

# Kapitel 6

## Energiedichte und -fluß in der Elektrodynamik

### 6.1 Der Poyntingsche Satz

In Abschnitt 5.4 wurde bereits der Poyntingsche Satz in der Form (5.24) abgeleitet:

$$\left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] + \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}(\mathbf{r}, t),$$

welcher im Fall eines linearen Mediums die Form

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] + \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (6.1)$$

annimmt. Dabei ist  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  der **POYNTINGSche Vektor**. Wir setzen nun weiter

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \\ -\lambda(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

und erhalten so für (6.1) die differentielle Form einer Bilanzgleichung (2.12):

$$\frac{\partial w(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \lambda(\mathbf{r}, t). \quad (6.2)$$

Integration über den festen Raumbereich  $\mathbb{B}$  führt zu

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{B}} dV w(\mathbf{r}, t) + \int_{S_{\mathbb{B}}} d\mathbf{A} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{B}} dV \lambda(\mathbf{r}, t),$$

oder in der Notation von Gleichung (2.12):

$$\dot{W}_{\mathbb{B}} + I_{\mathcal{S}_{\mathbb{B}}}^W = \Lambda_{\mathbb{B}}^W.$$

Diese Beziehung sagt aus, daß sich die Mengengröße  $W$  im Bereich  $\mathbb{B}$  entweder dadurch zeitlich ändert, daß ein Strom von  $W$  durch die Oberfläche  $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$  von  $\mathbb{B}$  fließt, oder daß sie in  $\mathbb{B}$  entspringt oder versiegt.

Da nun

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}, t) &= w_E(\mathbf{r}, t) + w_M(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

geschrieben werden kann, mit  $w_E(\mathbf{r}, t)$  nach (3.37) dem Energieinhalt des elektrischen Feldes, und - analog -  $w_M(\mathbf{r}, t)$  dem Energieinhalt des magnetischen Feldes, wird man, naheliegend,  $w(\mathbf{r}, t)$  als den Energieinhalt des elektromagnetischen Feldes interpretieren.

Nach dieser Interpretation muß dann  $\operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  die Divergenz der Dichte des elektromagnetischen Energiestromes sein. Dann folgt, daß  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  als Energiestromdichte zu interpretieren sein wird, was aber nicht zwingend ist, da man zu  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  stets ein beliebiges Wirbelfeld  $\operatorname{rot} \mathbf{C}(\mathbf{r}, t)$  addieren kann, mit

$$\operatorname{div} [\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{rot} \mathbf{C}(\mathbf{r}, t)] = \operatorname{div} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t).$$

Somit könnte man auch  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) + \operatorname{rot} \mathbf{C}(\mathbf{r}, t)$  als Energiedichte interpretieren.

Die Bedeutung des Termes  $\lambda(\mathbf{r}, t)$  wurde auch bereits in Abschnitt 5.4 untersucht und mit einer Leistungsdichte  $n(\mathbf{r}, t)$  identifiziert. Hierbei kann die Leistung

$$\Lambda_{\mathbb{B}}^W = \int_{\mathbb{B}} dV n(\mathbf{r}, t), \quad n(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\lambda(\mathbf{r}, t)$$

als die zeitliche Änderung der mechanischen Energie der Substanzmenge in  $\mathbb{B}$  aufgrund des Wirkens des elektromagnetischen Feldes interpretiert werden.

Um nun die gesamte Änderung der mechanischen Energie im Bereich  $\mathbb{B}$  erfassen zu können, muß man berücksichtigen, daß auch diese Energieformen durch die Oberfläche  $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$  strömen können, etwa durch sich bewegende Teilchen, welche  $\mathbb{B}$  verlassen und dabei ihre kinetische Energie mit sich führen. Es muß also für diese Größe auch eine Bilanzgleichung aufgestellt werden, wobei ihr Quellterm gerade  $n(\mathbf{r}, t)$  ist. Wir erhalten so eine Dichte der mechanischen Energie  $e_m(\mathbf{r}, t)$  und eine mechanische Energiestromdichte  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ . Es gilt dann

$$\frac{\partial e_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t).$$

Wir addieren dies zum Poyntingschen Satz (6.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} [w(\mathbf{r}, t) + e_m(\mathbf{r}, t)] + \operatorname{div} [\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)] = 0. \quad (6.3)$$

Dies hat die Form eines Erhaltungssatzes; es bleibt zwar weder elektromagnetische noch mechanische Energie für sich erhalten, wohl aber die *Summe* beider Energien. Die Gesamtenergie  $w(\mathbf{r}, t) + e_m(\mathbf{r}, t)$  im Bereich  $\mathbb{B}$  kann sich nur dadurch ändern, daß Energie (in der einen oder anderen Form) durch die Oberfläche  $\mathcal{S}_{\mathbb{B}}$  fließt.

