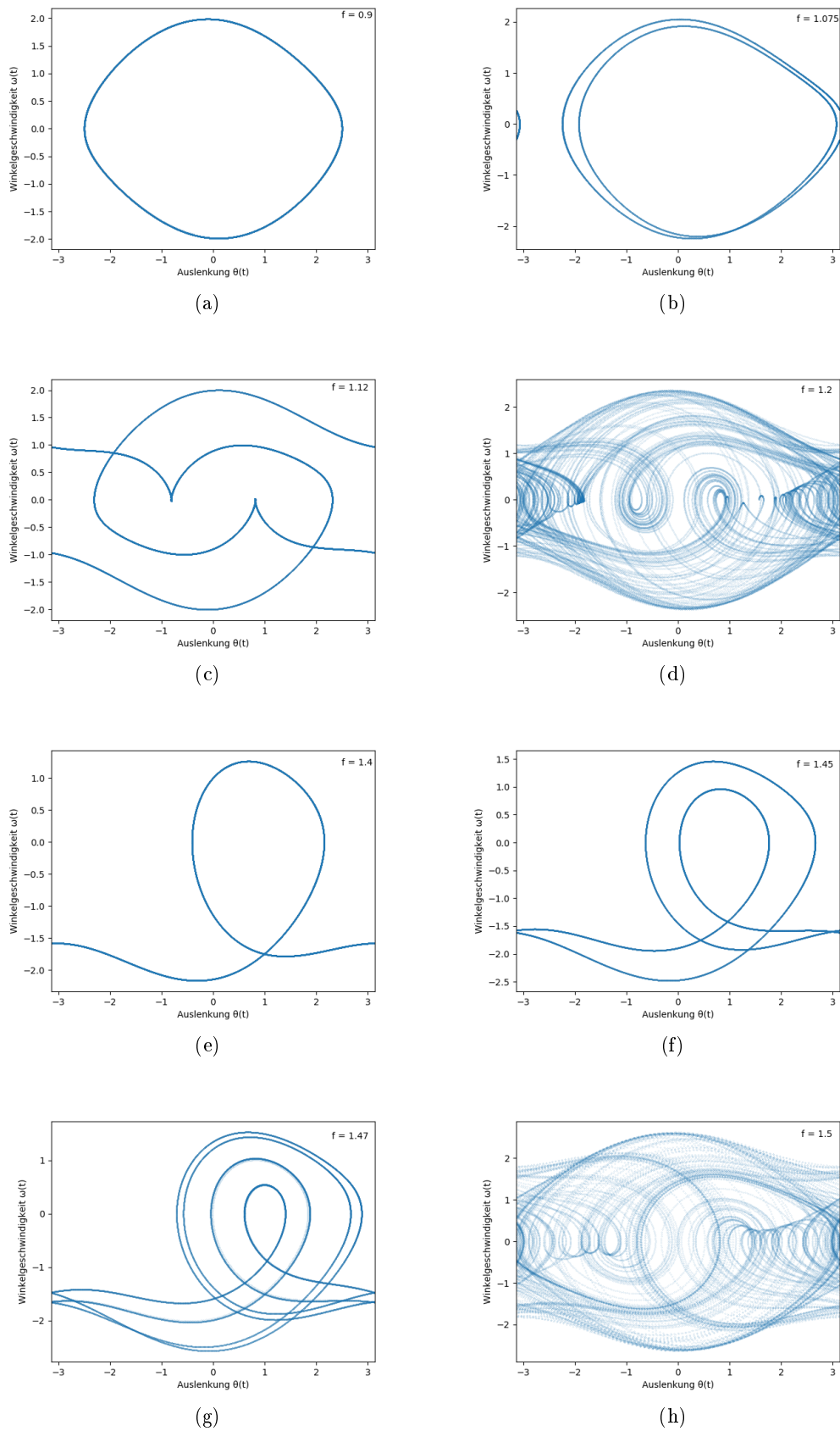


Abbildung 14: Phasenraumportrait des periodisch getriebenen Pendels für unterschiedliche Stärken der Antriebskraft  $f$

