

AUSGEWÄHLTE KAPITEL AUS "NUMERISCHE METHODEN IN DER PHYSIK"

H. Sormann SS 2012

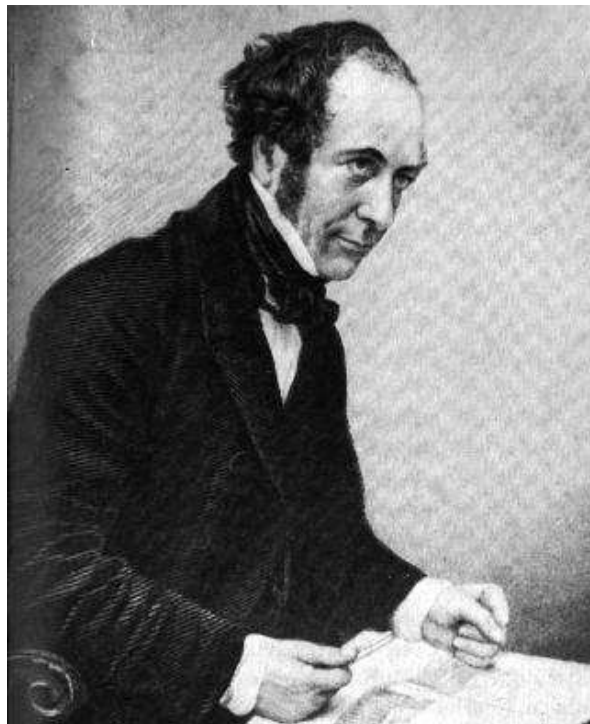
Drittes Thema: Solitonen

Numerische Auswertung einer wichtigen partiellen und nicht-linearen Differentialgleichung aus dem Gebiet der Hydromechanik, der sogenannten

Korteweg-de-Vries-Gleichung.

1. Einleitung und theoretische Grundlagen
2. Numerische Lösung der KdV-Gleichung mit Hilfe des Differenzenverfahrens
3. Weitere numerische Untersuchungen zur KdV-Gleichung
4. Physik solitonischer Meereswellen
5. Ergänzungen
6. Eine allgemeinere KdV-Gleichung

1. Einleitung und theoretische Grundlagen



John Scott Russell (1808-1882)

Mitte des 19. Jahrhunderts hat der schottische Ingenieur *John Scott Russell* einige interessante Beobachtungen über das Verhalten von Wasserwellen in seichten Kanälen im *Report of the British Association of Science* veröffentlicht. Scott hatte beobachtet, daß sich Oberflächenwellen in seichtem Wasser unter bestimmten Umständen merkwürdig verhalten. Eine solche Welle stellt ja gewöhnlich ein "Wellenpaket" dar, also eine Überlagerung zahlreicher Wellen mit verschiedenen Wellenlängen bzw. Wellenzahlen, wobei jede dieser Wellen eine verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeit (*Phasengeschwindigkeit*) haben kann. Eine solche Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenzahl nennt man bekanntlich *Dispersion*. Diese Eigenschaft führt im allgemeinen mit fortschreitender Zeit zu einem "Zerfließen" des Wellenpakets; Sie kennen dieses Phänomen vermutlich aus der Quantenmechanik: Untersuchungen solcher Wellenpakete hat z. B. *Werner Heisenberg* für die Illustration seiner Unschärferelation verwendet.

Zurück zu *Russell*: dieser hatte in der Natur beobachtet, daß manchmal Oberflächenwellen in seichten Kanälen keine Dispersion zeigen, sondern längere Zeit "formstabil" bleiben. Auch die Seeleute kennen solche stabilen Wellenzüge und nennen diese "Seegang". *Russell* hat auch beobachtet, daß derartige *solitary waves* [*solitons* (*Solitonen*)] außerordentlich robust gegenüber Störungen aller Art sind (z. B. Unebenheiten des Kanalbodens oder auf dem Wasser schwimmende Gegenstände).

Es hat ein halbes Jahrhundert gedauert, bis das *Russell'sche* Phänomen der Solitonenwellen theoretisch gelöst werden konnte: *D.J. Korteweg* und *G. de Vries* haben 1895 in einer umfassenden Arbeit gezeigt¹, daß Solitonenwellen spezielle Lösungen einer *nicht-linearen hydrodynamischen* Gleichung sind, in welcher die Nicht-Linearität durch einen Term vom Typus $u u_x$ und die Dispersion durch einen Term proportional zur dritten Ableitung von $u(x, t)$ nach dem Ort modelliert werden kann. $u(x, t)$ ist dabei natürlich die Höhe der Welle über dem Mittelwert am Ort x und zur Zeit t .

Die *Korteweg-de-Vries-Gleichung* (KdV-Gleichung) hat daher die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

wobei b eine problem-orientierte (reelle) Konstante ist.

Die Nicht-Linearität dieser partiellen Differentialgleichung bedeutet, daß wir uns bei Wellenphänomenen, welche der KdV-Gleichung gehorchen, vom *Superpositionsprinzip* verabschieden müssen, welches sowohl in der klassischen Elektrodynamik als auch in der Quantenmechanik gilt und die theoretische Arbeit wesentlich vereinfacht!

Ich kann hier nicht auf die relativ komplizierten mathematischen Aspekte der Arbeit von *Korteweg* und *de Vries* eingehen. Entscheidend ist, daß die obige Gleichung Lösungen hat, in denen sich eine Balance zwischen der Dispersion

¹D. Korteweg and G. de Vries, *On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves*, *Philosophical Magazine*, 5th series **36**, 422 (1895).

und nicht-linearen Effekten einstellt. Solche Lösungen werden als Solitonen bezeichnet.

Es wäre jedoch falsch anzunehmen, daß jede Lösung der KdV-Gleichung (1) ausschließlich solitonische Eigenschaften hat: entscheidend dafür ist nämlich das *Anfangsprofil* der Welle, d. h. – im Sinne eines Cauchy’schen Anfangswertproblems – die Funktion $u(x, 0)$.

Analytische Ausdrücke für Anfangs-Profile, die zu einer perfekten, nicht dispergierenden Lösung der KdV-Gleichung führen, sind nur für bestimmte Werte des Parameters b bekannt. Ein solches ’solitonisches’ Anfangs-Profil findet man z. B. im Buch von W. Kinzel und G. Reents, *Physik per Computer*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996, für den speziellen Fall

$$b = +6,$$

d.h. für die KdV-Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2)$$

Bei Verwendung dieser Konstante in der Glg. (1) erhält man aus der Anfangsfunktion

$$u(x, 0) = \frac{N(N+1)}{\cosh^2(x)} \quad (3)$$

rein solitonische Lösungen der KdV-Gleichung, wobei diese Lösungen jeweils aus N Solitonen bestehen. Für $N = 1$ und $N = 2$ sind auch die analytischen Ausdrücke für diese Lösungen bekannt:

- $N = 1$ (”Ein-Soliton-Welle”):

$$u(x, t) = \frac{2}{\cosh^2(x - 4t)} \quad (4)$$

- $N = 2$ (”Zwei-Solitonen-Welle”):

$$u(x, t) = 12 \frac{[3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)]}{[3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2} \quad (5)$$

2. Erste Aufgabe: Numerische Lösung der KdV-Gleichung

mittels des Differenzenverfahrens

Die Grundlagen des sehr einfachen *Differenzenverfahrens* zur Lösung von Differentialgleichungen können Sie im Kapitel 9 meines Skriptums "Numerische Methoden in der Physik" nachlesen. Dort wird es zwar nur auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen angewendet, aber wie Sie im folgenden sehen werden, ist auch die Anwendung auf eine partielle, nicht-lineare Differentialgleichung wie die KdV-Gleichung im Prinzip nicht schwierig.