Das Ergebnis (6.3) fordert also die Umwandelbarkeit von mechanischer in elektrische bzw. elektrischer in mechanische Energie, und diese Umwandelbarkeit wird permanent technisch genützt.

## 6.2 Energiedichte einer ebenen elektromagnetischen Welle im Vakuum

In Abschnitt 5.5 und 5.6 wurde gezeigt, daß die homogenen MAXWELLSchen Gleichungen Lösungen in der Form ebener, transversaler Wellen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (6.5)$$

mit  $|\omega| = c_0 |\mathbf{k}|$  angeschrieben werden können. (Physikalisch relevant ist natürlich nur der Realteil dieser komplexen Wellen und nur er trägt zur Energie bei.)

Wir bestimmen zunächst die Dichte der magnetischen Feldenergie (wir benutzen hier die Notation  $z = z_1 + iz_2$ ):

$$\begin{aligned} w_m(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{\omega^2} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)] [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{k^2}{\omega^2} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c_0^2} \frac{\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{D}_1(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{D}_1(\mathbf{r}, t) = w_e(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

*Der magnetische Anteil und der elektrische Anteil tragen zu gleichen Teilen zur elektromagnetischen Gesamtenergie bei.*

Nachdem man den Realteil  $z_1 = (z + z^*)/2$  schreiben kann, mit  $z^*$  der konjugiert Komplexen von  $z$ , so erhält man auch

$$w_e(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_0}{8} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)] [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)],$$

wobei das hier angeschriebene Produkt als unitäres Produkt zu verstehen ist. Wir verwenden (6.4) und erhalten weiter

$$\begin{aligned} w_e(\mathbf{r}, t) &= \frac{\varepsilon_0}{8} \left\{ 2\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0^*\mathbf{E}_0 e^{2i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} + \mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^* e^{-2i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} \right\} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{4} \left\{ |\mathbf{E}_0|^2 + \Re \left[ \mathbf{E}_0^*\mathbf{E}_0 e^{2i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Wir erhalten also einen konstanten Beitrag und einen Term, welcher mit doppelter Wellenzahl periodisch ist.

Sehr häufig ist man daran interessiert von solchen Größen den über eine Periode gebildeten Mittelwert zu erhalten, also

$$\langle w_e \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' w_e(t'),$$

und aus (6.6) folgt unmittelbar mit

$$\langle w_e \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} |\mathbf{E}_0|^2,$$

ein zeitlich und räumlich konstanter Wert. Dieses Ergebnis hängt natürlich mit dem komplexen Ansatz für die Welle zusammen.

Wir untersuchen nun den Poyntingschen Vektor (wobei nur die Realteile des  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{H}$ -Feldes relevant sind):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)] \\ &= \frac{\mathbf{k}}{\mu_0 \omega} [\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)] \\ &= \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega} [\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{D}_1(\mathbf{r}, t)] \\ &= c_0^2 \frac{k}{\omega} \hat{\mathbf{k}} [\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{D}_1(\mathbf{r}, t)] \\ &= \pm 2c_0 \hat{\mathbf{k}} w_e(\mathbf{r}, t) = \pm c_0 \hat{\mathbf{k}} w(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Der Poyntingsche Vektor zeigt somit für  $w(\mathbf{r}, t) > 0$  in Richtung und für  $w(\mathbf{r}, t) < 0$  in Gegenrichtung des Ausbreitungsvektors  $\hat{\mathbf{k}}$  der ebenen Welle. Der Transport elektromagnetischer Energie findet also im gesamten Raum entlang dieser Ausbreitungsrichtung statt. Der Zeitmittelwert des Poyntingschen Vektors ergibt sich schließlich zu

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \pm c_0 \hat{\mathbf{k}} \langle w \rangle.$$

Diese Ergebnisse können nun wieder auf rein zeitlich periodische Felder übertragen werden, wobei wir im Auge behalten, daß wir letztlich an über eine Periode gemittelten Zeitmittelwerten interessiert sind. Es sind nun  $A^{(1)}(\mathbf{r}, t), A^{(2)}(\mathbf{r}, t), \dots$  zeitlich rein periodische Tensorfelder derselben Kreisfrequenz  $\omega$ . Somit gilt für den Zeitmittelwert:

$$\langle A^{(1)}(\mathbf{r}, t) A^{(2)}(\mathbf{r}, t) \dots \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt A^{(1)}(\mathbf{r}, t) A^{(2)}(\mathbf{r}, t) \dots$$

