

# Realistische Quantum Gates

Peter Pichler

27.06.2013

# Inhaltsverzeichnis

- 1 Einführung
  - Qubits
  - Quantum Gates
- 2 Realistische Funktion
  - Optimierung
  - Ergebnisse
- 3 Wechselwirkung mit zweitem Spin
  - Grundlagen
  - Ergebnisse
- 4 Zusammenfassung

# EINFÜHRUNG

# Qubits

- quantenmechanisch

# Qubits

- quantenmechanisch
- 2 Niveau - System

# Qubits

- quantenmechanisch
- 2 Niveau - System
- Superposition (Linearkombination)

# Messung

Qubit im Zustand  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

Nach Messung: mit Wahrscheinlichkeit  $a^2$  in Zustand  $|0\rangle$  und mit Wahrscheinlichkeit  $b^2$  in Zustand  $|1\rangle$

# Messung

Qubit im Zustand  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$

Nach Messung: mit Wahrscheinlichkeit  $a^2$  in Zustand  $|0\rangle$  und mit Wahrscheinlichkeit  $b^2$  in Zustand  $|1\rangle$

## Messung

Superposition wird durch Messung zerstört



# Realisierungsmöglichkeiten

- Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen

# Realisierungsmöglichkeiten

- Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen
- Polarisation von Photonen

# Realisierungsmöglichkeiten

- Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen
- Polarisation von Photonen
- Zwei metastabile Zustände eines Atoms

# Quantum Gates

Um Algorithmen auszuführen, ist es notwendig Zustände zu manipulieren  $\Rightarrow$  Gates

# NOT - Gate

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Das NOT Gate dreht den Zustand um  $180^\circ$ . Es existiert klassisch und quantenmechanisch

# Hadamard - Gate

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Das Hadamard Gate dreht den Zustand um  $90^\circ$ . Es existiert nur quantenmechanisch

# Realisierungsmöglichkeiten

- Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen: oszillierendes, transversales Magnetfeld

# Realisierungsmöglichkeiten

- Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen: oszillierendes, transversales Magnetfeld
- Photonen: Laserpuls



# Realisierungsmöglichkeiten

- Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen: oszillierendes, transversales Magnetfeld
- Photonen: Laserpuls

In dieser Arbeit: Betrachtung von Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen in einem oszillierenden, transversalen Magnetfeld

Zeitabhängige Störung

$$f(t) = g(t)\Omega e^{it}$$

## Hamilton Operator des Systems

$$\hat{H} = \epsilon |1\rangle \langle 1| + f(t) |1\rangle \langle 0| + f^*(t) |0\rangle \langle 1|$$

Zustand  $|\psi\rangle = a(t) |0\rangle + b(t) |1\rangle$

liefert gekoppelte DGLn

$$\dot{a}(t) = -ig(t)e^{-i\epsilon t} b(t)$$

$$\dot{b}(t) = -ig^*(t)e^{i\epsilon t} a(t)$$

# Ziel der Bachelorarbeit

- 1 Eine realistische Funktion  $g(t)$  finden, die die beiden Gates in der kürzesten Zeit darstellt.

## Ziel der Bachelorarbeit

- 1 Eine realistische Funktion  $g(t)$  finden, die die beiden Gates in der kürzesten Zeit darstellt.  
Restriktion:  $\frac{dg(t)}{dt} \leq \frac{1}{\sigma}$

# Ziel der Bachelorarbeit

- 1 Eine realistische Funktion  $g(t)$  finden, die die beiden Gates in der kürzesten Zeit darstellt.  
Restriktion:  $\frac{dg(t)}{dt} \leq \frac{1}{\sigma}$
- 2 Betrachten eines zweiten Spins, der mit dem ersten wechselwirkt  $\Rightarrow$  Dichtematrixformalismus