Die auf numerischem Wege zu lösende Gleichung lautet also ²

$$u_t = -6uu_x - u_{xxx}. \quad (6)$$

Nun noch ein Wort zu den Nebenbedingungen: es geht im gegebenen physikalischen Problem um ein *Wellenpaket*. Wie kompliziert auch immer ein solches Paket aussehen mag, eine Eigenschaft kann stets angenommen werden: *das Paket soll eine endliche Breite haben*, d.h., die Lösung $u(x, t)$ soll stets die Randbedingungen

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0 \quad (7)$$

erfüllen. Solche im Unendlichen liegenden Bedingungen sind numerisch immer unangenehm; wir ersetzen sie daher für die folgenden Berechnungen durch *periodische* Randbedingungen, die wie folgt gegeben sind:

Wir definieren für die numerischen Berechnungen ein endliches Grundgebiet entlang der x -Achse, z. B. in der Form

$$x \in [-x_0, +x_0],$$

wobei die Breite dieses Intervalls die Periodizitätslänge P unserer Rechnung darstellt:

$$P = 2x_0.$$

Wir fordern nun für die Lösungsfunktion der Differentialgleichung (6) anstelle von (7) die Eigenschaft

$$u(x + P, t) = u(x, t). \quad (8)$$

Die Anfangsbedingung für unsere Rechnung für $b = +6$ wurde bereits in Glg. (3) angegeben. Wir wollen uns in dieser Aufgabe mit 2-Solitonen-Systemen befassen, also mit $N = 2$. Daraus folgt:

$$u(x, 0) = \frac{6}{\cosh^2(x)} \quad (9)$$

²wir schreiben im folgenden wie üblich: $\partial u / \partial t \equiv u_t$ usw.

Somit ist das Problem definiert: zu lösen ist die partielle, nicht-lineare Differentialgleichung (6) mit der Anfangsbedingung (9) und mit der Nebenbedingung (8) für $x \in [-x_0, +x_0]$ und für $t > 0$.

Diskretisierung des Grundgebietes:

Wenn wir den Bereich $x \in [-x_0, +x_0]$ in j_{max} gleiche Subintervalle unterteilen, erhalten wir eine *räumliche* Schrittweite

$$h = \frac{2x_0}{j_{max}}.$$

Für das Fortschreiten in der Zeit definieren wir eine *zeitliche* Schrittweite k . Wir können daher auf dem Grundgebiet ein System von *Netzpunkten* definieren mit der Eigenschaft

$$u^{j,n} \equiv u(-x_0 + jh; nk) \quad \text{mit } j = 0, \dots, j_{max} \quad \text{und } n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

In jedem Netzpunkt muß nun die Differentialgleichung (6) erfüllt sein. Um das zu erreichen, ersetzen wir die in (6) vorkommenden Differentialquotienten "durch geeignete Differenzenquotienten". Die einfachsten Differenzenquotienten für die ersten Ableitungen nach Ort und Zeit sind die sogenannten "vorwärts-2-Punkt-Formeln"

$$u_t^{j,n} \approx \frac{1}{k} (u^{j,n+1} - u^{j,n}) \quad (11)$$

für den zeitlichen und

$$u_x^{j,n} \approx \frac{1}{h} (u^{j+1,n} - u^{j,n}) \quad (12)$$

für den örtlichen Differentialquotienten. Wenn Sie die Gleichung (12) dreimal iterieren, erhalten Sie für die dritte Ableitung (bitte ausprobieren) die Formel

$$u_{xxx}^{j,n} \approx \frac{1}{h^3} (u^{j+3,n} - 3u^{j+2,n} + 3u^{j+1,n} - u^{j,n}). \quad (13)$$

Einsetzen der obigen Approximationen in die KdV-Gleichung führt zum Ausdruck

$$\frac{1}{k} (u^{j,n+1} - u^{j,n}) = -\frac{6}{h} u^{j,n} (u^{j+1,n} - u^{j,n}) - \frac{1}{h^3} (u^{j+3,n} - 3u^{j+2,n} + 3u^{j+1,n} - u^{j,n}).$$

Wie Sie sehen, kommt in dieser Gleichung nur 1 u -Wert vor, der zur $n + 1$ -ten "Zeitschicht" gehört; man kann also durch eine simple Umformung den Ausdruck

$$u^{j,n+1} = u^{j,n} + k \left[-\frac{6}{h} u^{j,n} (u^{j+1,n} - u^{j,n}) - \frac{1}{h^3} (u^{j+3,n} - 3u^{j+2,n} + 3u^{j+1,n} - u^{j,n}) \right] \quad (14)$$

gewinnen. Mittels dieses Ausdrucks kann man also die gesuchte Lösung erhalten, indem man "Zeitschicht" für "Zeitschicht" vorwärts schreitet. Für die

Berechnung der ersten Zeitschicht [d.h. (14) für $n = 0$] braucht man die Werte $u^{j,0}$; diese erhält man natürlich aus der Anfangsbedingung (9):

$$u^{j,0} = \frac{6}{\cosh^2(-x_0 + jh)}$$

Nun beginnt Ihre Arbeit: programmieren Sie die obigen Formeln in "Ihrer" Computersprache und lösen Sie das KdV-Problem für den 2-Solitonen-Fall.

Dazu ein paar Anmerkungen:

- Überlegen Sie sich, wie die periodische Randbedingung (8) in die Auswertung der Glg. (14) einbezogen werden kann.
- Arbeiten Sie mit den folgenden Parametern:

$x_0 = 10.0$	1. Test:	$k = 0.001$	$j_{\max} = 100$
	2. Test:	$k = 0.001$	$j_{\max} = 50$
	3. Test:	$k = 0.0001$	$j_{\max} = 50$

- Vergleichen Sie Ihre numerischen Ergebnisse "Zeitschicht für Zeitschicht" mit dem analytischen Ergebnis (5).
- Meine Prognose: Sie werden scheitern!
- Protokollieren Sie dieses Scheitern (in Tabellen, Bildern, Animationen, ...);
wie verändert sich die Situation bei Test1/Test2/Test3 ?
- Wie könnte man Ihrer Meinung nach aus diesem Dilemma herauskommen?

"Bessere" Differenzenquotienten:

Eine naheliegende Möglichkeit, die Qualität von Differenzen-Codes zu verbessern, liegt natürlich in der Anwendung genauerer Näherungen für die in (6) vorkommenden Differentialquotienten.

Auf diesem Gebiet gibt es ein großes Angebot von Seiten der Numerischen Mathematik, insbesondere was die sogenannten *Finiten Ausdrücke* betrifft³. Ich will hier nicht im Detail auf die Theorie zu diesem Thema eingehen und verweise auf die Literatur, z.B. auf G. N. Poloschi, *Mathematisches Praktikum*, Teubner, 1963, S. 265f. Aus diesem Buch stammt auch die folgende Tabelle, welche eine Reihe von einfachen Differenzenquotienten für Ableitungen der Ordnungen 1–4 enthält.

³Achtung: "Finite Ausdrücke" sind nicht identisch mit der "Methode der Finiten Elemente", welche heutzutage sehr häufig zur numerischen Auswertung partieller Differentialgleichungen herangezogen wird (s. Fachbücher, Fachartikel, oder auch die Unterlagen zu Übung *Finite Elemente*, Ausgewählte Kapitel Numerik, SS 2005).

Tabelle 15 (Zum verbesserten Differenzenverfahren)

	Formel (Bezeichnungen: $y_i = y(ih)$, $y_i^{(k)}(ih)$)	Das nächste nichtverschwindende Glied der TAYLOR-Entwicklung	Anzahl der Stützstellen
für y'	$y'_0 = \frac{1}{h}(y_1 - y_0)$	$-\frac{1}{2} h y''_0$	2
	$y'_0 = \frac{1}{2h}(y_1 - y_{-1})$	$-\frac{1}{6} h^2 y'''_0$	3
	$y'_0 = \frac{1}{12h}(-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2})$	$\frac{1}{30} h^4 y^{(5)}_0$	5
	$y'_0 = \frac{1}{60h}(y_3 - 9y_2 + 45y_1 - 45y_{-1} + 9y_{-2} - y_{-3})$	$-\frac{1}{140} h^6 y^{(7)}_0$	7
für y''	$y''_0 = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_0 + y_{-1})$	$-\frac{1}{12} h^2 y^{(4)}_0$	3
	$y''_0 = \frac{1}{12h^2}(-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2})$	$\frac{1}{90} h^4 y^{(6)}_0$	5
	$y''_0 = \frac{1}{180h^2}(2y_3 - 27y_2 + 270y_1 - 490y_0 + 270y_{-1} - 27y_{-2} + 2y_{-3})$	$-\frac{1}{560} h^6 y^{(8)}_0$	7
für y'''	$y'''_0 = \frac{1}{2h^3}(y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2})$	$-\frac{1}{4} h^2 y^{(5)}_0$	5
	$y'''_0 = \frac{1}{8h^3}(-y_3 + 8y_2 - 13y_{-1} + 13y_{-1} - 8y_{-2} + y_{-3})$	$\frac{7}{120} h^4 y^{(7)}_0$	7
für $y^{(4)}$	$y^{(4)}_0 = \frac{1}{h^4}(y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2})$	$-\frac{1}{6} h^2 y^{(6)}_0$	5
	$y^{(4)}_0 = \frac{1}{6h^4}(-y_3 + 12y_2 - 39y_1 + 56y_0 - 39y_{-1} + 12y_{-2} - y_{-3})$	$\frac{7}{240} h^4 y^{(8)}_0$	7