Es gelte nun:

$$A^{(i)}(\mathbf{r}, t) = A^{(i)}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_i(\mathbf{r})), \quad i = 1, 2, \dots$$

und damit folgt ( $T = 2\pi/\omega$ ):

$$\begin{aligned} \langle A^{(1)}(\mathbf{r}, t) A^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt A^{(1)}(\mathbf{r}) A^{(2)}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_1(\mathbf{r})) \cos(\omega t + \varphi_2(\mathbf{r})) \\ &= \frac{A^{(1)}(\mathbf{r}) A^{(2)}(\mathbf{r})}{T} \frac{t}{2} \cos(\varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_2(\mathbf{r})) \Big|_0^T \\ &\quad + \frac{A^{(1)}(\mathbf{r}) A^{(2)}(\mathbf{r})}{T} \left[ \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t + \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r})) \right]_0^T \\ &= \frac{1}{2} A^{(1)}(\mathbf{r}) A^{(2)}(\mathbf{r}) \cos(\varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_2(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Verwenden wir nun korrespondierende komplexe Skalarfelder vom Typ (5.100), so erhalten wir aus

$$\begin{aligned} A^{(1)}(\mathbf{r}, t) A^{*(2)}(\mathbf{r}, t) &= A^{(1)}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} A^{*(2)}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\ &= A^{(1)}(\mathbf{r}) A^{*(2)}(\mathbf{r}) \\ &= A_0^{(1)}(\mathbf{r}) e^{i\varphi_1(\mathbf{r})} A_0^{(2)*}(\mathbf{r}) e^{-i\varphi_2(\mathbf{r})} \\ &= A_0^{(1)}(\mathbf{r}) A_0^{(2)*}(\mathbf{r}) e^{i(\varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_2(\mathbf{r}))}, \end{aligned}$$

und der Vergleich mit (6.7) führt unmittelbar zu

$$\langle A^{(1)}(\mathbf{r}, t) A^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ A^{(1)}(\mathbf{r}) A^{*(2)}(\mathbf{r}) \}, \quad (6.8)$$

mit  $A^{(i)}(\mathbf{r})$  den komplexen Amplituden der Größen  $A^{(i)}(\mathbf{r}, t)$ . Ganz analog finden wir:

$$\langle \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{A}^{*(2)}(\mathbf{r}) \},$$

und aufbauend auf dieses Ergebnis definieren wir nun den **komplexen** Poyntingschen Vektor mit der komplexen Amplitude

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}).$$

Es folgt weiters der Zeitmittelwert

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \} \quad (6.9)$$

$$= \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \}. \quad (6.10)$$

### 6.3 Die Energieabstrahlung des Hertzschen Dipols

Um feststellen zu können, ob der oszillierende elektrische Dipol Energie abstrahlt, muß man untersuchen, ob ein Transport elektromagnetischer Energie ins räumlich Unendliche stattfindet. Den elektromagnetischen Energietransport pro Zeiteinheit im räumlich Unendlichen nennt man **Strahlungsleistung**.

Wir bestimmen also den Poyntingschen Vektor entsprechend (5.23) unter Verwendung der Ergebnisse (5.96) und (5.97) für das **B**- und **E**-Fernfeld des Hertzschen Dipols, und finden

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|^2 c_0^3} \{ [(\hat{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{p}}] \times (\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}) \} \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|^2 c_0^3} \mathbf{X}(\hat{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{p}}). \end{aligned}$$

Es interessiert der Energietransport im Unendlichen, und dieser entspricht dem Integral der Normalkomponente des Poyntingschen Vektors auf einer weit entfernten Kugel­fläche  $\mathcal{S}_{\mathcal{K}_R}$  vom Radius  $R$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_R}} d\mathbf{A} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \int_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_R}} dA \hat{\mathbf{r}} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} \int_{\mathcal{S}_{\mathcal{K}_R}} dA \frac{1}{|R|^2 c_0^3} \mathbf{X}(\hat{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{p}}) \hat{\mathbf{r}} \\ &= -\frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} \int d\Omega \frac{1}{c_0^3} \mathbf{X}(\hat{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{p}}) \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

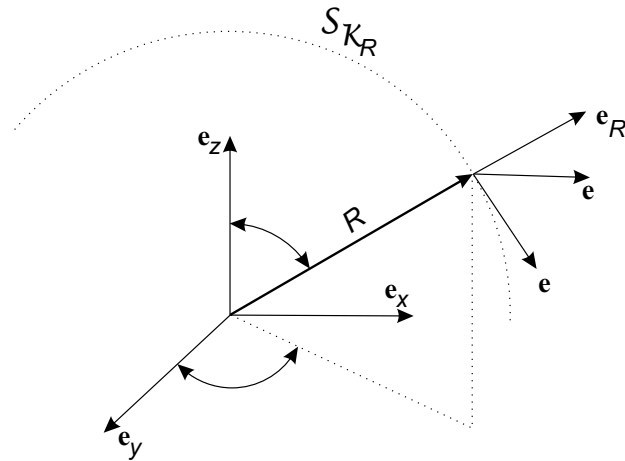


Abbildung 6.1: Einführung von Kugelkoordinaten zur Berechnung der Strahlungsleistung.