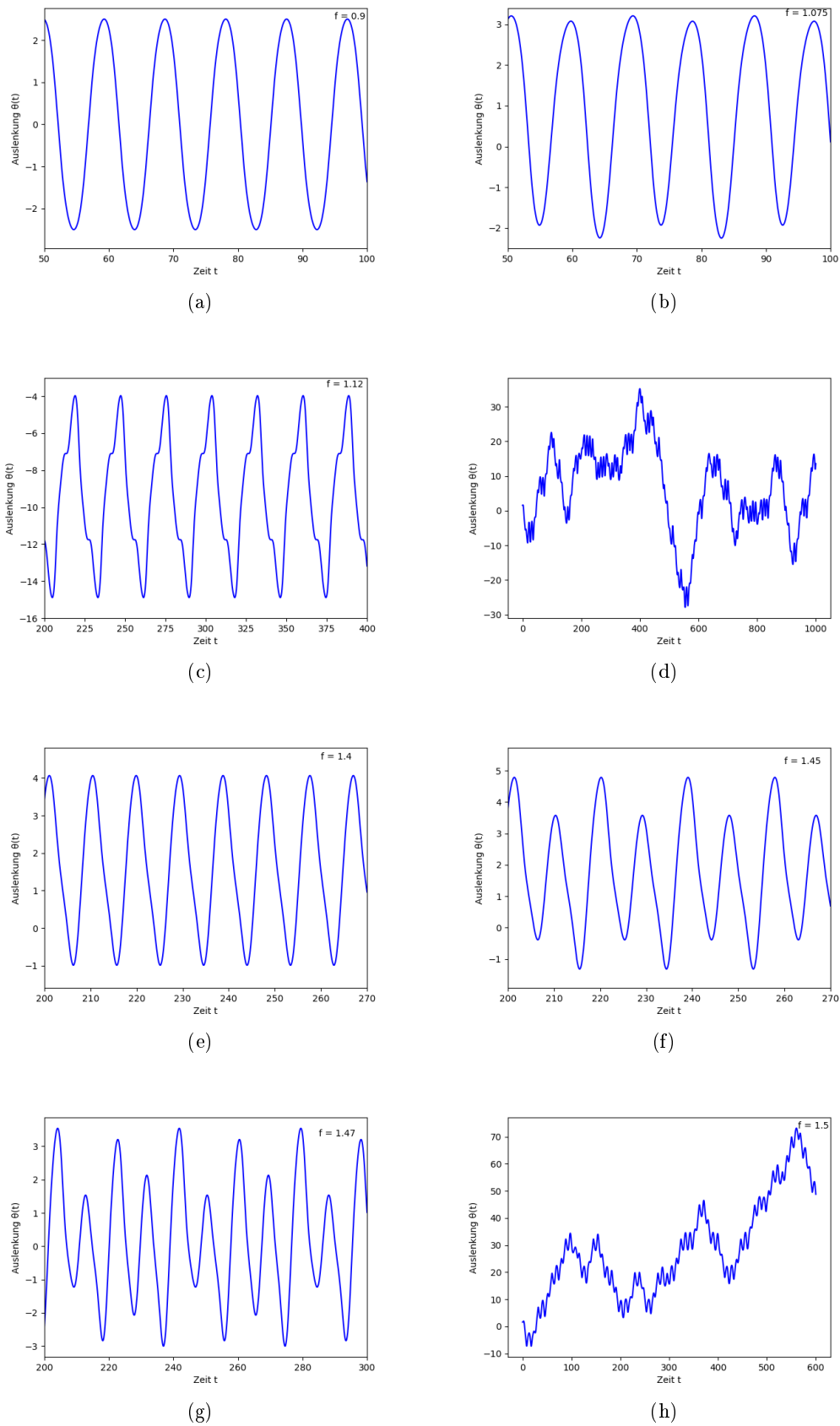


Abbildung 15: Zeitlicher Verlauf der Auslenkung  $\theta$  des periodisch getriebenen Pendels für unterschiedliche Stärken der Antriebskraft  $f$