Wählen wir aus diesem Angebot nun die einfachsten *symmetrischen* Differenzenquotienten aus, also

$$u_t^{j,n} \approx \frac{1}{2k} (u^{j,n+1} - u^{j,n-1}), \quad (15)$$

$$u_x^{j,n} \approx \frac{1}{2h} (u^{j+1,n} - u^{j-1,n}) \quad (16)$$

und

$$u_{xxx}^{j,n} \approx \frac{1}{2h^3} (u^{j+2,n} - 2u^{j+1,n} + 2u^{j-1,n} - u^{j-2,n}). \quad (17)$$

Noch eine weitere kleine Veränderung des Algorithmus bringt eine deutliche Verbesserung der Stabilität: wie Sie sehen, kombiniert die Glg. (16) die Ortspunkte mit den Indizes $(j-1)$, j und $(j+1)$. Es ist nun vernünftig, im nicht-linearen Term der KdV-Gleichung (und nur dort!) die Größe u durch den Mittelwert über diese 3 Positionen zu ersetzen:

$$u^{j,n} \longrightarrow \frac{1}{3} (u^{j-1,n} + u^{j,n} + u^{j+1,n}). \quad (18)$$

Wenn Sie die Gleichungen (15–18) in die KdV-Gleichung (6) einsetzen und nach dem Element der $(n+1)$ -ten Zeitschicht auflösen, erhalten Sie den Ausdruck (bitte selbst verifizieren)

$$u^{j,n+1} = u^{j,n-1} + k \left\{ -\frac{2}{h} (u^{j+1,n} + u^{j,n} + u^{j-1,n}) (u^{j+1,n} - u^{j-1,n}) - \frac{1}{h^3} (u^{j+2,n} - 2u^{j+1,n} + 2u^{j-1,n} - u^{j-2,n}) \right\}. \quad (19)$$

Sie sehen sofort, daß dieser Ausdruck für jede Zeitschicht verwendet werden kann, *mit Ausnahme der ersten Zeitschicht*, denn in diesem Fall ist in (19) $n=0$ zu setzen, was im ersten Term rechts von Gleichheitszeichen die Kenntnis der Terme $u^{-1,j}$ erfordern würde. Aus diesem Grund ist es notwendig, nur für den Fall $n=0$ für die zeitliche Ableitung zum einfacheren Differenzenquotienten (11) zurückzukehren. Man erhält dann anstelle von (19) den Ausdruck

$$u^{j,1} = u^{j,0} + k \left\{ -\frac{1}{h} (u^{j+1,0} + u^{j,0} + u^{j-1,0}) (u^{j+1,0} - u^{j-1,0}) - \frac{1}{2h^3} (u^{j+2,0} - 2u^{j+1,0} + 2u^{j-1,0} - u^{j-2,0}) \right\}. \quad (20)$$

Nun beginnt Ihre Arbeit: programmieren Sie das KdV-Programm für den 2-Solitonen-Fall mit den verbesserten Differenzenquotienten.

- Machen Sie die folgenden Stabilitäts-Tests:

Erste Testreihe: $k = 0.001$ $j_{\max} = 120$
 Erhöhen Sie j_{\max} solange,
 bis Ihre numerische Rechnung
 versagt.

Zweite Testreihe: $k = 0.0005$ $j_{\max} = 150$
 Erhöhen Sie j_{\max} solange,
 bis Ihre numerische Rechnung
 versagt.

- Wenn Sie diese Tests abgeschlossen haben, entwickeln Sie ein Programm, mit welchem man die *Grenzlinie zwischen stabilen und instabilen Bereichen* für die Parameter h (= örtliche Schrittweite) und k (= zeitliche Schrittweite) bestimmen kann.

Gehen Sie bei der Programmentwicklung wie folgt vor:

- Wählen Sie eine *zeitliche Schrittweite* k im folgenden Bereich aus:

$$-5 \geq \ln k \geq -10$$

- Probieren Sie nacheinander (für dieses k) verschiedene *örtliche Schrittweiten* h aus, und zwar im Bereich

$$-1.4 \geq \ln h \geq -3.0$$

Dabei ist wichtig, daß Sie mit h beim größten Wert beginnen und dann sukzessive kleiner werden.

- Machen Sie nun für jede Kombination von k und h eine Simulation einer 2-Soliton-Welle, beginnend bei der Startkurve (9), und berechnen Sie mit den Gleichungen (19) und (20) die zeitliche Entwicklung der Solitonwelle für ca. 2000 Zeitschritte.
- Stellen Sie fest, bis zu welchem Wert von h diese Simulation stabil verläuft und wann die numerisch ermittelte Welle zum ersten Mal explodiert. *Überlegen Sie sich, wie Sie die "Explosion" der Welle automatisch registrieren können.*
- Tragen Sie dieses Wertepaar (h/k) bzw. $(\ln h / \ln k)$ in ein Diagramm ein.
- Wählen Sie einen neuen Wert für die zeitliche Schrittweite k aus, und wiederholen Sie diese Rechnung.
- Wenn Sie die Abstufungen der k und h fein genug wählen, erhalten Sie auf diese Weise eine genaue Grenzkurve zwischen dem stabilen und instabilen Bereich Ihrer numerischen Solitonen-Berechnung im (doppelt-logarithmischen) h - k -Koordinatensystem ($\ln h =$ Abszisse, $\ln k =$ Ordinate).

Mit diesem Programm können Sie einige interessante Fragen beantworten:

- Welche Beziehung zwischen k und h besteht an der Stabilitätsgrenze? **Versuchen Sie, diese Beziehung mathematisch zu formulieren.**
In der Literatur wird eine solche Stabilitätsbedingung zwischen der zeitlichen und örtlichen Schrittweite als *Courant condition* bezeichnet.
- Vollziehen Sie dieselben Rechnungen, die Sie für eine 2-Soliton-Lösung der KdV-Gleichung durchgeführt haben, auch für eine 1-Soliton-Lösung.
Ändert sich dadurch die Courant'sche Stabilitätsbedingung?
- Im letzten Teil dieser Aufgabe soll versucht werden zu klären, inwiefern der lt. Glg. (18) verwendete Mittelwert für das nicht-lineare (multiplikative) $u^{j,n}$ die Stabilitäts-Situation für eine 2-Soliton-Lösung ändert. Wiederholen Sie die Stabilitätsanalyse, wobei Sie aber diese Mittelung aus den Differenzenformeln (19) und (20) entfernen.

3. Zweite Aufgabe: Weitere numerische Untersuchungen zur KdV-Gleichung

In diesem letzten Teil der Solitonen-Übung sollen noch einige weitere interessante Aspekte dieses Themas behandelt werden:

Genauigkeits-Tests:

Bisher ging es ausschließlich um die Stabilität der numerischen Verfahren, welche natürlich die Grundvoraussetzung darstellt, um überhaupt eine sinnvolle Rechnung durchführen zu können. Das wesentliche Ergebnis der Tests war, daß stabile numerische Verfahren zweierlei erfordern: erstens die Wahl der "richtigen" Differentialquotienten, und zweitens die Beachtung der *Courant-Bedingung* bei der Wahl der örtlichen (h) und der zeitlichen (k) Schrittweite. Im Falle der KdV-Gleichung bedeutet das, daß eine Verkleinerung von h eine massive Verkleinerung von k zur Folge hat.

Andererseits ist zu erwarten, daß eine zu große örtliche Schrittweite die Genauigkeit der Darstellung einer Solitonenwelle beeinträchtigt.

Dieses Faktum soll nun numerisch untersucht werden:

- Studieren Sie unter Verwendung der Differenzenformeln (19) und (20) sowie der Anfangsverteilung (9) das Verhalten einer 2-Solitonenwelle, wobei Sie als zeitliche Schrittweite den sehr kleinen Wert

$$\ln k = -9$$

verwenden. Beobachten Sie die Differenzen zwischen dem *numerischen Soliton* und dem *analytischen Soliton* [Glg. (5)] für 1000 Zeitschritte. Zeigen Sie mittels graphischer Darstellung, wie diese Differenzen "im Laufe der Zeit" anwachsen.

