

Anhang F

F.1 Der Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung

F.1.1 Ableitung des Wirkungsquerschnittes

Wir wollen nun den Streuquerschnitt für die Compton-Streuung bestimmen. Wie aus Abb. 7.1 zu ersehen ist, gibt es sowohl im Anfangs- wie auch im Endzustand ein Photon und wir werden daher die Ergebnisse von Abschnitt 8.3 benötigen.

Wir nehmen nun an, daß wir im Anfangszustand ein Elektron mit Viererimpuls $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ und im Spinzustand $u = u_r(\mathbf{p})$, sowie ein Photon mit Viererimpuls $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ und dem Polarisationsvektor $\varepsilon = \varepsilon_s(\mathbf{k})$ haben. Für den Endzustand haben wir entsprechend $p'^\mu = (E', \mathbf{p}')$ und $u' = u_{r'}(\mathbf{p}')$, sowie $k'^\mu = (\omega', \mathbf{k}')$ mit $\varepsilon' = \varepsilon_{s'}(\mathbf{k}')$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt folgt aus (8.39) und (8.37) mit

$$\frac{d\sigma}{d\theta'} = \frac{m_0^2 \omega'}{16\pi^2 E E' \omega v_{rel}} \left[\frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} \Big|_{\theta'} \right]^{-1} |\mathcal{M}|^2, \quad (\text{F.1})$$

mit dem Raumwinkel von \mathbf{k}' : $\theta' = (\vartheta', \varphi')$. Hierbei wird \mathbf{k} als Polarachse gewählt und somit wird ϑ' der Photonenstreuwinkel und $\mathbf{k}\mathbf{k}' = \omega\omega' \cos \vartheta'$. In (F.1) gilt noch der Erhaltungssatz der Viererimpulse

$$p^\mu + k^\mu = p'^\mu + k'^\mu. \quad (\text{F.2})$$

In niedrigster Ordnung gelten die Feynman Diagramme von Abb. 7.1 und die Beiträge zur Feynman Amplitude \mathcal{M} sind durch die Gleichungen (7.43) und (7.44) gegeben. Wir führen nun die Vierervektoren

$$f_1^\mu = p^\mu + k^\mu, \quad f_2^\mu = p^\mu - k'^\mu$$

ein und finden ($p^\mu p_\mu - m_0^2 = 0$, $k^\mu k_\mu = 0$)

$$\mathcal{M}_a = -ie^2 \frac{\bar{u}' \not{\epsilon}' (f_1 + m_0) \not{\epsilon} u}{2(p^\mu k_\mu)}, \quad \mathcal{M}_b = -ie^2 \frac{\bar{u}' \not{\epsilon} (f_2 + m_0) \not{\epsilon}' u}{2(p^\mu k'_\mu)}.$$

Dies gilt für ein allgemeines Bezugssystem. In den üblichen Experimenten fällt aber der Photonenstrahl auf das Target, also auf nahezu ruhende Elektronen. Man geht daher auf das Laborsystem mit $p^\mu = (m_0, 0, 0, 0)$ über und damit folgt aus (F.2):

$$\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}', \quad (\text{F.3a})$$

$$\begin{aligned} E' &= \sqrt{|\mathbf{p}'|^2 + m_0^2} = \sqrt{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 + m_0^2} \\ &= \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}'|^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{k}' + m_0^2} \\ &= \sqrt{\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos \vartheta' + m_0^2}. \end{aligned} \quad (\text{F.3b})$$

Weiters folgt aus (F.2):

$$p^\mu k_\mu + \underbrace{k^\mu k_\mu}_{=0} = p'^\mu k_\mu + k'^\mu k_\mu = p^\mu k'_\mu + k'^\mu k_\mu. \quad (\text{F.4})$$

Nun gilt aber im Laborsystem

$$\begin{aligned} p^\mu k_\mu &= (m_0, 0, 0, 0)(k_0, k_1, k_2, k_3) \\ &= m_0 k_0 = m_0 \omega \\ p^\mu k'_\mu &= m_0 k'_0 = m_0 \omega' \\ k'^\mu k_\mu &= k'^0 k_0 - \mathbf{k}'\mathbf{k} = \omega\omega'(1 - \cos \vartheta'), \end{aligned}$$

und damit ergibt (F.4):

$$\omega' = \frac{m_0 \omega}{m_0 + \omega(1 - \cos \vartheta')}. \quad (\text{F.5})$$

Diese Gleichung gibt die Energieverschiebung des Photons aufgrund des Rückstoßes des Target-Elektrons an. (F.3b) ergibt

$$\left. \frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} \right|_{\vartheta'} = \frac{m_0 \omega}{E' \omega'}$$

und wir erhalten damit für den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Laborsystem:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\theta'} \right)_{Lab} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 |\mathcal{M}|^2. \quad (\text{F.6})$$

Sowohl (F.1) als auch (F.6) sind vollständig polarisiert, es sind also sowohl im Anfangs- wie auch im Endzustand die Elektronen und Photonen in definierten Polarisationszuständen. Will man aber den Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung für ein nicht polarisiertes Target (der übliche Fall) bestimmen, so müssen wir die Gleichungen für den Wirkungsquerschnitt über die Spins der Elektronen im Anfangs- bzw. Endzustand summieren, bzw. mitteln. Sind auch die Photonen nicht polarisiert, so müssen wir auch hier über die Anfangs- und Endpolarisationen summieren bzw. mitteln.