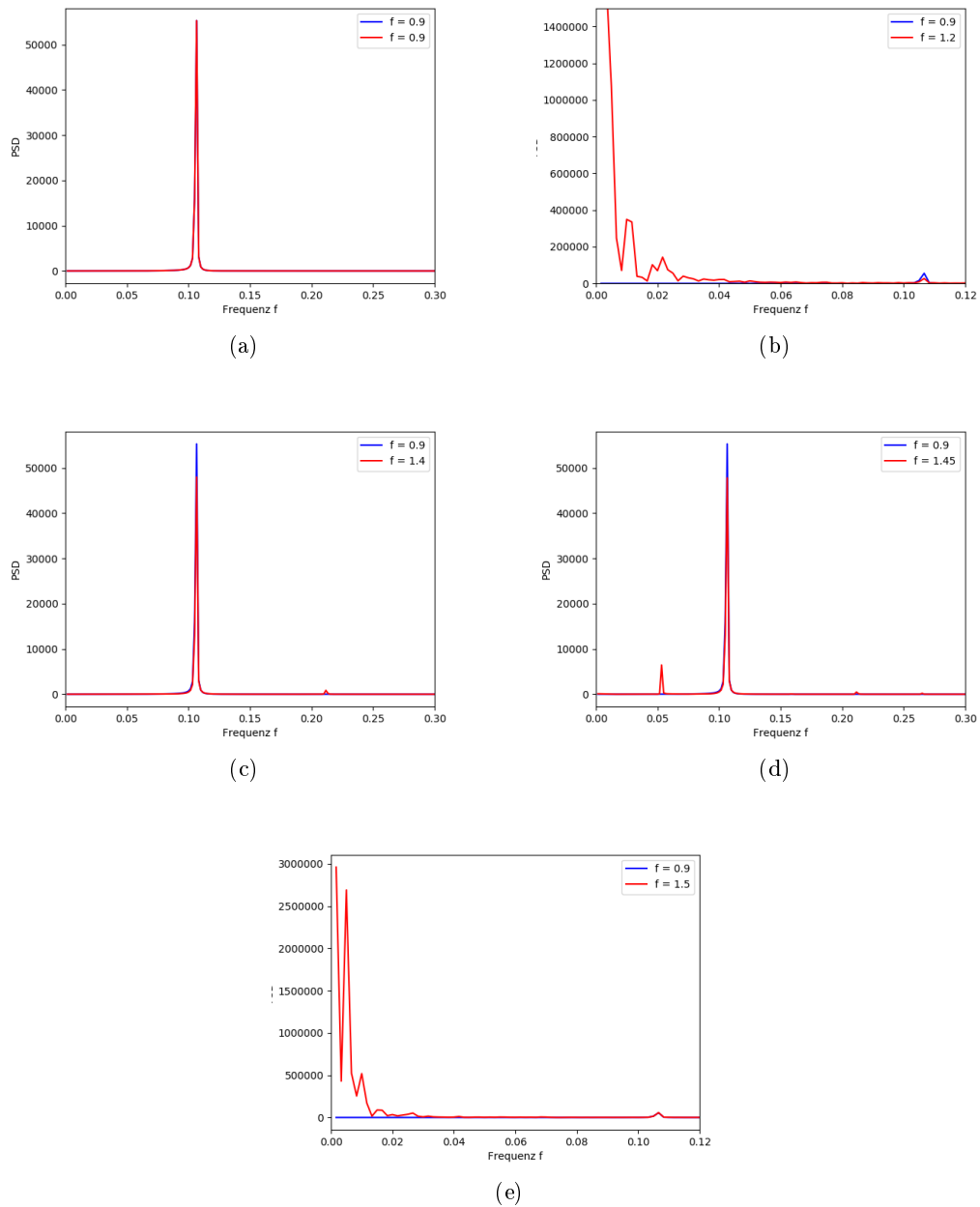


Abbildung 16: Fourieranalyse des Verlaufs der Auslenkung für unterschiedliche Kontrollparameterwerte  $f$