- Machen Sie diesen Test dreimal, und zwar mit folgenden *örtlichen* Schrittweiten (alle drei Werte liegen im stabilen Bereich!):

$$\ln h = -1.4 \quad \ln h = -2.0 \quad \ln h = -2.6$$

Wie sehen die entsprechenden Differenzen zwischen den numerisch bzw. analytisch ermittelten Solitonenlösungen aus?

- Wiederholen Sie diesen gesamten Test *ohne Mittelungs-Terme* in den Differenzenformeln (19) und (20). Wie wirkt sich diese Maßnahme auf die Genauigkeit der numerischen Lösungen aus?

Einfluß der Anfangsbedingung:

Achtung: Ich habe kürzlich zu diesem Thema eine Diskussion mit einem Solitonen-Experten gehabt, welcher behauptet, dass sich auch bei nicht-solitonischer Anfangsform die KdV-Lösung mit steigender Zeit asymptotisch einer perfekt-solitonischen Lösung annähert.

Ich werde das genauer untersuchen: bitte schauen Sie in den nächsten Tagen hin und wieder in diese Website hinein.

Am Beginn dieser Übungsbeschreibung (S. 3) habe ich darauf hingewiesen, daß eine perfekte solitonische Lösung der KdV-Gleichung sich nur dann ergibt, wenn von ganz bestimmten Anfangsformen der Welle ausgegangen wird.

Im folgenden Test sollen Sie nun untersuchen, welche numerischen Lösungen sich aus der KdV-Gleichung (2) ergeben, wenn die Anfangsbedingung nicht der Formel (3) entspricht, sondern z.B. die Form eines "Kastens" hat, der anfangs symmetrisch um den örtlichen Nullpunkt postiert ist. Als Parameter hat man hb , die halbe Breite des Kastens, und Y , seine Höhe.

Ihre Aufgabe ist im Prinzip ganz einfach:

- Lösen Sie numerisch die KdV-Gleichung mit dem Kasten als Anfangsform, und verfolgen Sie die Entwicklung der Lösung über 1500 Zeitschritte.
- Als zeitliche und örtliche Schrittweiten nehmen Sie

$$\ln k = -8.5 \quad \text{und} \quad \ln h = -2.4$$

- Als Parameter für den Kasten beginnen Sie mit

$$hb = 0.5 \quad \text{und} \quad Y = 1.0$$

- Ein Problem muß bei diesem Test berücksichtigt werden: die entstehende KdV-Lösung wird wesentlich "unreiner" ausfallen als im Falle eines perfekten Solitons. Wegen der periodischen Randbedingungen kann es daher zu unschönen (und unphysikalischen) Überlagerungen der periodisch aufeinanderfolgenden Wellen kommen.

Um diesen Effekt zu reduzieren, ist es sinnvoll, die eingestellte Periode wesentlich zu erhöhen: für alle bisherigen Tests in dieser Übung habe ich $x_0=10$ genommen, ab jetzt schlage ich für x_0 den Wert 50 vor. Das "Sichtfenster" für die grafische Darstellung sollte aber viel schmaler sein, nämlich (z.B.) $-3 \geq x \geq +4$.

Beobachten Sie, was sich zeitlich aus dem Kasten am Anfang entwickelt.

- Für weitere Tests erhöhen Sie sukzessive die Breite des Kastens bis $hb=1.0$. Wie reagiert die KdV-Lösung?

4. Dritte Aufgabe: Physik solitonischer Meereswellen

Am Ende dieser Übung möchte ich Ihnen auch jene KdV-Gleichung vorstellen, welche die physikalischen Gegebenheiten einer Solitonenwelle auf einer Wasseroberfläche beschreibt. Die folgenden Ausführungen basieren hauptsächlich auf dem Buch von R. Meinel, G. Neugebauer und H. Steudel, *Solitonen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1991.

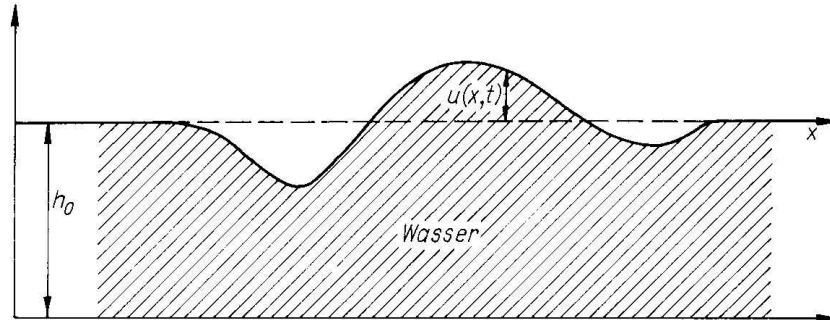


Abb.: Beschreibung der Wasseroberfläche zu einem fixierten Zeitpunkt t in einem (eindimensionalen) Kanal der Tiefe d .

Achtung: in der Zeichnung wird die Kanaltiefe mit h_0 bezeichnet; um Verwechslungen mit der in diesem Skriptum mit h bezeichneten örtlichen Schrittweite zu vermeiden, verwende ich im Folgenden für die Wassertiefe das Symbol d .

Die *physikalisch relevante Form* der KdV-Gleichung sieht folgendermaßen aus:

$$u_t + \sqrt{gd} \left(u_x + \frac{d^2}{6} u_{xxx} + \frac{3}{2d} u u_x \right) = 0 \quad (21)$$

mit $u(x, t)$ als der Wellenhöhe am Ort x und zur Zeit t , d als der Kanaltiefe und g als der Gravitationskonstanten ($= 9.81 \text{ m/s}^2$).

Die entsprechende Anfangsform einer *Ein-Solitonen-Welle* lautet

$$u(x, 0) = \frac{a}{\cosh^2 \left(\sqrt{3a/(4d^3)} x \right)}, \quad (22)$$

wobei a die Amplitude der Welle bedeutet.

Nun soll kurz gezeigt werden, wie aus den obigen Gleichungen die Ihnen wohlbekannte dimensionsfreie Form der KdV-Gleichung folgt:

Als ersten Schritt wird berücksichtigt, daß eine perfekte Ein-Solitonenwelle sich mit einer konstanten *Basis*-Geschwindigkeit \sqrt{gd} bewegt. Da diese Bewegung in der grafischen Darstellung nicht viel hergibt, ist es sinnvoll, mit einer x -Koordinate zu arbeiten, welche diese Geschwindigkeit kompensiert, d.h. man macht die Transformation

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - t\sqrt{gd}; t). \quad (23)$$

Daraus folgt sofort

$$u_t = \tilde{u}_t - \sqrt{gd} \tilde{u}_x,$$

woraus durch Einsetzen in die Gleichung (21) die Differentialgleichung

$$\tilde{u}_t + \sqrt{gd} \left(\frac{d^2}{6} \tilde{u}_{xxx} + \frac{3}{2d} \tilde{u} \tilde{u}_x \right) = 0 \quad (24)$$

folgt.