Wir verwenden nun die Ergebnisse von Abschnitt 8.3 und schreiben

$$\mathcal{M} = \varepsilon_\alpha \varepsilon'_\beta \mathcal{M}^{\alpha\beta},$$

und damit erhalten wir mit (8.52) für zwei externe Photonen

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \mathcal{M}^{\alpha\beta} \mathcal{M}_{\alpha\beta}^*,$$

wobei hier über die Spins und Polarisierungen der Anfangs- und Endteilchen summiert wird. Mit unseren bisherigen Ergebnissen finden wir dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} (|\mathcal{M}_a|^2 + |\mathcal{M}_b|^2 + \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \mathcal{M}_b \mathcal{M}_a^*) \\ &= \frac{e^4}{64m_0^2} \left[\frac{X_{aa}}{(p^\mu k_\mu)^2} + \frac{X_{bb}}{(p^\mu k'_\mu)^2} + \frac{X_{ab} + X_{ba}}{(p^\mu k_\mu)(p^\mu k'_\mu)} \right], \quad (\text{F.7}) \end{aligned}$$

mit

$$X_{aa} = \text{Tr} [\gamma^\beta (\not{f}_1 + m_0) \gamma^\alpha (\not{p} + m_0) \gamma_\alpha (\not{f}_1 + m_0) \gamma_\beta (\not{p}' + m_0)] \quad (\text{F.8a})$$

$$X_{bb} = \text{Tr} [\gamma^\alpha (\not{f}_2 + m_0) \gamma^\beta (\not{p} + m_0) \gamma_\beta (\not{f}_2 + m_0) \gamma_\alpha (\not{p}' + m_0)] \quad (\text{F.8b})$$

$$X_{ab} = \text{Tr} [\gamma^\beta (\not{f}_1 + m_0) \gamma^\alpha (\not{p} + m_0) \gamma_\beta (\not{f}_2 + m_0) \gamma_\alpha (\not{p}' + m_0)] \quad (\text{F.8c})$$

$$X_{ba} = \text{Tr} [\gamma^\alpha (\not{f}_2 + m_0) \gamma^\beta (\not{p} + m_0) \gamma_\alpha (\not{f}_1 + m_0) \gamma_\beta (\not{p}' + m_0)] \quad (\text{F.8d})$$

Es ist noch festzustellen, daß die Substitution

$$k^\mu \longleftrightarrow k'^\mu, \quad \varepsilon \longleftrightarrow \varepsilon' \quad (\text{F.9})$$

zu Transformationen

$$f_1^\mu \longleftrightarrow f_2^\mu, \quad \mathcal{M}_a \longleftrightarrow \mathcal{M}_b$$

und damit zu

$$X_{aa} \longleftrightarrow X_{bb}, \quad X_{ab} \longleftrightarrow X_{ba}$$

führt. Man muß daher nur X_{aa} und X_{ab} vollständig bestimmen. Aus (F.7) folgt noch $X_{ab} = X_{ba}^*$, und aus (F.8c) und (F.8d) sowie (8.26) folgt $X_{ab} = X_{ba}$. Somit ist X_{aa} reell und symmetrisch gegenüber Transformationen vom Typ (F.9).

Die Spuren in (F.8) enthalten Produkte von acht γ -Matrizen und man kann folgende Kontraktionsregeln dazu verwenden um vier γ -Matrizen zu eliminieren. Aus den Vertauschungsrelationen (E.7) folgt:

$$\begin{aligned}\gamma^\lambda \gamma_\lambda &= 4, & \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda &= -2\gamma^\alpha, \\ \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda &= 4g^{\alpha\beta}, & \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\lambda &= -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha, \\ \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \gamma^\lambda &= 2(\gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma - \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\delta).\end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda \mathcal{A} \gamma^\lambda &= -2 \mathcal{A}, \\ \gamma_\lambda \mathcal{A} \mathcal{B} \gamma^\lambda &= 4AB, & \gamma_\lambda \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \gamma^\lambda &= -2 \mathcal{C} \mathcal{B} \mathcal{A}, \\ \gamma_\lambda \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \mathcal{D} \gamma^\lambda &= 2(\mathcal{D} \mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} + \mathcal{C} \mathcal{B} \mathcal{A} \mathcal{D}).\end{aligned}$$