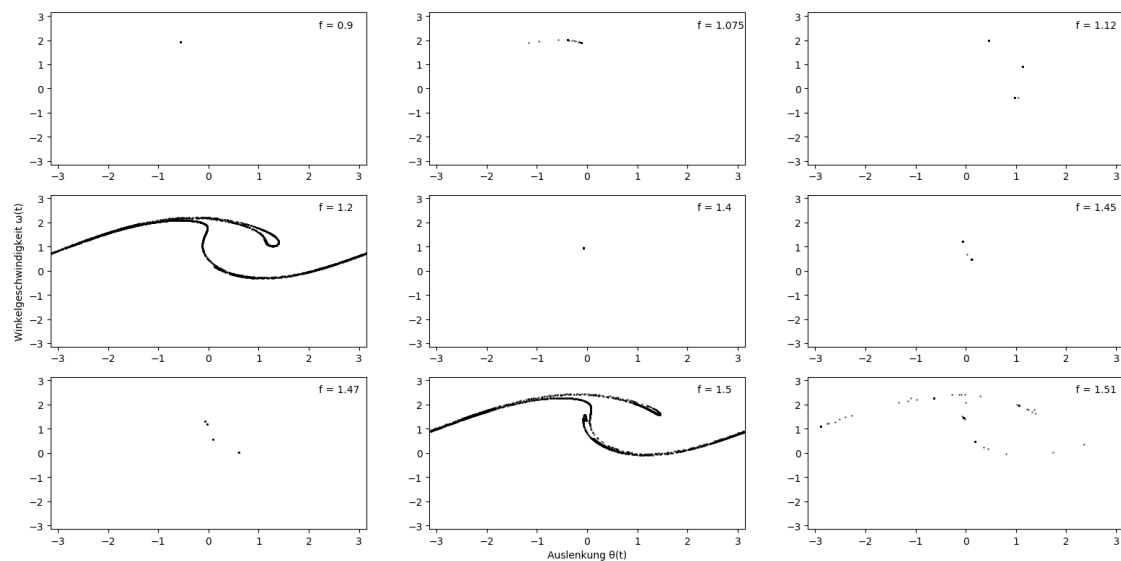


Abbildung 17: Poincaré-Schnitte der Phasenraumtrajektorien bei unterschiedlichen Werten für  $f$

**Poincaré-Schnitt:** Betrachtet man die Poincaré-Schnitte der Phasenraumtrajektorien für unterschiedliche Kontrollparameter (Abb. 17), erkennt man, dass sich periodisches Verhalten im Poincaré-Schnitt durch einzelne Punkte auszeichnet, die jedoch immer am gleichen Ort bleiben. Weist das System nun allerdings chaotisches Verhalten auf, so erkennt man einen seltsamen Attraktor mit fraktaler Hausdorffdimension (siehe Kap. 2.4).

Betrachtet man den Poincaré-Schnitt für  $f = 1.2$  und  $f = 1.5$  genauer, erkennt man auch warum dieses Objekt keine ganzzahlige (also eine fraktale) Dimension hat. Zoomt man in Abb. 18 rein, erkennt man, dass die scheinbar dünne Fläche (also 2-dimensional), tatsächlich eine Anhäufung von mehreren Punkten ist, die bei langer Iteration zu einer Linie werden (also 1-dimensional). Deshalb liegen die Hausdorffdimension und die Boxcounting-Dimension des Schnittes zwischen 1 und 2. Auf eine genaue numerische Bestimmung dieser verallgemeinerten Dimensionen wird hier aufgrund des erhöhten Aufwands verzichtet.

**Liapunovexponent:** Um das Chaos in diesem System weiter quantifizieren zu können, bedient man sich weiter an den Konzepten aus Kap. 2.3 und 2.4, nämlich dem Liapunovexponent und der Kolmogorov-Entropie. In Abb. 21 wurden die einzelnen Liapunovexponenten, in Abhängigkeit vom Kontrollparameter  $f$  geplottet. Dort wo der Exponent negativ ist, entfernen sich benachbarte Trajektorien im Phasenraum nicht exponentiell voneinander und das System ist periodisch. Dort wo er positiv ist, weist das System deterministisches Chaos auf. Vergleicht man nun Abb. 21 mit Abb. 13, so erkennt man, dass sich dort, wo die Bifurkationskaskaden beginnen, der Liapunovexponent von einem negativen Wert immer mehr der Nulllinie nähert, bis er schließlich positiv wird, was dem mit vielen Punkten ausgefüllten Bereich im Bifurkationsdiagramm entspricht. Es ist noch zu erwähnen, dass es sich hier um ein System mit 3 Liapunovexponenten handelt, da dieses System insgesamt 3 Freiheitsgrade besitzt. Abb. 21 bezieht sich dabei auf den größten ( $\lambda_1$ ).  $\lambda_2 = -0.25$ , da im Falle der maximalen Stabilität die Summe aller  $\lambda$  gleich dem Wert des negativen Reibungsparameters ( $r = -0.5$ ) sein muss.  $\lambda_3 = 0$ , da der dazugehö-