Wir formen nun  $\mathbf{X}(\hat{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{r}}$  um:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\hat{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{r}} &= \{[(\hat{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{p}}] \times (\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}})\} \hat{\mathbf{r}} \\ &= -\ddot{\mathbf{p}}\ddot{\mathbf{p}} + (\hat{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{p}})^2 \\ &= -(\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}})(\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}), \end{aligned}$$

und erkennen unmittelbar, daß hier (1) eine Abstrahlung vorliegt (positiver Energiefluß durch die weit entfernte Oberfläche), und daß (2) nur beschleunigte Ladungen zu einer Energieabstrahlung führen können. (3) Ganz allgemein erkennt man auch, daß für  $\mathbf{r} \parallel \ddot{\mathbf{p}} \Rightarrow \ddot{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}} = |\ddot{\mathbf{p}}|$  gilt und daher keine Abstrahlung, aber für  $\mathbf{r} \perp \ddot{\mathbf{p}} \Rightarrow \ddot{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}} = 0$  ist und somit die maximale Abstrahlung beobachtet wird.

Wir wollen nun für das Dipolmoment

$$\mathbf{p}(t) = p(t) \mathbf{e}_z$$

annehmen, und damit schwingt der Dipol ohne Richtungsänderung längs der  $z$ -Achse. Wir erhalten nach Übergang zu Polarkoordinaten entsprechend Abbildung 6.1:

$$\mathbf{X}(\hat{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{r}} = -|\ddot{\mathbf{p}}|^2 \sin^3 \vartheta,$$

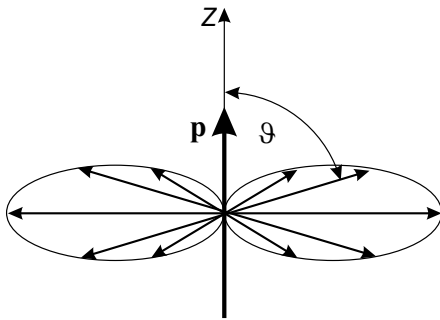
was dann den Energiefluß

$$\begin{aligned} \Phi^W(t) &= \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c_0^3} |\ddot{\mathbf{p}}(t - R/c_0)|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \underbrace{\sin^3 \vartheta}_{=4/3} \\ &= \frac{\mu_0}{6\pi c_0^3} |\ddot{\mathbf{p}}(t - R/c_0)|^2, \end{aligned}$$

ergibt. Untersuchen wir den Energiefluß im Raumwinkelement  $d\Omega$ , so finden wir, daß pro Zeiteinheit

$$\Phi^W(\Omega, t) = \frac{\mu_0}{6\pi c_0^3} |\ddot{\mathbf{p}}(t - R/c_0)|^2 \sin^2 \vartheta d\Omega$$

abgestrahlt wird. Dieser Ausdruck ist zwar zylindersymmetrisch um die Dipolachse, doch in Achsenrichtung deutlich anisotrop. In Richtung der  $z$ -Achse wird gar keine, in die Äquatorialebene am meisten Energie abgestrahlt. Dies ist die **Richtwirkung** des elektrischen Dipols. Man spricht auch von **Strahlungscharakteristik**.



Weiters erkennt man, daß die Energieabstrahlung zeitabhängig ist. Wählen wir zum Beispiel einen harmonischen Ansatz

$$p(t) = p \sin \omega t,$$

für das das Dipolmoment, so folgt die Energieabstrahlung

$$\phi^W(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c_0^3} p^2 \omega^4 \sin^2 [\omega(t - R/c_0)]$$

*retardiert* der Beschleunigung der Dipolladung. Schließlich finden wir den zeitgemittelten Energiefluß mit

$$\langle \Phi^W(t) \rangle = \frac{\mu_0}{12\pi c_0^3} p^2 \omega^4,$$

wegen  $\langle \sin^2 x \rangle = 1/2$ . Wichtig an diesem Ergebnis ist das Anwachsen der Leistung mit der vierten Potenz der Frequenz. Dies erklärt, daß die Energie hochfrequenter Wellen durch Antennen viel besser abgestrahlt werden kann als die niederfrequenter Wellen.