Wir untersuchen nun genauer (F.8a) und innerhalb der Spur tritt der Faktor

$$\begin{aligned}Y &= \gamma^\beta (f_1 + m_0) \gamma^\alpha (\not{p} + m_0) \gamma_\alpha (f_1 + m_0) \gamma_\beta \\ &= \gamma^\beta (f_1 + m_0) ((-2 \not{p} + 4m_0) (f_1 + m_0) \gamma_\beta \\ &= 4 f_1 \not{p} f_1 + m_0 (-16p^\mu f_{1\mu} + 16f_1^\mu f_{1\mu}) + m_0^2 (4 \not{p} - 16 f_1) + 16m_0^3\end{aligned}$$

auf. Wir verwenden nun (8.25) sowie

$$\begin{aligned}\text{Tr} \{\mathcal{A} \mathcal{B}\} &= 4AB \\ \text{Tr} \{\mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{C} \mathcal{D}\} &= 4[(AB)(CD) - (AC)(BD) + (AD)(BC)]\end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}X_{aa} &= \text{Tr} \{Y (\not{p}' + m_0)\} \\ &= 16 \{2 (f_1^\mu p_\mu) (f_1^\mu p'_\mu) - f_1^\mu f_{1\mu} (p^\mu p'_\mu) \\ &\quad + m_0^2 (-4p^\mu f_{1\mu} + 4f_1^\mu f_{1\mu}) + m_0^2 (p^\mu p'_\mu - 4f_1^\mu p'_\mu) + 4m_0^4\}.\end{aligned}$$

Wir können nun alles durch die drei linear unabhängigen Skalare

$$\begin{aligned}p^\mu p_\mu &= p'^\mu p'_\mu = m_0^2 \\ p^\mu k_\mu &= p'^\mu k'_\mu \\ p^\mu k'_\mu &= p'^\mu k_\mu\end{aligned}$$

ausdrücken und damit vereinfacht sich X_{aa} zu:

$$X_{aa} = 32 [m_0^4 - m_0^2 p^\mu k_\mu + (p^\mu k_\mu) (p^\mu k'_\mu)]. \quad (\text{F.10})$$

Aus den Transformationseigenschaften (F.9) folgt unmittelbar

$$X_{bb} = 32 [m_0^4 - m_0^2 p^\mu k'_\mu + (p^\mu k_\mu) (p^\mu k'_\mu)]. \quad (\text{F.11})$$

Eine analoge Rechnung ergibt für (F.8c), den Interferenzterm

$$X_{ab} = 16m_0^2 [2m_0^2 + p^\mu k_\mu - p^\mu k'_\mu],$$

und X_{ab} ist reell und symmetrisch, was bedeutet, daß die Substitution $k^\mu \longleftrightarrow -k'^\mu$ $X_{ba} = X_{ab}$ ergibt.

Wir setzen all dies in (F.7) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{2m_0^2} \left\{ \frac{p^\mu k_\mu}{p^\mu k'_\mu} + \frac{p^\mu k'_\mu}{p^\mu k_\mu} + 2m_0^2 \left(\frac{1}{p^\mu k_\mu} - \frac{1}{p^\mu k'_\mu} \right) \right. \\ &\quad \left. + m_0^4 \left(\frac{1}{p^\mu k_\mu} - \frac{1}{p^\mu k'_\mu} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Im Laborsystem ist nun $p^\mu k_\mu = m_0 \omega$ und $p^\mu k'_\mu = m_0 \omega'$; aus (F.5) folgt weiters

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} = \frac{1}{m_0} (\cos \vartheta' - 1),$$

und damit ergibt sich für (F.12):

$$\left[\frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 \right]_{\text{Lab}} = \frac{e^4}{2m_0^2} \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \vartheta' \right).$$

Daraus folgt der Wirkungsquerschnitt für die unpolarisierte Compton-Streuung:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\vartheta'} \right)_{\text{Lab}} = \frac{\alpha^2}{2m_0^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \vartheta' \right). \quad (\text{F.13})$$