# REALISTISCHE FUNKTION

# Minimierung einer Kostenfunktion

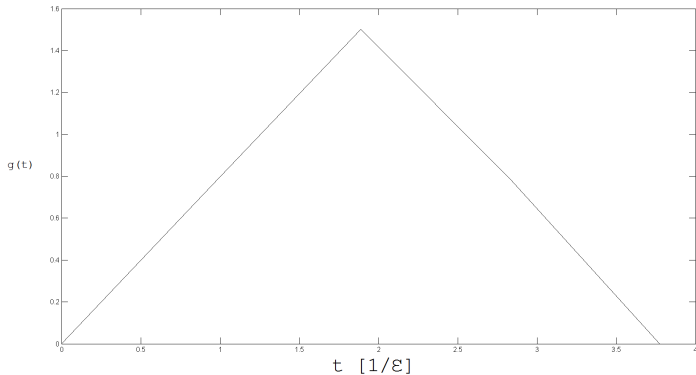
Kostenfunktion

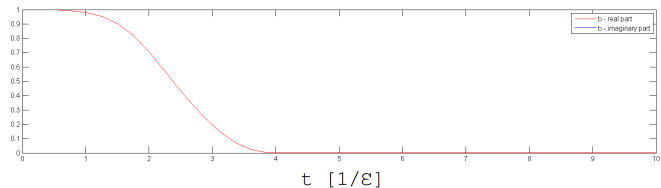
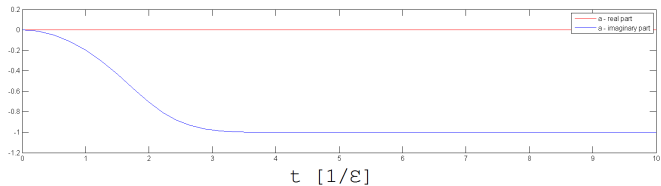
$$K(y, \tau) = \Delta(y) \cdot 10^3 + \tau$$



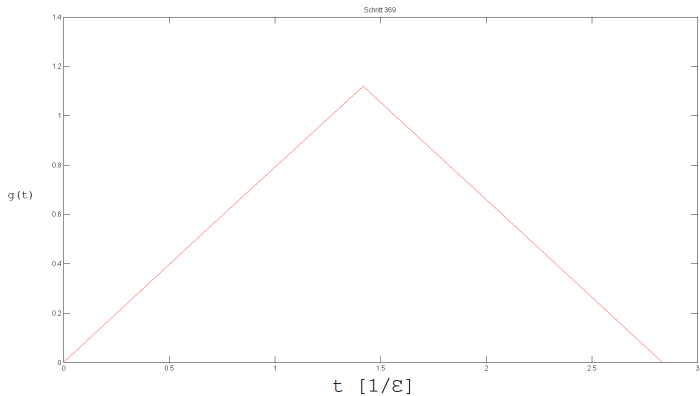
# ERGEBNISSE

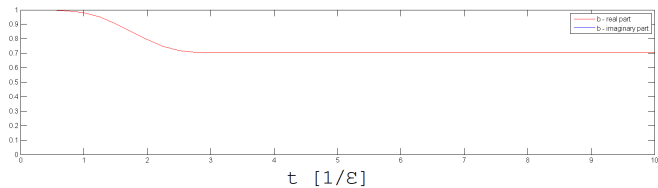
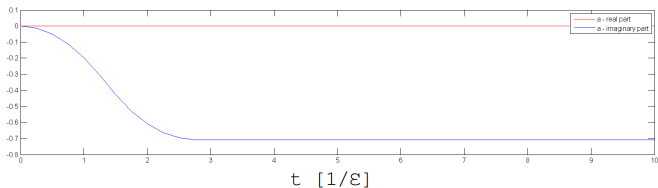
# NOT Gate





# Hadamard Gate





# WECHSELWIRKUNG MIT ZWEITEM SPIN

# Wechselwirkung mit Umgebung

Zustand vor Messung (Wechselwirkung mit Umgebung)

$$|\psi_0\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |U\rangle$$

# Wechselwirkung mit Umgebung

Zustand vor Messung (Wechselwirkung mit Umgebung)

$$|\psi_0\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |U\rangle$$

Zustand nach Messung

$$|\psi_1\rangle = (a|0\rangle \otimes |U_0\rangle + b|1\rangle \otimes |U_1\rangle)$$



## Wechselwirkung mit Umgebung

Zustand vor Messung (Wechselwirkung mit Umgebung)

$$|\psi_0\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |U\rangle$$

Zustand nach Messung

$$|\psi_1\rangle = (a|0\rangle \otimes |U_0\rangle + b|1\rangle \otimes |U_1\rangle)$$

**Wechselwirkung**

nach Messung nicht mehr trennbar

# Hamilton Operator

ungestört

$$\hat{H}_0 = \epsilon(|1\rangle \langle 1| \otimes I)$$

# Hamilton Operator

ungestört

$$\hat{H}_0 = \epsilon(|1\rangle \langle 1| \otimes I)$$

Gate - Term

$$\hat{H}_1 = f(t)(|1\rangle \langle 0| \otimes I) + f^*(t)(|0\rangle \langle 1| \otimes I)$$