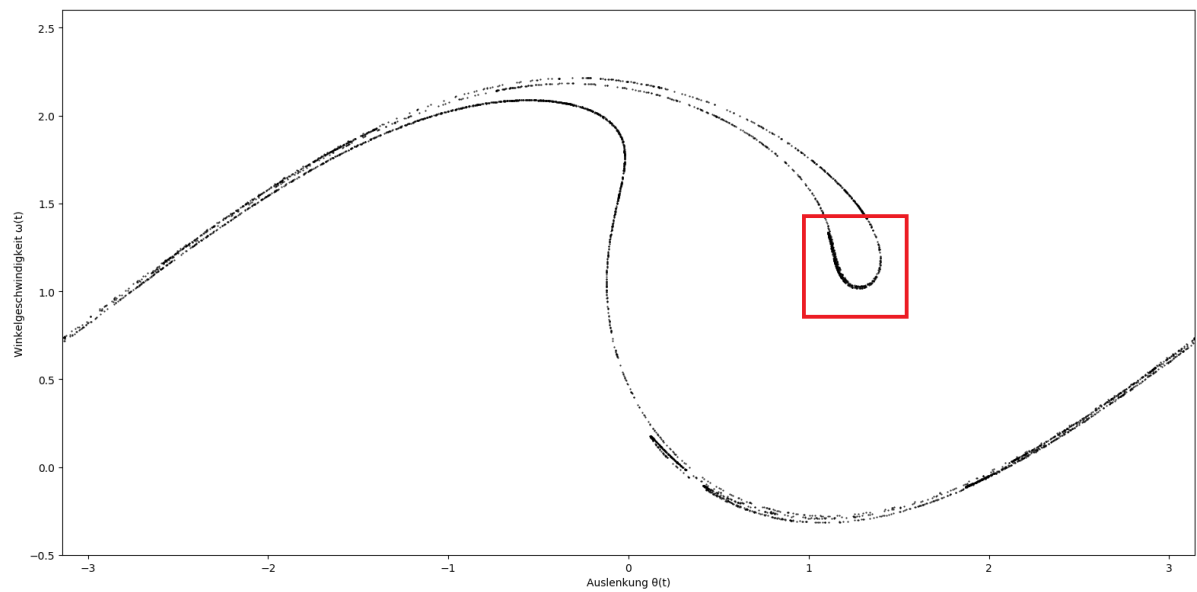


Abbildung 18: Vergrößerter Poincaré-Schnitt für  $f = 1.2$ , in einem Bereich mit chaotischem Verhalten

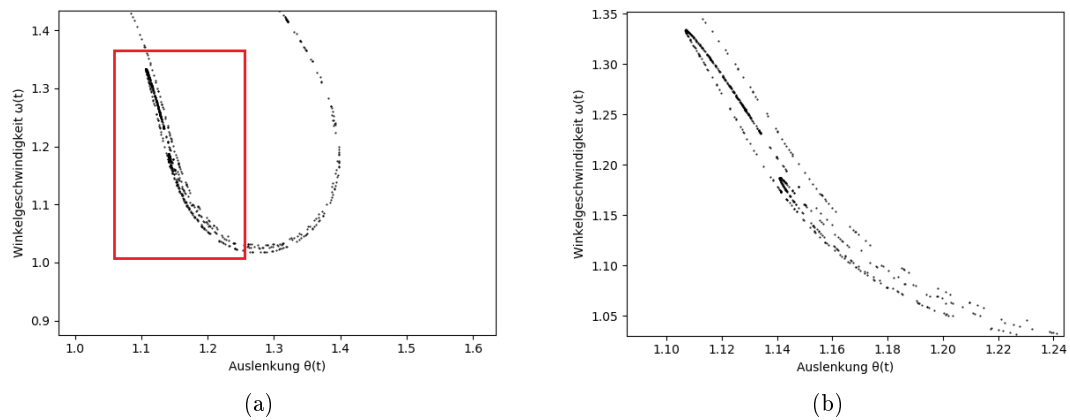


Abbildung 19: Zoom in den Poincaré-Schnitt bei  $f = 1.2$

rige Freiheitsgrad  $\phi$  ist. Wenn nun anhand der  $\lambda_i$  der Attraktortyp identifiziert werden soll, betrachtet man wieder Abb. 3. Im Fall von  $\lambda_1 < 0$ , bekommt man  $(0,-,-)$  und der Attraktortyp ist ein stabiler Grenzzyklus. Wenn nun allerdings  $\lambda_1 > 0$  wird, bekommt man  $(+,0,-)$  und man erhält einen seltsamen Attraktor. [2](S. 500, 501)