Unter Verwendung von (F.5) kann natürlich ω' aus (F.13) eliminiert werden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\omega'}{\omega} &= \frac{m_0}{m_0 \omega (1 - \cos \vartheta')} \\ \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} &= \frac{m_0 \omega (1 - \cos \vartheta')}{m_0} + \frac{m_0}{m_0 \omega (1 - \cos \vartheta')} \\ &= \frac{m_0^2 + 2m_0 \omega (1 - \cos \vartheta') + \omega^2 (1 - \cos \vartheta')^2 + m_0^2}{m_0 [m_0 + \omega (1 - \cos \vartheta')]} \\ &= 2 + \frac{\omega^2 (1 - \cos \vartheta')^2}{m_0 [m_0 + \omega (1 - \cos \vartheta')]}, \end{aligned}$$

was

$$\left(\frac{d\sigma}{d\vartheta'}\right)_{Lab} = \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{m_0 + \omega(1 - \cos \vartheta')} \left\{ \frac{\omega^2(1 - \cos \vartheta')^2}{m_0 [m_0 + \omega(1 - \cos \vartheta')]} + 1 + \cos^2 \vartheta' \right\} \quad (\text{F.14})$$

ergibt. Die ist die KLEIN-NISHIMA *Formel* für den Wirkungsquerschnitt der Compton-Streuung.

F.1.2 Simulation des differentiellen Wirkungsquerschnittes der Compton-Streuung

Es ist die Aufgabe einer Monte Carlo Simulation des Wirkungsquerschnittes den wahrscheinlichen Endzustand der Streuprodukte bei gegebenem Anfangszustand zu bestimmen. Der Streuquerschnitt spielt dabei die Rolle einer Verteilungsfunktion. Führt man eine solche Simulation für eine große Zahl von identen Anfangszuständen aus, so stellt das zentrale Theorem der Monte Carlo Rechnung¹ sicher, daß jeder mögliche Endzustand mit seiner relativen Häufigkeit realisiert wird. Man tastet (sampelt) auf diese Weise die durch den Wirkungsquerschnitt vorgegebene Verteilungsfunktion ab. Dies führt dann zu einer Darstellung des Wirkungsquerschnittes als Wahrscheinlichkeitshistogramm für vorgegebene Anfangszustände.

Der Comptoneffekt beschreibt die elastische Streuung eines Photons an einem Elektron, entsprechend der Prozessgleichung

$$\gamma(k) + e^-(p) \longrightarrow \gamma(k') + e^-(p').$$

Der prinzipielle Streuvorgang kann mit Hilfe des in Abb. F.1 dargestellten Feynmangraphen beschrieben werden. Da es sich hier um eine elastische Streuung handelt, gilt, daß der Viererimpuls eine Erhaltungsgröße ist. Es gilt also (F.2) mit

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, |\mathbf{k}|) \quad (\text{F.15a})$$

$$p^\mu = (E, 0, 0, 0) = (m_0, 0, 0, 0) \quad (\text{F.15b})$$

$$k'^\mu = (\omega', |\mathbf{k}'| \sin \vartheta', 0, |\mathbf{k}'| \cos \vartheta') \quad (\text{F.15c})$$

$$p'^\mu = (E', -|\mathbf{p}'| \sin \alpha, 0, |\mathbf{p}'| \cos \alpha). \quad (\text{F.15d})$$

mit ϑ' dem Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung des einfallenden und dem gestreuten Photon im Ruhesystem des atomaren Elektrons, entsprechend Abb. F.1. Es gilt weiters Gleichung (F.5), welche die Energieverschiebung des gestreuten Photons aufgrund des Rückstoßes des Target Elektrons

¹Skriptum *Computersimulationen*, Kapitel 6: Stochastik - Monte Carlo Verfahren, Abschnitt 6.4.1.

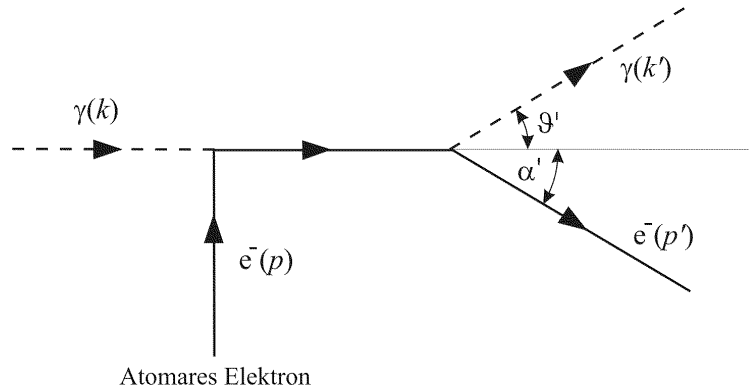


Abbildung F.1: Feynman Graph zur Compton-Streuung.

angibt. Für diese Energie ergeben sich demnach die folgenden Grenzwerte:

$$\vartheta' = \frac{\pi}{2} : \quad \omega'_{min} = \frac{\omega}{1 + 2\omega/m_0}, \quad \vartheta' = 0 : \quad \omega'_{max} = \omega. \quad (\text{F.16})$$