# Hamilton Operator

ungestört

$$\hat{H}_0 = \epsilon(|1\rangle \langle 1| \otimes I)$$

Gate - Term

$$\hat{H}_1 = f(t)(|1\rangle \langle 0| \otimes I) + f^*(t)(|0\rangle \langle 1| \otimes I)$$

Wechselwirkungs - Term

$$\hat{H}_{WW} = J\hat{S}_S\hat{S}_T$$

# Schrödingergleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \frac{J}{4} & 0 & f^*(t) & 0 \\ 0 & -\frac{J}{4} & \frac{J}{2} & f^*(t) \\ f(t) & \frac{J}{2} & -\frac{J}{4} + \epsilon & 0 \\ 0 & f(t) & 0 & \frac{J}{4} + \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{pmatrix}$$

Mit dem Zustand

$$|\psi\rangle = a_{00}(t) |00\rangle + a_{01}(t) |01\rangle + a_{10}(t) |10\rangle + a_{11}(t) |11\rangle$$

# Reduzierte Dichtematrix

Zustand

$$|\psi\rangle = \sum_{S,T} c_{ST} |S\rangle \otimes |T\rangle$$

Dichtematrix

$$\rho_{SS'} = \sum_T c_{ST} c_{S'T}^*$$

## Dichtematrix unverschränkt: NOT Gate

$$\hat{\rho}_{SS'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zustand vor Gate:  $|\psi(t = t_0)\rangle = |0\rangle$

# Dichtematrix unverschränkt: Hadamard Gate

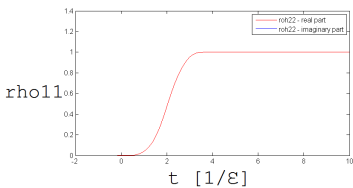
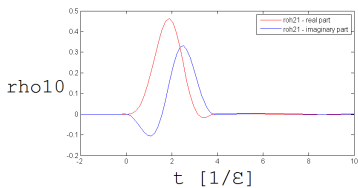
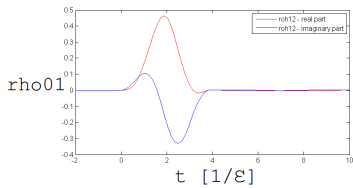
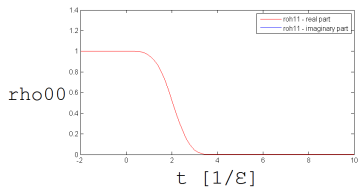
$$\hat{\rho}_{SS'} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zustand vor Gate:  $|\psi(t = t_0)\rangle = |0\rangle$

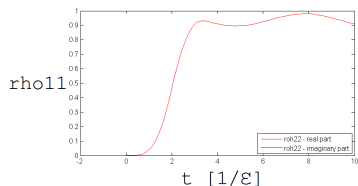
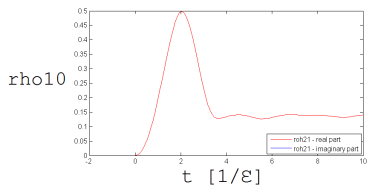
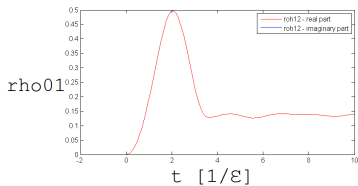
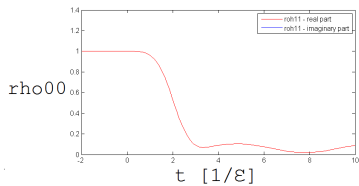