Der zweite Schritt besteht darin, daß man für die Funktion \tilde{u} und die Orts- und Zeitvariable dimensionslose Größen einführt, nämlich

$$w = \frac{\tilde{u}}{d}, \quad y = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x}{d} \quad \text{und} \quad \tau = \sqrt{\frac{3g}{32d}} t. \quad (25)$$

Die Berücksichtigung dieser Transformationen führt die Glg. (24) auf die Form

$$w_\tau + 6 w w_y + w_{yyy} = 0 \quad (26)$$

über. Unterwirft man die Ein-Soliton-Anfangsform (22) derselben Transformation, ergibt sich

$$w(y) = \frac{(a/d)}{\cosh^2\left(\sqrt{a/(2d)} y\right)}. \quad (27)$$

Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit der Glg. (3) am Beginn dieses Skriptums für $N = 1$, nämlich

$$w(y, 0) = \frac{2}{\cosh^2(y)},$$

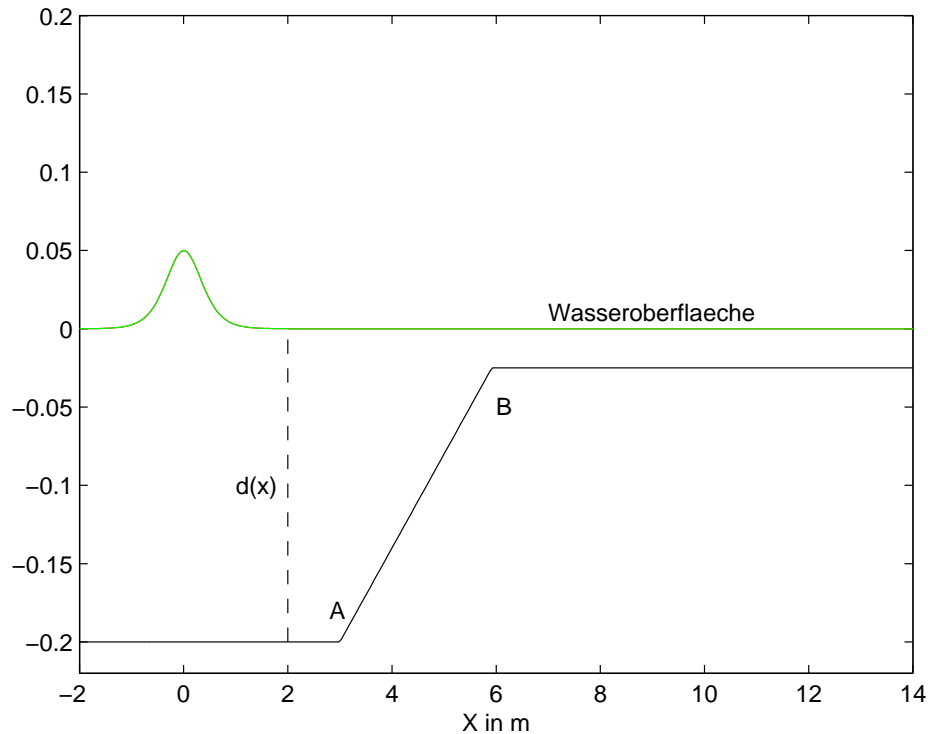
so erkennen Sie, daß die jetzige Gleichung einen zusätzlichen Freiheitsgrad enthält, nämlich das Verhältnis von Solitonen-Amplitude zu Wassertiefe. Die Gleichung (3) beschreibt nur den Sonderfall, wenn gilt:

$$a = 2d.$$

Warum ich von der parameterfreien KdV-Gleichung auf die Form Glg. (21) zurückkomme, hat die folgende Ursache: man erhält dadurch die Möglichkeit, das Verhalten einer Solitonenwelle unter modifizierten, analytisch nicht ohne weiteres zugänglichen Bedingungen auf numerischem Wege zu studieren. Damit meine ich z.B. das Auftreten von sich örtlich ändernden Wassertiefen, das man mittels einer Verallgemeinerung der Glg. (21) in der Form

$$u_t + \sqrt{gd(x)} \left(u_x + \frac{d(x)^2}{6} u_{xxx} + \frac{3}{2d(x)} u u_x \right) = 0 \quad (28)$$

untersuchen kann. Als Bodenprofil $d(x)$ schlage ich die folgende Ausgangssituation vor:



Die Funktion $d(x)$ beschreibt die (positive) Wassertiefe am Ort x : ihr Profil sieht so aus, daß sie für alle $x \leq x_A$ den Wert d_A hat, und für alle $x \geq x_B$ den Wert d_B . Im Bereich $x_A < x < x_B$ variiert die Wassertiefe *linear* zwischen d_A und d_B .

Was die numerische Behandlung dieses Problems betrifft, so verwenden Sie wie in den letzten Aufgaben die symmetrischen Differentialquotienten

$$u_t^{j,n} \approx \frac{1}{2\Delta t} (u^{j,n+1} - u^{j,n-1}), \quad (29)$$

$$u_x^{j,n} \approx \frac{1}{2\Delta x} (u^{j+1,n} - u^{j-1,n}) \quad (30)$$

und

$$u_{xxx}^{j,n} \approx \frac{1}{2\Delta x^3} (u^{j+2,n} - 2u^{j+1,n} + 2u^{j-1,n} - u^{j-2,n}). \quad (31)$$

sowie

$$u^{j,n} \longrightarrow \frac{1}{3} (u^{j-1,n} + u^{j,n} + u^{j+1,n}). \quad (32)$$

Ein simples Problem ist noch zu lösen: wie findet man Paare von zeitlichen und örtlichen Schrittweiten, die eine stabile Entwicklung des numerischen Verfahrens gewährleisten?

Das ist ganz einfach: aus Ihrer Stabilitäts-Analyse gemäß den Seiten 8 und 9 dieses Skriptums kennen Sie die stabilen Bereiche der zeitlichen (k) und

örtlichen Schrittweite (h) für die dimensionslose KdV-Gleichung (26). Aus diesen Ergebnissen können Sie durch Verwendung der linearen Transformationen (25) die entsprechenden stabilen Werte Δt und Δx für die Glg. (28) durch

$$\Delta t = \sqrt{\frac{32d}{3g}} k \quad \text{und} \quad \Delta x = \sqrt{\frac{2}{3}} d h$$

erhalten. Es stellt sich nur noch die Frage, welche Wassertiefe man für d einsetzen soll. Meine Tests haben ergeben, daß man dafür ruhig die maximale Wassertiefe nehmen kann:

$$d = d_A.$$

- **Ihre Aufgabe** besteht nun darin, das Ein-Solitonen-Problem [Gleichungen (22) und (28)] unter Annahme des Tiefenprofils der obigen Zeichnung zu lösen:

Was geschieht, wenn eine Ein-Solitonenwelle aus tiefem Wasser relativ abrupt in seichtes Wasser gerät, z.B. aus dem offenen Meer in eine dem Land vorgelagerte Lagune?

- Lösen Sie das Problem mit den folgenden Angaben:

Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

max. Wassertiefe $d(A) = 0.2 \text{ m}$

min. Wassertiefe $d(B) = 0.005 \text{ m}$

Solitonen-Amplitude $a = 0.05 \text{ m}$

$x(A) = 3 \text{ m}$

$x(B) = 6 \text{ m}$

Der Periodizitätsbereich sei 15 m ,

und das Diagramm-Fenster sei x in $[-2, +15] \text{ m}$.

- Ich gebe zu, daß diese Angaben reichlich konstruiert sind, sodaß man sicherlich keine allzu realistische Darstellung der Physik von Meereswellen daraus erwarten kann: dennoch sind die Ergebnisse dieser einfachen numerischen Simulation recht beeindruckend - finde ich jedenfalls!

5. Ergänzungen

Anmerkung: Viele wichtige Anregungen zu den folgenden Tests habe ich den folgenden Büchern entnommen:

[1] P.G. Drazin and R.S. Johnson, *Solitons: an introduction*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989).

[2] W. Kinzel und G. Reents, *Physik per Computer*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1996).

Bisher ging es in dieser Übungsbeschreibung ausschliesslich um die sehr spezielle Form der KdV-Gleichung

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (33)$$

Von Anfang an war ein wichtiger Punkt der Diskussion: *Unter welchen Umständen erhält man eine rein solitonische Lösung der nicht-linearen Differentialgleichung (33)?*

Wie bereits auf Seite 3 erwähnt, ergibt die Startfunktion

$$u(x, 0) = \frac{N(N+1)}{\cosh^2(x)} \quad (34)$$

stets eine N-Solitonen-Lösung. Die folgenden Tests basieren auf einer numerischen Auswertung von Gl. (33) und (34) unter Verwendung der Differenzenformeln (19) und (20).