Die maximale Energie des gestreuten Photons wird also dann erreicht, wenn das einfallende Photon das Elektron ungestreut passiert. Wir führen nun noch die Größe ε als Verhältnis des Energie des gestreuten Photons zur Energie des Photons vor der Streuung ein, damit wird

$$\varepsilon = \frac{\omega'}{\omega}$$

$$\varepsilon_{min} = \frac{1}{1 + 2\omega/m_0}, \quad \varepsilon_{max} = 1.$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei einem bestimmten Streuprozess ein bestimmtes Streuprodukt im Raumwinkel θ' beobachtet werden kann. Er wird durch die KLEIN-NISHINA-Formel (F.14) angegeben, für numerische Verfahren hat sich allerdings die BUTCHER-MESSEL *Formel* besser bewährt:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{X_0 n \pi r_0^2 m_0}{k_0} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \right) \left(1 - \frac{\varepsilon \sin^2 \vartheta'}{1 + \varepsilon^2} \right), \quad (\text{F.17})$$

wobei X_0 die Strahlungslänge in cm, n die Elektronendichte in Elektronen/cm³, r_0 der klassische Elektronenradius in cm ist. Die Ruheenergie des Elektrons m_0 wird in MeV angegeben. X_0 ist eine für jedes Material typische Abklinglänge. Sie gibt an, nach welcher Wegstrecke die Energie des einfallenden Teilchens auf den e -ten Teil abgefallen ist.

Die beiden Formen sind einander äquivalent, da sie über folgende Umformung ineinander übergeführt werden können:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left[1 + \frac{\omega}{m_0} (1 - \cos \vartheta') \right]^{-1} \\ d\theta' &= 2\pi \sin \vartheta d\vartheta'.\end{aligned}$$

Betrachten wir die Gleichung für $d\sigma/d\varepsilon$ näher, so sehen wir, daß der Wirkungsquerschnitt als Produkt zweier Funktionen $f(\varepsilon)$ und $g(\varepsilon)$ geschrieben werden kann:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}, \quad g(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon \sin^2 \vartheta}{1 + \varepsilon^2}.$$

Es bietet sich folgende Vorgangsweise an: zuerst wird ein Wert ε mittels der Funktion $f(\varepsilon)$ im Intervall $[\varepsilon_{min}, 1]$ gesampelt. Dieser Wert wird in $g(\varepsilon)$ eingesetzt und ein Rejection Loop durchgeführt um zu verifizieren, ob dieser Wert von ε akzeptiert werden kann oder nicht.

Die Funktion $f(\varepsilon)$ ist eine Summe von zwei Funktionen; es ist daher naheliegend die Methode des Probability Mixing² anzuwenden. $f(\varepsilon)$ wird also auf folgende Form gebracht:

$$\begin{aligned}f(\varepsilon) &= \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i f_i(\varepsilon) \\ \alpha_1 &= \int_{\varepsilon_{min}}^1 d\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} = \ln \left(\frac{1}{\varepsilon_{min}} \right) \\ \alpha_2 &= \int_{\varepsilon_{min}}^1 d\varepsilon \varepsilon = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon_{min}^2) \\ f_1(\varepsilon) &= \frac{1}{\ln(1/\varepsilon_{min})} \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in [\varepsilon_{min}, 1] \\ f_2(\varepsilon) &= \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon_{min}^2}, \quad \varepsilon \in [\varepsilon_{min}, 1].\end{aligned}$$

Man simuliert die Funktion f_1 mit der Transformationsmethode.³ Nach dieser Methode wird die Inverse der Verteilungsfunktion gesucht, welche sich wie folgt ergibt:

$$\varepsilon = \varepsilon_{min} e^{\alpha_1 \rho}$$

²Siehe Skriptum *Computersimulationen*, Kapitel 6: Stochastik - Monte Carlo Verfahren, Abschnitt 6.2.3.

³Siehe Skriptum *Computersimulationen*, Kapitel 6: Stochastik - Monte Carlo Verfahren, Abschnitt 6.2.1.

mit

$$\rho = \Phi(x) = \int_{\varepsilon_{min}}^x d\xi \varphi(\xi), \quad \varphi(\xi) = \xi^{-1}.$$

Die Funktion f_2 könnte unmittelbar gesampelt werden. Das Problem besteht nur darin, daß die untere Grenze des Intervalls nicht gleich Null ist und damit ist die numerische Effektivität des Algorithmus nicht gut. Wir führen eine Variablentransformation aus:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{min}}{1 - \varepsilon_{min}}. \quad (\text{F.18})$$

Diese Transformation soll wahrscheinlichkeitserhaltend sein, es gilt dann:

$$f_2'(\varepsilon') d\varepsilon' = f_2(\varepsilon) d\varepsilon, \quad f_2'(\varepsilon') = f_2(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon'}$$

mit

$$f_2'(\varepsilon') = 2\varepsilon' \frac{1 - \varepsilon_{min}}{1 + \varepsilon_{min}} + \frac{2\varepsilon_{min}}{1 + \varepsilon_{min}} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i' f_i''(\varepsilon').$$