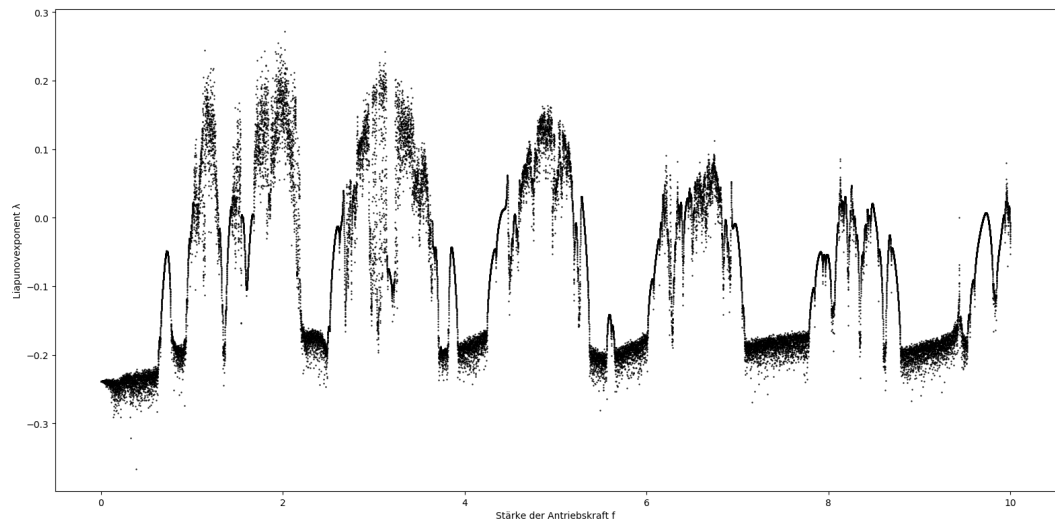


Abbildung 20: Liapunovexponent in Abhängigkeit des Kontrollparameters  $f$

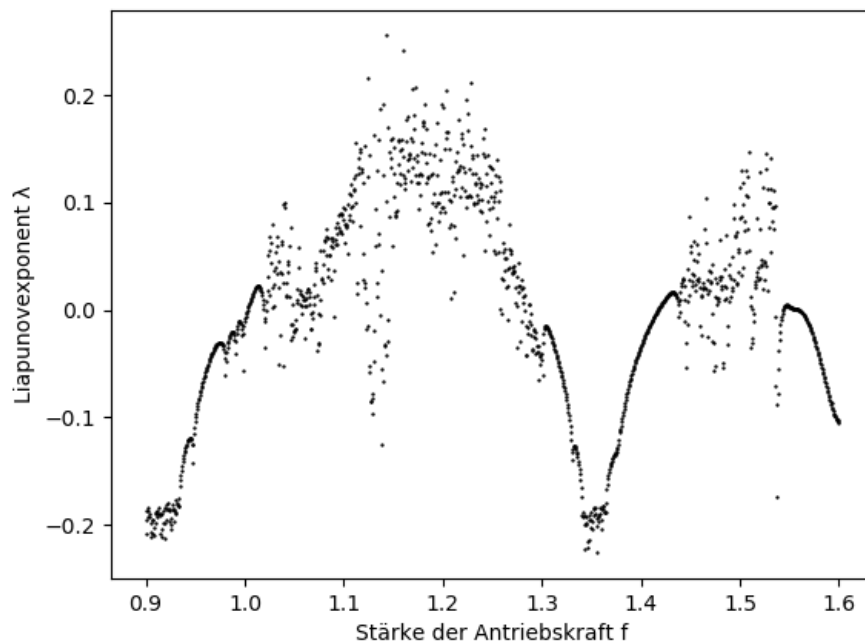


Abbildung 21: Liapunovexponent in Abhängigkeit des Kontrollparameters im Parameterbereich von  $f = 0.9$  bis  $f = 1.6$

**Kolmogorov-Entropie:** Obwohl sich die Kolmogorov-Entropie zwar auch über Glg. (58) berechnen lässt, ist es hier von Vorteil, sie über den Liapunovexponenten zu berechnen.

Da dieser nicht von  $\vec{\theta}$  abhängt, ist  $K$  nach Glg. (59) zu berechnen:

$$K = \sum_i \lambda_i^+(\vec{x}) \quad (78)$$

Nun kann man  $K$  aus der Summe der positiven Liapunovexponenten ermitteln. Da lediglich  $\lambda_1$  in chaotischen Bereichen größer als 0 ist, ist die Kolmogorov-Entropie in unserem Fall

$$K = \begin{cases} \lambda_1 & \text{für } \lambda_1 \geq 0 \\ 0 & \text{für } \lambda_1 < 0 \end{cases} \quad (79)$$

Dies ergibt auch Sinn, wenn man über die Aussage der Kolmogorov-Entropie nachdenkt. Eine positive Kolmogorov-Entropie ist gleichzusetzen mit dem Verlust an Information mit voranschreitender Zeit. Sie ist daher eine positive Konstante für den Fall, dass das System deterministisches Chaos aufweist und 0 sonst.