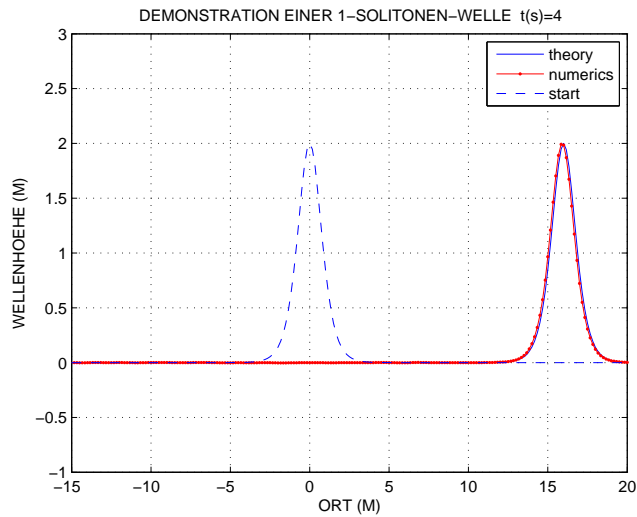
Test 1: die Ein-Solitonen-Lösung von (33)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat diese Lösung gemäss Gl. (34) die Form

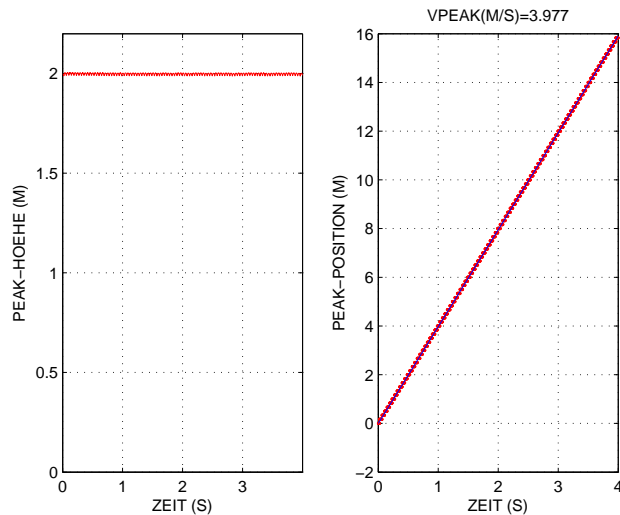
$$u(x, 0) = \frac{2}{\cosh^2(x)}, \quad (35)$$

was phänomenologisch einer Gauss-ähnlichen Kurve mit der peak-Höhe 2.0 entspricht.

Wie ein numerischer Test ergibt, bewegt sich die entsprechende Lösung von Gl. (33) mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts, *ohne die Form bzw. die peak-Höhe zu verändern*. Diese Eigenschaften sind für eine Solitonenwelle typisch:



Für diesen und die folgenden Tests habe ich in mein Rechenprogramm ein simples Auswertesystem für die peak-Höhe und für die Geschwindigkeit der Solitonenwelle eingebaut. Im konkreten Fall ergeben sich die folgenden Diagramme:



Man kann also zusammenfassen: die 1-Solitonen-Lösung der KdV-Gleichung (33) hat eine konstante peak-Höhe von 2 m und bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 3.977 m/s. Diese numerisch ermittelten Werte passen ausgezeichnet zu der - für diesen einfachen Fall - auch analytisch vorliegenden Lösung (4)

$$u(x, t) = \frac{2}{\cosh^2(x - 4t)}.$$

Während dieser Bewegung kommt es zu keinem Zerfließen des Wellenpaketes (zu keiner *Dispersion*): genauere theoretische Untersuchungen zeigen, dass diese Formstabilität darauf zurückzuführen ist, dass der "dispersive Term" der Wellengleichung (u_{xxx}) durch deren nicht-linearen Term ($6uu_x$) kompensiert wird.

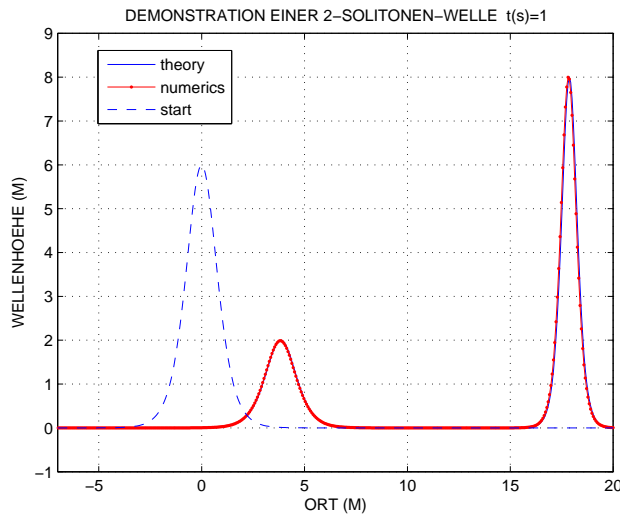
Test 2: die Zwei-Solitonen-Lösung von (33)

Um eine perfekte 2-Solitonen-Lösung der KdV-Gleichung (33) zu erhalten, muss man im Sinne der Formel (34) von der Anfangsform

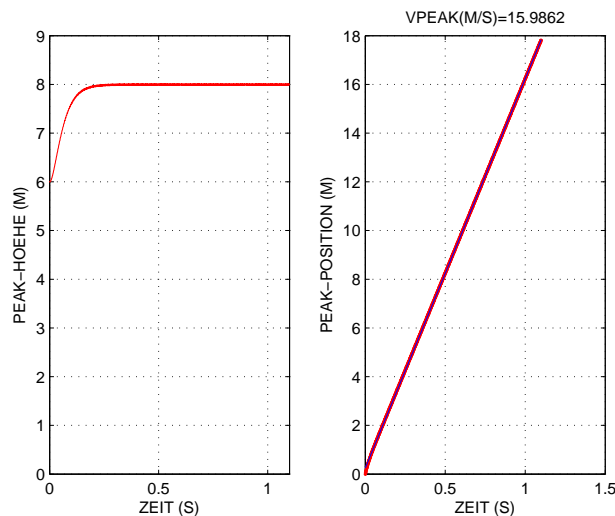
$$u(x, 0) = \frac{6}{\cosh^2(x)}, \quad (36)$$

mit einer peak-Höhe von 6 m ausgehen. In den folgenden Bildern zeige ich Ihnen die wichtigsten numerischen Ergebnisse für diesen Fall.

Besonders interessant sind die ersten Sekunden dieser Welle: die Anfangsfunktion ist (wie im 1-Solitonen-Fall) eine gauss-ähnliche Kurve mit der peak-Höhe 6; in der Folge löst sich ein "grosses" Solitonen von einem kleineren ab und entfernt sich von diesem mit relativ grosser Geschwindigkeit. Der "kleine" Soliton bewegt sich ebenfalls nach rechts, seine Geschwindigkeit ist jedoch sehr viel kleiner: dementsprechend wird der Abstand der beiden Solitonen rasch grösser:



Macht man nun dieselbe peak- und Geschwindigkeits-Analyse als vorhin für den 1-Solitonen-Fall, ergibt sich dieses Ergebnis:



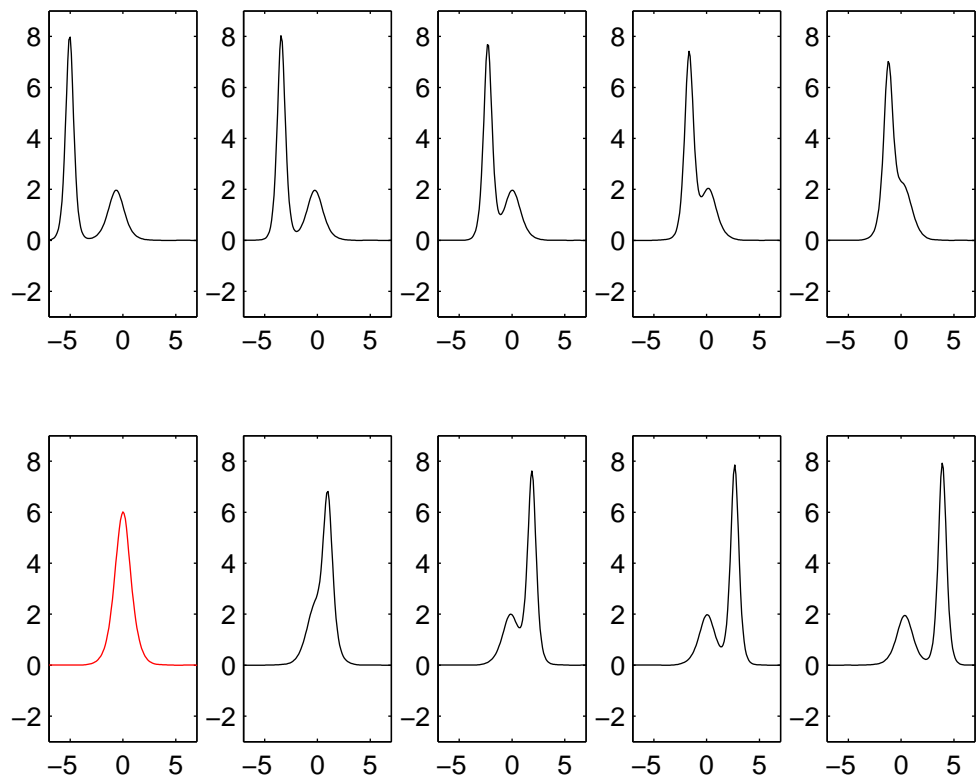
Obwohl diese Diagramme auf den ersten Blick "harmlos" aussehen, erkennt man leicht, dass das Verhalten dieser beiden Solitonen völlig verschieden ist vom Verhalten von Wellen, die aus linearen Wellengleichungen hervorgehen:

- Wie bereits am Anfang dieser Übungsbeschreibung betont wurde, gilt wegen der Nicht-Linearität der KdV-Gleichung das Superpositionsprinzip nicht mehr: würden z.B. beiden Teilwellen am Beginn der Bewegung einfach übereinander liegen, müsste der Gesamtpeak der Summe der Einzel-peaks entsprechen, also $8+2=10$ sein.