Diese Funktion kann erneut mit Hilfe der Methode des Probability Mixing gesampelt werden. Es gilt wieder:

$$\begin{aligned} \alpha_1' &= \frac{1 - \varepsilon_{min}}{1 + \varepsilon_{min}} = \frac{\tilde{\omega}}{1 + \tilde{\omega}} \\ \alpha_2' &= \frac{2\varepsilon_{min}}{1 + \varepsilon_{min}} = \frac{1}{1 + \tilde{\omega}}, \end{aligned}$$

mit $\tilde{\omega} = \omega/m_0$; für die $f''(\varepsilon')$ -Funktionen erhalten wir:

$$\begin{aligned} f_1''(\varepsilon') &= 2\varepsilon', \quad \varepsilon' \in [0, 1] \\ f_2''(\varepsilon') &= 1, \quad \varepsilon' \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Die Simulation von $f_2''(\varepsilon')$ ist trivial: man wählt eine Zufallszahl und diese gibt den Wert für ε' und daraus folgt unmittelbar ε unter Verwendung von (F.18). $f_1''(\varepsilon')$ wird wie folgt gesampelt: man wählt zwei Zufallszahlen r_1 und r_2 und ε' wird gleich der größeren der beiden Zahlen gesetzt und daraus wieder ε mit Hilfe von (F.18) bestimmt. Daß dieses Verfahren gültig ist, läßt sich wie folgt plausibel machen: man geht von einer diskreten, äquidistanten Unterteilung des Intervalls $[0, 1]$ aus. Es ist dann die Zahl der Subintervalle gleich

$$n = \frac{1}{\Delta\varepsilon},$$

wenn $\Delta\varepsilon$ die Länge des Subintervalls ist. Die Anzahl der Möglichkeiten, daß die größere der beiden Zahlen aus dem i -ten Intervall stammt, ist gleich $2i - 1$. Diese Zahl ergibt sich aus folgender Überlegung:

- (i) $r_1 \geq r_2$
Das heißt, daß r_1 im Intervall i liegt. Es gibt nun i Möglichkeiten für das Intervall, in welchem r_2 liegt. Natürlich kann r_2 auch im selben Intervall wie r_1 liegen.
- (ii) $r_2 \geq r_1$
Hier wird dieselbe Argumentation wie unter Fall 1 verwendet, nur daß r_1 mit r_2 und umgekehrt vertauscht wird.

Also hat man $2i$ Möglichkeiten. Man hat aber den Fall, daß r_1 und r_2 im selben Intervall liegen doppelt gezählt, also bleiben nur $2i-1$ Möglichkeiten, daß die größere Zahl im Intervall i liegt. Also ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die größere Zahlen aus diesem Intervall kommt zu:

$$P_i = \frac{2i-1}{n} = \left(\frac{2i}{n} - \frac{1}{n} \right) \Delta\varepsilon.$$

Geht man nun mit der Intervalllänge gegen Null, so geht dies in

$$\varphi(\varepsilon) = 2\varepsilon d\varepsilon$$

über. Dies ist aber genau der gewünschte Ausdruck. Es sind also beide Funktionen leicht zu sampeln.

Man muß nun den Rejection Loop über die Funktion $g(\varepsilon)$ bestimmen. Ursprünglich hatten wir

$$g(\varepsilon) = \left(1 - \frac{\varepsilon \sin^2 \vartheta'}{1 + \varepsilon^2} \right); \quad (\text{F.19})$$

wir müssen also $\sin^2 \vartheta'$ bestimmen. Dies ist aber wieder nur möglich, wenn wir den Streuprozess explizite ausrechnen. Der Ausgangspunkt ist die Erhaltungsgleichung (F.2) in allgemeiner Form:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu.$$

Hat man alle Energien und Impulse gefunden, so kann man diese Gleichung nach p_4^μ auflösen:

$$p_4^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2(p_1 + p_2)p_3 + 2p_1p_2.$$

Nun gilt aber $p_i^2 = m_i^2$ und damit folgt unter Verwendung aller Beziehungen (F.17) zunächst

$$m_4^2 = m_1^2 + m_0^2 + m_3^2 + 2 \{ \omega m_0 - (\omega + m_0) \omega' + |\mathbf{k}| |\mathbf{k}'| \cos \vartheta' \}$$

und daraus folgt

$$\cos \vartheta' = \frac{m_4^2 - m_1^2 - m_0^2 - m_3^2 + 2(\omega + m_0)\omega' - 2\omega m_0}{2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|}. \quad (\text{F.20})$$