Wegen des Satzes der Erhaltung der Summe von elektromagnetischer und mechanischer Energie (6.3), muß die abgestrahlte Energie der Bewegungsenergie des schwingenden Dipols entnommen werden. Der Dipol verliert also permanent mechanische Energie und wird dadurch gedämpft; man spricht von **Strahlungsdämpfung**. Die Schwingung des Dipols kann also nur durch permanente Energiezufuhr aufrecht erhalten werden.

Schließlich noch eine kurze Bemerkung zu den Nahfeldanteilen: sie führen zu keiner Abstrahlung, und damit bloß zu einer Umverteilung elektromagnetischer Energie in der Umgebung des Dipols.



## 6.4 Die Energieabstrahlung des magnetischen Dipols

Wir bestimmen nun aus (5.124) die komplexen Amplituden der Fernfelder des magnetischen Dipols:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^{(F)}(\mathbf{r}) &= -k^2 \frac{e^x}{x} [\mathbf{C} - (\mathbf{C}\mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R] \\
 &= -k^2 \frac{e^{-ikR}}{-ikR} \left[ \frac{ik}{4\pi} \mathbf{m} - \left( \frac{ik}{4\pi} \mathbf{m}\mathbf{e}_R \right) \mathbf{e}_R \right] \\
 &= \frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} [\mathbf{m} - (\mathbf{m}\mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R] \\
 &= \frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} [\mathbf{m}(\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R) - (\mathbf{m}\mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R] \\
 &= -\frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} [(\mathbf{m} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R], \\
 \mathbf{E}^{(F)}(\mathbf{r}) &= -\omega\mu_0 k \frac{e^x}{x} (\mathbf{C} \times \mathbf{e}_R) \\
 &= -\omega\mu_0 k \frac{e^{-ikR}}{-ikR} \left( \frac{ik}{4\pi} \mathbf{m} \times \mathbf{e}_R \right) \\
 &= \frac{\omega\mu_0 k}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_R).
 \end{aligned}$$

Wir nehmen nun wieder an, daß

$$\mathbf{m} = m\mathbf{e}_z$$

gelte, und schreiben die hier auftretenden Vektoren in Kugelkoordinaten um:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{m} &= m(\mathbf{e}_R \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta) \\
 \mathbf{m} \times \mathbf{e}_R &= m \sin \vartheta (-\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_R) = m \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi \\
 (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_R) \times \mathbf{e}_R &= m \sin \vartheta (\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_R) = m \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta,
 \end{aligned}$$

und damit erhalten wir für die komplexen Fernfeldamplituden:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^{(F)}(\mathbf{r}) &= -\frac{k^2}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} m \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta \\
 \mathbf{E}^{(F)}(\mathbf{r}) &= \frac{\omega\mu_0 k}{4\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} m \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi.
 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Entsprechend Seite 114 gilt  $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{a}\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{a})$ .

Entsprechend (6.9) erhalten wir dann den Zeitmittelwert des Poyntingschen Vektors mit

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}^{(F)}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^{*(F)}(\mathbf{r}) \} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{\omega \mu_0 k^3}{(4\pi)^2} \frac{1}{R^2} \Re(m m^*) \sin^2 \vartheta (\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_\vartheta) \\
 &= \frac{\omega \mu_0 k^3}{(4\pi)^2} m^2 \sin^2 \vartheta \mathbf{e}_R.
 \end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis ist zylindersymmetrisch um die Dipolachse, aber in Richtung des Dipols anisotrop. Die Strahlungscharakteristik entspricht der des Hertzschen Dipols.

Wir können schließlich den Zeitmittelwert der Strahlungsleistung des oszillierenden, magnetischen Dipols berechnen:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{S}_\infty \rangle &= \frac{\omega \mu_0 k^3 m^2}{2(4\pi)^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_{\mathcal{K}_R}} d\mathbf{A} \frac{\sin^2 \vartheta}{R^2} \mathbf{e}_R \\
 &= \frac{\omega \mu_0 k^3 m^2}{2(4\pi)^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\varphi d\vartheta \frac{\sin^3 \vartheta}{R^2} R^2 \\
 &= \frac{\omega \mu_0 k^3 m^2}{2(4\pi)^2} \frac{4}{3} 2\pi = \frac{\omega \mu_0 k^3 m^2}{12\pi} \\
 &= \frac{\mu_0}{12\pi c_0^3} m^2 \omega^4.
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist jenem für den oszillierenden, elektrischen Dipol analog.