Genau das Gegenteil ist der Fall: der peak hat bei $t=0$ der Wert 6, und das "grosse" Soliton wird um zwei Einheiten höher, wenn es sich vom "kleinen" Soliton löst.

- Unabhängig davon bewegt sich der "Hauptpeak" *von Anfang an* mit der konstanten Geschwindigkeit von numerisch 15.99 (analytisch 16) Geschwindigkeits-Einheiten. Ich habe auch die Geschwindigkeit des kleinen Solitons "gemessen" und habe einen Wert von (nahe) 4 Einheiten festgestellt. Daraus kann bereits hier der Schluss gezogen werden, dass zwischen der peak-Höhe und der Geschwindigkeit eine einfache proportionelle Beziehung besteht.

Das folgende Diagramm zeigt Ihnen den *Überholvorgang* des von links kommenden Solitons mit dem $peak=8$ in bezug auf das viel langsamere Soliton mit dem $peak=2$:



Wie Sie sehen, "verschluckt" das grosse Soliton das kleine zuerst vollständig (s. die rote Kurve), um sich danach wieder von ihm zu lösen. Am Ende des Überholvorganges sind beide Solitonen völlig unversehrt aus diesem Prozess hervorgegangen.

Wie Sie auch sehen, stellt die "rote Kurve" keineswegs eine simple Addition der beiden Teilwellen dar, denn in diesem Fall müssten sich ja die Amplituden (8 und 2) auf 10 aufsummieren. Gerade das Gegenteil ist jedoch der Fall: die "rote Kurve" hat eine Amplitude von $8-2=6$.

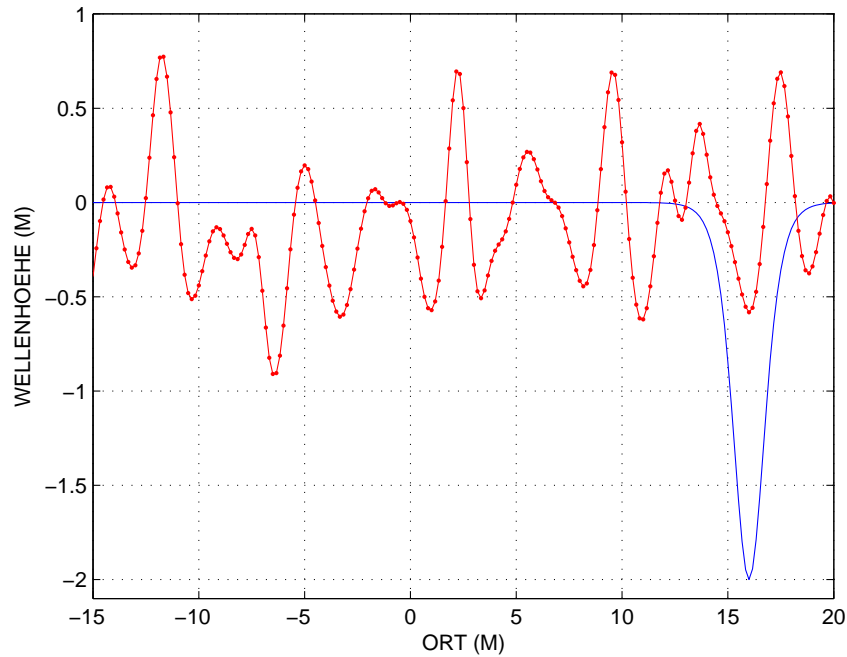
Test 3: absolut "un-solitonisch"

Die folgende Demonstration soll Ihnen nochmals zeigen, wie unterschiedlich die nicht-lineare KdV-Gleichung sich im Vergleich zu einer linearen Schwingungsgleichung sich verhält. Sie kennen natürlich die Regel, dass, wenn die Funktion $y(x)$ Lösung einer linearen, homogenen Differentialgleichung ist, auch jede Funktion $cy(x)$ eine Lösung darstellt. Dies ist bei einer nicht-linearen Differentialgleichung natürlich nicht mehr der Fall.

Machen wir die Probe aufs Exempel, indem wir die Wellengleichung (33) mit der Anfangsfunktion

$$u(x, 0) = -\frac{2}{\cosh^2(x)}, \quad (37)$$

starten. Es entwickelt sich eine Lösung von der Form



Offensichtlich ist durch das Minus-Vorzeichen in Gl. (37) das Gleichgewicht zwischen Dispersion und Formverhaltung massiv gestört.

6. Vierte Aufgabe: eine "allgemeinere" KdV-Gleichung

Es ist klar, dass die bisher behandelte KdV-Gleichung (33) ein sehr spezieller Fall ist. Aus der Literatur lernen wir, dass zahlreiche ähnliche nicht-lineare Schwingungsgleichungen existieren, wie z.B. die folgende, welche ich *eine allgemeinere KdV-Gleichung* nenne:

$$u_t + c_1 u_x + c_2 u u_x + c_3 u_{xxx} = 0. \quad (38)$$

Die möglichen Anfangsformen solitonischer Lösungen haben lt. Solitonen-Literatur die Form

$$u(x, 0) = \frac{\alpha}{\cosh^2(\sqrt{\beta}x)}, \quad (39)$$

wobei jedoch zu beachten ist, dass die Gl. (39) *nur für bestimmte Kombinationen der (reellen) Parameter α und β rein solitonische Lösungen von Gl. (38) erzeugt*, wobei dieser Zusammenhang zwischen α und β von den drei ebenfalls reellen Parametern c_1 , c_2 und c_3 abhängt. In dieser Aufgabe sollen Sie auf rein numerischer Basis diese Zusammenhänge untersuchen.

Ein entscheidender Punkt dieser Untersuchung lautet nun: wie kann man eine (z.B.) 1-Soliton-Lösung von Gl. (38) - und nur um solche geht es im Folgenden - von "Nicht-Solitonen" unterscheiden?