Diese Gleichung ist natürlich auch gültig, wenn wir die Indizes 3 und 4 gegeneinander vertauschen, und dies führt zu einer Gleichung für $\cos \alpha'$ (siehe Abb. F.1). Damit sind also die Winkel durch die Endenergien eindeutig bestimmt. Sind die Polarwinkel einmal bestimmt, so kann man den Azimuth eines Teilchens zufällig auswählen und das zweite Teilchen hat den entgegengesetzten Azimuth. Den Sinus finden wir natürlich aus

$$\begin{aligned} \sin \vartheta' &= \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta'} \\ \sin \alpha' &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha'}, \end{aligned}$$

und dies führt automatisch zum entgegengesetzten Azimuth. In unserem speziellen Fall ist nun $m_1 = m_3 = 0$ (Photonen!), $m_4 = m_0$ und damit folgt

$$\cos \vartheta' = \frac{(\omega + m_0)\omega' - \omega m_0}{\omega \omega'},$$

mit der bereits angegebenen Gleichung (F.5) für ω' . Wir formen um:

$$\cos \vartheta' = 1 + \frac{m_0 \varepsilon - m_0}{\omega \varepsilon} = 1 - t \quad (\text{F.21})$$

$$\sin^2 \vartheta' = (1 - \cos \vartheta')(1 + \cos \vartheta') = t(2 - t). \quad (\text{F.22})$$

Wenn also ein Wert für ε akzeptiert wurde, so können wir $\sin^2 \vartheta'$ und $\cos \vartheta'$ unmittelbar ausrechnen.

Damit ergibt sich folgende Vorgangsweise zur Bestimmung des Endzustandes nach einer Comptonstreuung bei gegebener Energie ω des einfallenden Photons:

1. Bestimmung aller Parameter, welche von ω , nicht aber von ε abhängen, also $\tilde{\omega}$, ε_{min} , α_1 und α_2 .
2. ε wird dann wie folgt gesampelt:
 - (i) Es werden zunächst zwei Zufallszahlen $r_1, r_2 \in [0, 1]$ gewürfelt.
 - (ii) Ist $\alpha_1 \geq (\alpha_1 + \alpha_2)r_1$, so verwendet man

$$\varepsilon = \varepsilon_{min} e^{\alpha_1 r_2}.$$

Ist dies nicht der Fall, so bestimmt man ε aus

$$\varepsilon = \varepsilon_{min} + (1 - \varepsilon_{min})\varepsilon',$$

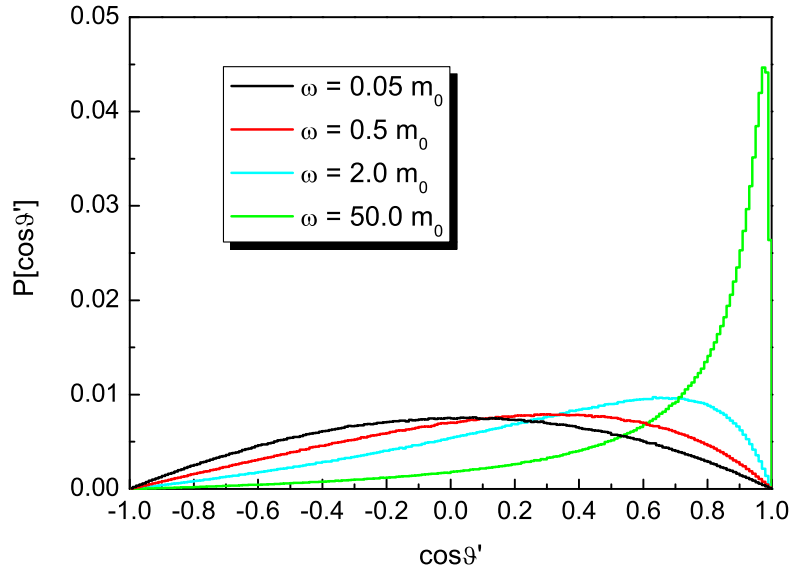


Abbildung F.2: Wahrscheinlichkeitshistogramm des Wirkungsquerschnittes der Compton-Streuung für verschiedene Werte der Energie der einfallenden Photons nach Gleichung (F.17) ohne Vorfaktor. Der Bereich $-1 \leq \cos \vartheta' \leq 1$ wurde in 201 Unterabschnitte unterteilt. Anzahl der Teilchen: 5000000. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\sum_{i=1}^{201} P_i[\cos \vartheta'] = 1$ für einen festen Wert von ω .

