10. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2010

Abgabe: Dienstag, 8. 6. 2010, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

Aufgabe 33: Streuung an einem Ferromagneten *(8 Punkte)*

Ein Strahl von Neutronen der Energie E und der Masse m fällt aus der negativen x-Richtung kommend senkrecht auf ein ferromagnetisches Material, das den gesamten Bereich $x \geq 0$ einnimmt. Die potentielle Energie eines Neutrons ist $V = V_1 + V_2$, wobei V_1 die Wechselwirkung des Neutrons mit den Nukleonen des Ferromagneten beschreibt, und V_2 die Wechselwirkung des magnetischen Moments $\hat{\vec{\mu}}$ des Neutrons (Spin $\frac{1}{2}$) mit dem im Ferromagneten vorhandenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, $B_z = \text{const} > 0$. Es sei

$$V_1(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ V_0 = \text{const} > 0 & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

$$V_2(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ -\hat{\vec{\mu}}\vec{B} & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

mit $\hat{\vec{\mu}} = -g\mu_0 \hat{\vec{S}}$ und $\vec{x} = (x, y, z)$. Dies ist zunächst ein dreidimensionales Problem. Das Potential $V(\vec{x})$ hängt aber nicht von y und z ab, sondern nur von x und vom Spin des Neutrons.

a) Geben Sie den gesamten Hamiltonoperator $\hat{H}$ an. Zeigen Sie, dass

$$[\hat{H}, \hat{P}_y] \;=\; [\hat{H}, \hat{P}_z] \;=\; [\hat{H}, \hat{S}_z] \;=\; 0 \quad .$$

Es gilt auch $[\hat{P}_y, \hat{P}_z] \;=\; [\hat{P}_y, \hat{S}_z] \;=\; [\hat{P}_z, \hat{S}_z] \;=\; 0$. Die Operatoren $\hat{H}$, $\hat{P}_y$, $\hat{P}_z$ und $\hat{S}_z$ kommutieren also paarweise miteinander und können deshalb gleichzeitig diagonalisiert werden. $\hat{H}$ vertauscht aber nicht mit $\hat{P}_x$, weil das Potential von x abhängt. Die Eigenfunktionen von $\hat{H}$ kann man daher faktorisieren:

$$\Psi(\vec{x}, \sigma) \;=\; \psi_1(x, \sigma)\; \psi_2(y)\; \psi_3(z) \quad .$$

Die Eigenfunktionen von $\hat{P}_j$ sind $\psi_j(x_j) \;\sim\; e^{-i\, p_j\, x_j}$. Da der Strahl senkrecht einfallen soll, gilt hier die Randbedingung $p_y = p_z = 0$, so dass einfach $\psi_2(y) \;=\; \text{const}$, $\psi_3(z) \;=\; \text{const}$.

Sie brauchen deshalb im Folgenden nur noch ein eindimensionales Problem zu lösen. Weil $\hat{H}$ mit $\hat{S}_z$ kommutiert, kann man beide gleichzeitig diagonalisieren, d.h. die Lösungen nach den Eigenwerten von $\hat{S}_z$ klassifizieren. Man hat daher Wellenfunktionen $\phi_\sigma(x) := \psi_1(x, \sigma)$, für einfallende Neutronen mit Spin σ in z-Richtung, d.h. parallel bzw. antiparallel zum Magnetfeld.

b) Es gelte $V_0 - \frac{\hbar}{2} g\mu_0 B_z \quad < \quad E \quad < \quad V_0 + \frac{\hbar}{2} g\mu_0 B_z$.

Bestimmen Sie die Wellenfunktionen $\phi_\sigma(x)$.

c) Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten für Neutronen mit Spin parallel bzw. antiparallel zu $\vec{B}$.

d) Man kann die Polarisation eines solchen Strahls als $P = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}$ definieren, wobei N_+ bzw. N_- die Anzahl der Neutronen mit Spin parallel bzw. antiparallel zur z-Achse ist. Der einfallende Strahl sei unpolarisiert, d.h. $P = 0$. Bestimmen Sie die Polarisation des reflektierten Strahls.

Aufgabe 34: Harmonischer Oszillator: Mischung von Zuständen

(6 Punkte)

a) Konstruieren Sie einen normierten Zustand als Linearkombination der Eigenzustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators derart, dass $\langle\hat{Q}\rangle$ so groß wie möglich wird. Wählen Sie in der Linearkombination reelle Koeffizienten.

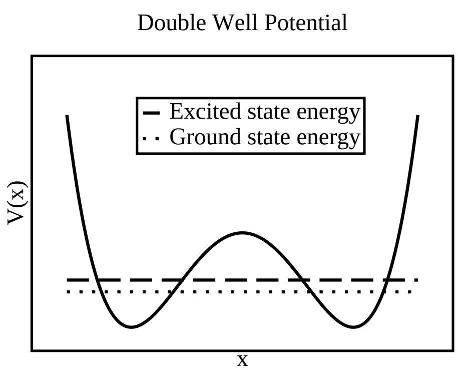
b) $|\psi(0)\rangle$ sei der eben konstruierte Zustandsvektor. Berechnen Sie $|\psi(t)\rangle$, $\langle\hat{Q}(t)\rangle$, $\langle\hat{P}(t)\rangle$. Bleiben die Koeffizienten der Basiszustände $|n\rangle$ reell ?

c) Berechnen Sie $\langle\hat{Q}^2(t)\rangle$.

Hinweis: Benutzen Sie für alle Rechnungen die Darstellungen der auftretenden Operatoren in Erzeugern und Vernichtern $a, a^\dagger$. Schreiben Sie zur Vereinfachung der Rechnung $\hat{Q}$ und $\hat{P}$ als $\hat{Q} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\,(a^\dagger + a)$ und $\hat{P} = i\,p_0\,(a^\dagger - a)$.

Aufgabe 35: Ein Teilchen im Doppelmuldenpotential

(6 Punkte)



Betrachten Sie das abgebildetete Doppelmuldenpotential $V(x)$. In der Abbildung ist bereits die Energie des Grund- und der ersten angeregten Zustands angedeutet. Das Potential $V(x)$ sei an $x = 0$ zentriert.

a) Wie wirkt sich die Spiegelsymmetrie von $V(x)$ auf die möglichen Wellenfunktionen aus?

b) Skizzieren Sie die Wellenfunktion des Grundzustands $\psi_0(x)$ und des ersten angeregten Zustands $\psi_1(x)$. Teilen Sie dazu die x-Achse in Regionen mit Krümmungen von $\psi(x)$ verschiedenen Vorzeichens auf. Betrachten Sie explizit die Situation an $x \to \pm\infty$. Fertigen Sie zwei getrennte Abbildungen an.

c) Skizzieren Sie die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands.

Hinweis: Überlegen Sie, welche Eigenschaften die Wellenfunktionen aufgrund der Schrödingergleichung und der Randbedingungen, die sich für jeden Teilbereich der x-Achse einstellen, haben müssen.