**Mittlere Vorhersagezeit:** Mithilfe von  $K$  können nun auch Rückschlüsse auf die mittlere Vorhersagezeit  $T_m$  getroffen werden.

$$T_m \propto \frac{1}{K} \log\left(\frac{1}{l}\right) \quad (80)$$

Ohne genau zu definieren wie groß  $l$  ist, ist es erkennbar, dass überall dort wo  $\lambda_1$  negativ ist, also dort wo  $K = 0$  ist,  $T_m$  unendlich wird und der Verlauf des Systems in alle Zeit vorhersagen werden kann, was auch einleuchtet, da dort wieder kein chaotisches Verhalten auftritt. In den Bereichen, wo  $K_m > 0$  ist, hängt die mittlere Vorhersagezeit von der Genauigkeit ab, mit der man die Anfangsbedingungen bestimmen kann. Doch selbst wenn man die Anfangsbedingungen auf ein  $l \ll 1$  bestimmen kann, wird die mittlere Vorhersagezeit nicht dementsprechend groß, da die Genauigkeit lediglich mit dem Logarithmus in die Gleichung eingeht.

**Weitere chaotische Systeme:** Phänomene, bei denen es von Bedeutung ist, mit Nicht-linearität und chaotischem Verhalten von Systemen umgehen zu können, gibt es in der Natur zu Genüge. Jedoch ist es auch immer eine Frage des Nutzens, da man viele Systeme mit Tricks wie der Kleinwinkelnäherung linearisieren kann und die Ergebnisse ausreichend sind.

Ein gutes Beispiel für einen weiteren solchen Trick findet sich bei der Berechnung von Planetenbahnen. Das Keplerproblem, bei dem sich zwei Körper in ihrem gegenseitigen Schwerfeld befinden, ist exakt lösbar. Diese Lösung enthält dann die Information über die Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Körper, zu jeder Zeit. Bezogen auf das System Erde-Sonne, bedeutet das, dass wir die Erdumlaufbahn exakt berechnen können. Nun ist das Sonnensystem allerdings kein Zweikörperproblem, sondern wegen allen anderen Planeten und Objekten im Sonnensystem ein Vielkörperproblem, welches wiederum nicht exakt lösbar ist. Dieses System weist ebenfalls deterministisches Chaos



auf, was bedeutet, dass wir nicht exakt vorhersagen können, wo sich die Planeten in einer Zeit beliebig weit in der Zukunft befinden werden. Jedoch müssen wir das auch nicht zwangsweise, es ist von der Fragestellung abhängig. Eine Fragestellung bei der es sich lohnt sich mit chaotischem Verhalten zu beschäftigen, ist das Herzkammerflimmern.

Es stellt sich nämlich heraus, dass die scheinbar willkürliche Kontraktion des Herzens beim Herzkammerflimmern aufgrund von deterministisch chaotischen, elektrischen Impulsen entsteht. Der Übergang von einem periodischen Herzschlag zu einem Chaotischen läuft ebenfalls über Bifurkationskaskaden. Die Kenntnis über dieses Verhalten rettet somit Leben, da es so möglich ist, mit gezielten elektrischen Impulsen den Herzschlag wieder zu stabilisieren. [5](~~chaos and the transition to ventricular fibrillation~~)

## 4 Zusammenfassung

Nach anfänglichen Erklärungen des Grundvokabulars der nichtlinearen Mechanik wurden im Laufe der Arbeit Methoden hergeleitet, um dissipative, chaotische Systeme zu charakterisieren und ihnen quantitative Kennwerte zuzuweisen. Konkret wurde in diesem Zuge zuerst ein Ausdruck für die Phasenraumkontraktion zur Bestimmung der Dissipation des Systems hergeleitet. Danach wurde die Stabilität von sowohl zeitunabhängigen als auch zeitabhängigen Fixpunkten betrachtet, wobei man eine parameterabhängige Charakterisierungsmethode solcher Fixpunkte gefunden hat. Da ein dynamisches System mit mehreren Freiheitsgraden jedoch nicht ausschließlich auf Fixpunkte hinsteuert, vor allem nicht, wenn es sich chaotisch verhält, hat man mit dem Liapunovexponenten ein Maß für die Sensibilität des Systems auf Änderungen der Anfangsbedingungen hergeleitet, was es einen tieferen Einblick in das Verhalten des chaotischen Systems ermöglicht. Mit dem Einführen der Konzepte des seltsamen Attraktors, sowie der Kolmogorov-Entropie, ist es gelungen, ein Arsenal an verschiedenen Methoden aufzustellen, das es erlaubt mittels numerischen Methoden chaotische, dissipative Systeme zu analysieren. Diese Konzepte sind in den zwei anschließenden Beispielen nochmals verinnerlicht und veranschaulicht worden.