wobei ε' durch sampeln einer der Funktionen $f_i''(\varepsilon')$ gewonnen wird. Dazu würfelt man zwei weitere Zufallszahlen $r_3, r_4 \in [0, 1]$ und wenn $\tilde{\omega} \geq (\tilde{\omega} + 1)r_2$ ist, so erhält man durch sampeln von $f_1''(\varepsilon')$:

$$\varepsilon' = \max(r_3, r_4).$$

Im anderen Fall ergibt sich ε' aus sampeln von $f_2''(\varepsilon')$ unter Verwendung der Zufallszahl r_3 :

$$\varepsilon' = r_3.$$

3. Wir bestimmen nun t aus ε unter Verwendung von (F.21), berechnen $\sin^2 \vartheta'$, und daraus folgt die Funktion $g(\varepsilon)$ aus (F.19). Es ist nun r eine weitere Zufallszahl aus dem Intervall $[0, 1]$. Ist $r < g(\varepsilon)$ wird das Ergebnis für ε verworfen und man kehrt zum Schritt 2 zurück.

Auf diese Weise wurden die Endenergie ε' gefunden und man kann nun den Streuwinkel ϑ' mit Hilfe von (F.20) bestimmen. Schließlich wählt man noch

zufällig den Azimutwinkel und somit ist der Endzustand des Systems eindeutig bestimmt, nachdem nun aus dem Erhaltungssatz (F.2) der Winkel α' und die Energie E' bestimmt werden können.

Das Ergebnis einer solchen Monte Carlo Simulation unter Verwendung des Computer Codes, welcher im nächsten Abschnitt angegeben ist, ist in Abb. F.2 dargestellt, wobei für verschiedene Einschußenergien ω/m_0 die Wahrscheinlichkeit $P[\cos \vartheta']$ für einen bestimmten Cosinus des Austrittswinkels ϑ' als Funktion des Cosinus des Austrittswinkels dargestellt ist. Man erkennt, daß für $\omega \gg m_0$ die reine Vorwärtsstreuung $\cos \vartheta' = 1$ am wahrscheinlichsten ist, Rückwärtsstreuung $\cos \vartheta' = -1$ tritt praktisch nicht auf. Mit abnehmender Photonenenergie wird Vorwärtsstreuung immer unwahrscheinlicher und der wahrscheinlichste Streuwinkel nähert sich dem Winkel von 90° immer stärker an.

F.1.3 Der Computer Code

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define SIZE 200

double compton(double,double);
double epstrans(double,double,double,double);
void tally(double);

int det[SIZE+1];

int main()
{
    double m = 1.0; /* electron mass */
    double k0,eps,f,t,g,y3,q;
    double theta;
    int seed = 117, /* random seed */
        anzahl = 5000000, /* number of particles to sample */
        i,j,k;

    srand(seed);
    k0 = 0.05; /* set photon energy in units of m_0 */
    i = 0;
    q = m/k0;
```

```

for (k=0; k<=SIZE; k++)
    det[k] = 0;
for (i=0; i<= anzahl;) {
    eps = compton(k0,m);
    f = eps+1.0/eps;
    t = (m*(1.0-eps))/(k0*eps);
    g = 1.0-(eps*t*(2.0-t))/(1.0+eps*eps);
    y3 = (double)rand()/(double)RAND_MAX;
    if (y3 >= g) { /* rejection loop */
        theta = (1.0-(((1.0/eps)-1.0)*q));
        /* cosine of scattering angle */
        tally(theta+1.0); /* create histogramm */
        i++; /* increment particle counter */
    }
}
for (j=0; j<=SIZE; j++)
    printf("%lf\t%lf\n", (double)j+0.5,
           (double)det[j]/(double)anzahl);
return 1;
}
double compton(double k0, double m)
{
    double eps,epsmin,alpha1,alpha2,x,y;
    epsmin = 1.0/(1.0+2.0*(k0/m));
    alpha1 = log(1.0/epsmin);
    alpha2 = 0.5*(1.0-(epsmin*epsmin));
    x = (double)rand()/(double)RAND_MAX;
    y = (double)rand()/(double)RAND_MAX;
    if (alpha1 >= (alpha1+alpha2)*x)
        eps = epsmin*exp(alpha1*y);
    else
        eps = epstrans(k0,m,y,epsmin);
    return eps;
}
double epstrans(double k0, double m, double y, double epsmin)
{
    double x2,y2,ks,epst;
    x2 = (double)rand()/(double)RAND_MAX;
    y2 = (double)rand()/(double)RAND_MAX;
    ks = k0/m;
    if (ks >= (ks+1.0)*y)
        epst = x2 >= y2 ? x2 : y2;
}

```

```
        else
            epst = x2;
        return epsmin+(1.0-epsmin)*epst;
    }
void tally(double theta)
{
    int i;
    double theta1;
    theta1 = theta*100.0;
    i = (int)theta1;
    det[i]++;
}
```