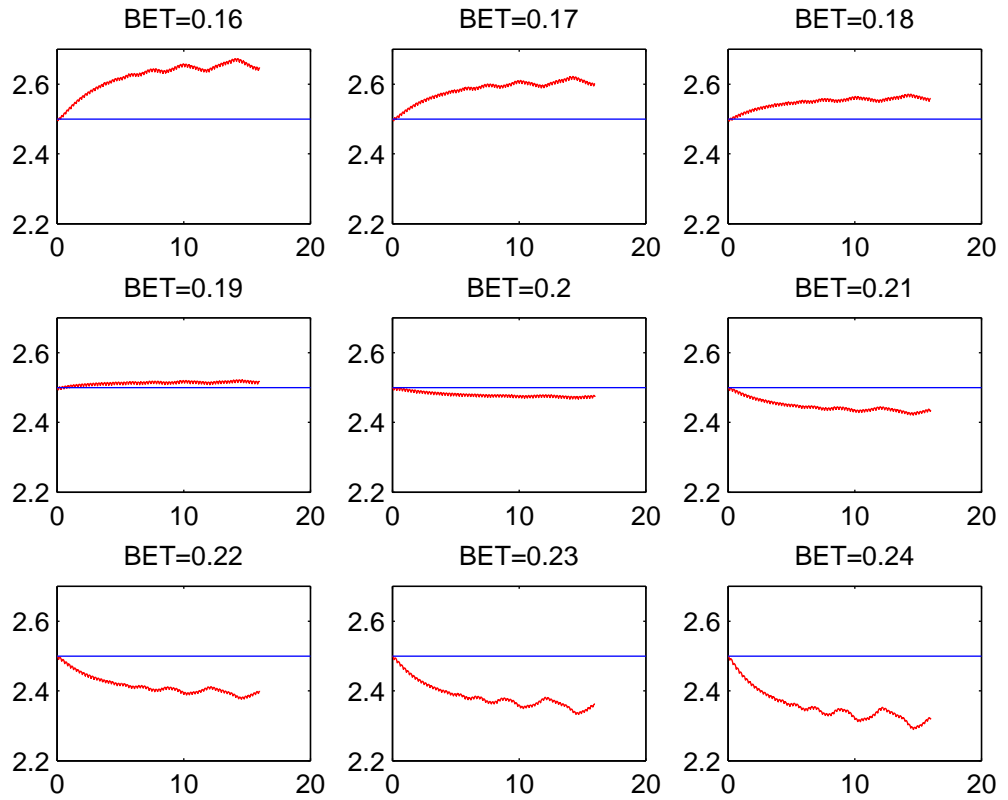
- Das erste und wichtigste Kriterium ist die (zeitliche und örtliche) Konstanz des Solitonen-Maximums, wobei das Maximum am Anfang der Zeitentwicklung gemäss Gl. (39) den Wert α hat.
- Das zweite Kriterium ist einfach zu beschreiben aber numerisch schwierig zu formulieren: es sollten sich mit fortschreitender Zeit neben dem Haupt-Peak keine weiteren Schwingungen ausbilden.

Ich möchte Ihnen dieses Problem an einem Beispiel im Detail vorführen:

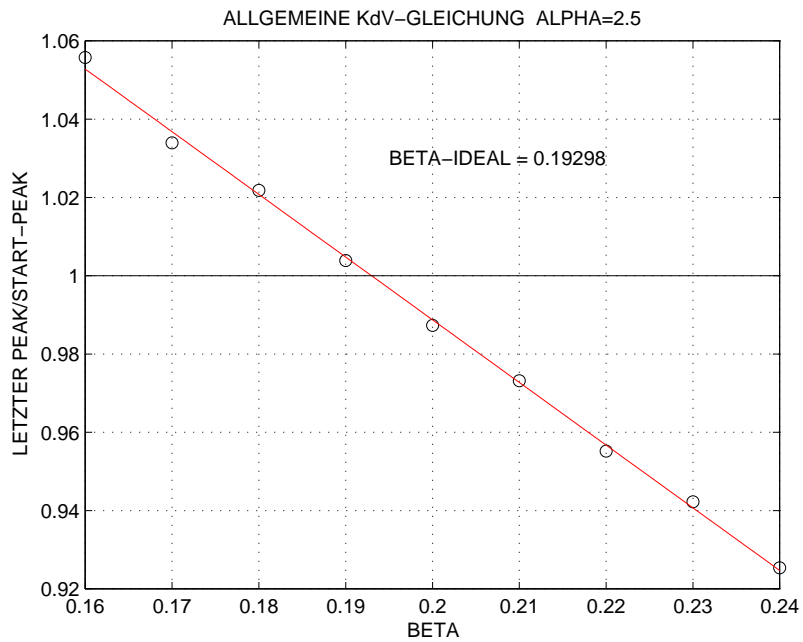
Angenommen, die Parameter der zu lösenden "allgemeineren" KdV-Gleichung lauten

$$c_1=0.5 \quad c_2=0.75 \quad c_3=0.8$$

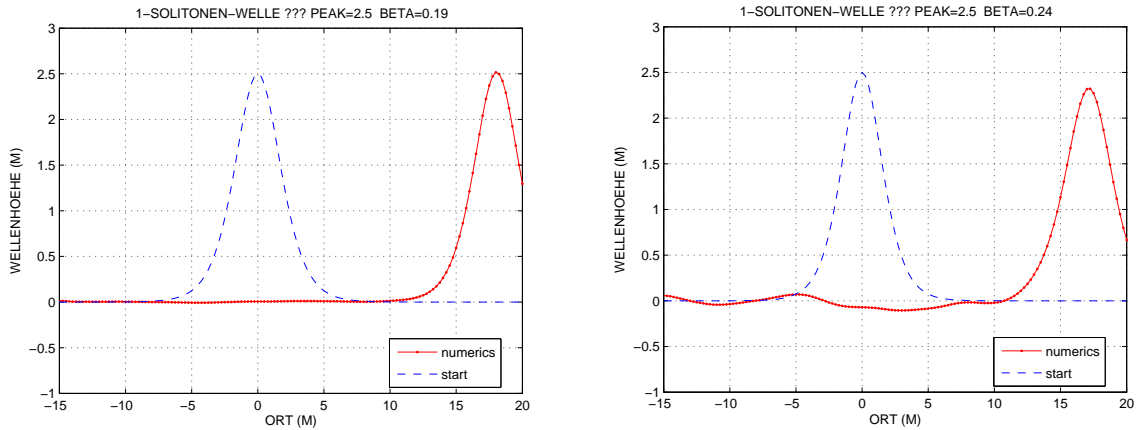
und der Parameter α in der Anfangsgleichung (39) habe den Wert 2.5. Wenn man dann auf numerischem Wege die Zeitentwicklung einer (möglichen) 1-Soliton-Lösung gemäss den Gleichungen (38) und (39) mehrere Male mit verschiedenen Werten für β durchführt, und die Entwicklung der Peak-Höhe (auf Eins normiert) als Funktion der Zeit aufträgt, erhält man (mit der zeitlichen Schrittweite $k=0.006$ und der Zahl der örtlichen Subintervalle $j_{max}=160$) das folgende Ergebnis:



Wie Sie sehen, ist die geforderte Konstanz des Peaks von 2.5 nur nahe $\beta=0.19$ realisiert; für β -Werte, welche darunter oder darüber liegen, ist diese Konstanz keinesfalls gegeben. Trägt man nun die Peak-Werte am Ende der numerisch ermittelten Kurven (in Einheiten von 3.5) als Funktion von β in ein Diagramm ein, ergibt sich ein sehr brauchbarer linearer Zusammenhang:



Vom Standpunkt der Peak-Konstanz stellt also die Lösung der allgemeinen KdV-Gleichung mit ($\alpha=2.5$; $\beta=0.193$) eine sehr gute 1-Solitonewelle dar, während z.B. die Lösung mit den Parametern ($\alpha=2.5$; $\beta=0.24$) diese Peak-Konstanz keineswegs zeigt. Die folgenden beiden Diagramme zeigen diese verschiedenen Situationen:



Hier können Sie auch das zweite Kriterium für eine rein solitonische Lösung von Gl. (38) (s. S. 21) untersuchen: die "gute" 1-Soliton-Lösung (links) ist ausserhalb des Peaks konstant Null, während die "schlechte" Lösung (rechts) dort um die Null-Linie schwankt.

Details zur letzten Aufgabe:

- Ihre Aufgabe besteht nun darin, dass Sie die oben demonstrierte BETA-Optimierung für $\alpha=2.5$ wiederholen und das Ergebnis des letzten Diagrammes verifizieren. Im Anschluss daran sollen Sie diese Optimierung für eine Reihe anderer α -Werte durchführen, und zwar für $\alpha= 1.0, 1.5, 2.0$ und 3.0 .
- Um Ihre Rechenzeiten für die numerische Ermittlung der optimalen β -Werte nicht ausufern zu lassen, rate ich Ihnen, die zeitliche und örtliche Diskretisierung für die Differenzenformeln nicht zu fein zu wählen: es genügt ein $k=0.02$ und ein j_{max} von 115 (bei einem Ortsbereich von -20 bis +20).
- Was die Wahl der Testwerte für die β betrifft, orientieren Sie sich an der letzten Abbildung.
- Ermitteln Sie nun aus den Schnittpunkten der Kurven $letzterPeak/Startpeak(\beta)$ mit der horizontalen "Einser-Linie" = die zu den gegebenen α gehörenden optimalen β -Werte für 1-Soliton-Lösungen.
- Gibt es eine klare Beziehung zwischen den zusammengehörenden Werten von α und β ? Wenn ja, versuchen Sie diese Beziehung in einer einfachen mathematischen Formel auszudrücken.