# ERGEBNISSE

# J=0; NOT Gate



# J=0.3; NOT Gate

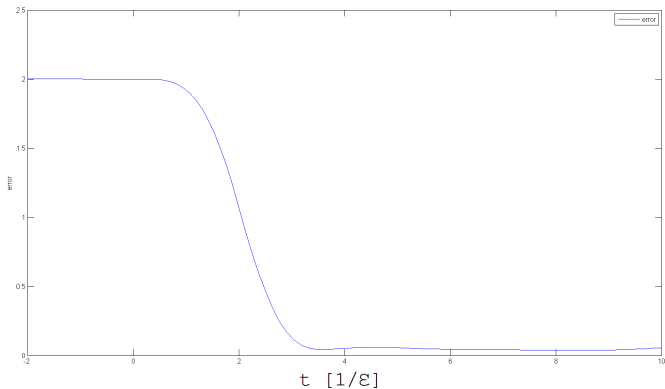


# Fehler

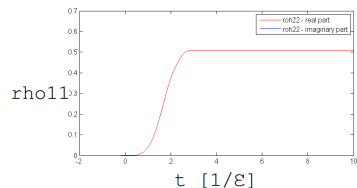
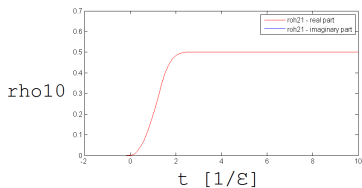
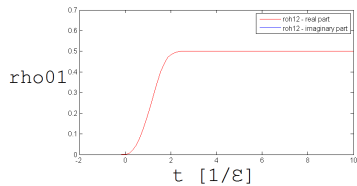
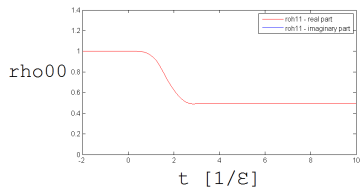
Abweichung der Dichtematrix vom ungestörten Wert

$$error = tr \left( |\hat{\rho}_{SIM} - \hat{\rho}_{NOT}|^2 \right)$$

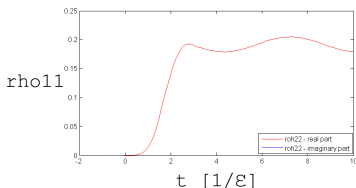
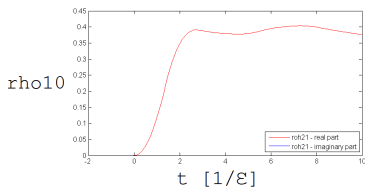
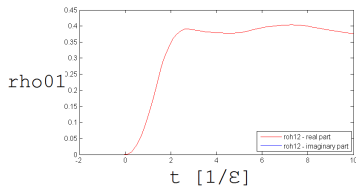
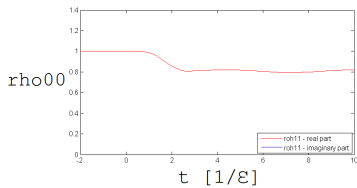
# Fehler NOT Gate; $J=0.3$



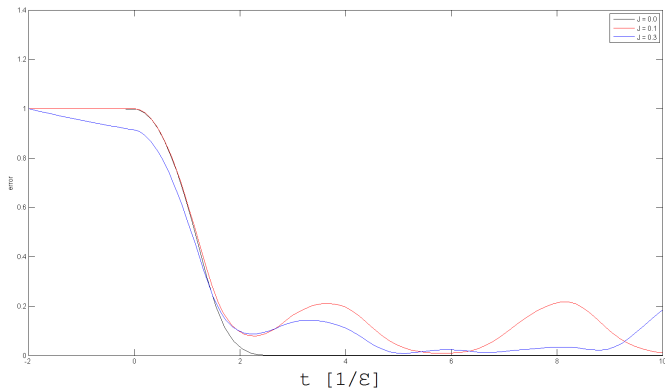
# J=0; Hadamard Gate



# $J=0.3$ ; Hadamard Gate



# Fehler Hadamard Gate





# ZUSAMMENFASSUNG

# Zusammenfassung

- Simulation des NOT - und Hadamard - Gates

# Zusammenfassung

- Simulation des NOT - und Hadamard - Gates
- Auffinden einer realistischen Funktion

# Zusammenfassung

- Simulation des NOT - und Hadamard - Gates
- Auffinden einer realistischen Funktion  $\Rightarrow$  Dreiecksfunktion

# Zusammenfassung

- Simulation des NOT - und Hadamard - Gates
- Auffinden einer realistischen Funktion  $\Rightarrow$  Dreiecksfunktion
- Auswirkung der Wechselwirkung

# Zusammenfassung

- Simulation des NOT - und Hadamard - Gates
- Auffinden einer realistischen Funktion  $\Rightarrow$  Dreiecksfunktion
- Auswirkung der Wechselwirkung  $\Rightarrow$  Verbesserungsmöglichkeit:  
Unter Einfluss der Wechselwirkung Gates "bauber" realisieren