## 5 Bibliographie und Abbildungsverzeichnis

### Abbildungsverzeichnis

1	Phasenraum mit Trajektorien für das ebene Pendel . . . . .	7
2	Stabilitätstypen eines zweidimensionalen Fixpunktes. a) Stabiler Knoten, b) Instabiler Knoten, c) Sattel, d) Stabiler Strudel, e) Instabiler Strudel, f) Wirbel . . . . .	13
3	Mögliche Attraktortypen für ein System mit drei Freiheitsgraden . . . . .	19
4	Fadenpendel . . . . .	24
5	Phasenraumportrait (a) und zeitlicher Verlauf der Auslenkung $\theta$ (b) des ungedämpften nichtlinearen Pendels . . . . .	26
6	Vergleich des Phasenraumportraits (a) und des Verlaufs der Auslenkung $\theta$ (b) zwischen linearen und nichtlinearen Fall . . . . .	26
7	Fourieranalyse des Verlaufs der Auslenkung für die Startbedingungen $\theta_0 = 90^\circ$ und $\theta_0 = 45^\circ$ . (a) Frequenzspektrum für das nichtlineare System, (b) Frequenzspektrum für das lineare System, (c) Periodendauer für das nichtlineare System $T_{90} = 7.50$ , $T_{45} = 6.52$ , (d) Periodendauer für das lineare System $T_{90} = T_{45} = 6.38$ . . . . .	27
8	Vergleich des Phasenraumportraits zwischen linearen und nichtlinearen Fall für Ursprungsauslenkungen von $\pi/2$ und $\pi/4$ . . . . .	27
9	Phasenraumportraits des gedämpften nichtlinearen Pendel für $r = 0.1$ (a) und $r = 0.5$ (b) . . . . .	28
10	Auslenkung $\theta$ des gedämpften nichtlinearen Pendel für $r = 0.1$ (a) und $r = 0.5$ (b) . . . . .	28
11	Bifurkationsdiagramm des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels für einen Kontrollparameterbereich von $f = 0$ bis $f = 10$ . Die roten Bereiche sind in Abb. 12 vergrößert dargestellt . . . . .	31
12	Bifurkationsdiagramme des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels für unterschiedliche Bereiche von $f$ . . . . .	32
13	Bifurkationsdiagramm des periodisch getriebenen, gedämpften Pendels. Die roten Linien sind an jenen $f$ -Werten, an denen Phasenraumportraits und Poincaré-Schnitte gemacht werden . . . . .	32
14	Phasenraumportrait des periodisch getriebenen Pendels für unterschiedliche Stärken der Antriebskraft $f$ . . . . .	34
15	Zeitlicher Verlauf der Auslenkung $\theta$ des periodisch getriebenen Pendels für unterschiedliche Stärken der Antriebskraft $f$ . . . . .	35
16	Fourieranalyse des Verlaufs der Auslenkung für unterschiedliche Kontrollparameterwerte $f$ . . . . .	36
17	Poincaré-Schnitte der Phasenraumtrajektorien bei unterschiedlichen Werten für $f$ . . . . .	37
18	Vergrößerter Poincaré-Schnitt für $f = 1.2$ , in einem Bereich mit chaotischem Verhalten . . . . .	38
19	Zoom in den Poincaré-Schnitt bei $f = 1.2$ . . . . .	38
20	Liapunovexponent in Abhängigkeit des Kontrollparameters $f$ . . . . .	39
21	Liapunovexponent in Abhängigkeit des Kontrollparameters im Parameterbereich von $f = 0.9$ bis $f = 1.6$ . . . . .	39

## Literatur

- [1] H. G. SCHUSTER. *Deterministisches Chaos: eine Einführung*. Wiley-VCH Weinheim, 1994.
- [2] W. GREINER. *Klassische Mechanik II*, Band 8. Harri Deutsch, 2008.
- [3] K. PAWELZIK, H. SCHUSTER. *Generalized dimensions and entropies from a measured time series*. *Phys.Rev.A* **35** (1987) 481.  
doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.35.481>
- [4] P. HOLMES, J. GUCKENHEIMER. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [5] J. N. WEISS, A. GARFINKEL, H. S. KARAGUEUZIAN, Z. QU, P.-S. CHEN. *Chaos and the Transition to Ventricular Fibrillation, A New Approach to Antiarrhythmic Drug Evaluation*. *Circulation* **99** (1999) 2819.  
doi:<https://doi.org/10.1161/01.CIR.99.21.2819>