

Kapitel 12

Verhalten des elektromagnetischen Feldes an Grenzflächen

Betrachtet man ϵ und μ als frequenzunabhängige, skalare Konstanten, dann lassen sich formell die Maxwell Gleichungen in einem linearen, isotropen Medium (11.38), (11.39) mit Hilfe von (11.42) und (11.45) in die gleiche Form wie die Maxwell Gleichungen im Vakuum (6.25) schreiben, wobei $\mu_0 \rightarrow \mu$ und $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ und die freie Ladungs- und Stromdichten erscheinen. Betrachtet man Effekte innerhalb eines *einzigsten* Dielektrikums (also keine Effekte an den Grenzflächen) lassen sich die bereits herleitete Ergebnisse für Felder im Vakuum auf die in einem Dielektrikum mit der einfachen Transformation $\mu_0 \rightarrow \mu$ und $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ erweitern. Unter anderem ist die Phasengeschwindigkeit der EM Wellen in einem Medium ((12.34) unten) nicht gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Neue physikalische Effekte bekommt man wenn die Frequenzabhängigkeit von ϵ und μ (Dispersion) oder der Übergang zwischen zwei Dielektrika mit unterschiedenen Konstanten im Spiel kommen. Wir betrachten zunächst den letzteren Effekt.

12.1 Allgemeine Stetigkeitsbedingungen

Aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen ergeben sich eine Reihe von Konsequenzen für das Verhalten der Felder an der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit verschiedenen elektrischen und magnetischen Eigenschaften.

1.) Normalkomponenten von \mathbf{B} und \mathbf{D}

Wir hatten im Absch. 3.2 bereits mit Hilfe des gausschen Satzes für \mathbf{E} gezeigt, dass aus $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ folgt dass die Normalkomponente des \mathbf{E} -Feldes eine Unstetigkeit¹ $\frac{\gamma}{\epsilon_0}$ durch eine Grenzfläche hat, auf die eine Flächeladungsdichte γ liegt (vgl. (3.14)). Mit Hilfe des Stokesschen Satzes hatten wir dagegen gezeigt, dass aus $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ folgt, dass die Tangentialkomponente von \mathbf{E} stetig ist.

Auf identischer Weise folgt aus

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (12.1)$$

¹wir bezeichnen nun die Flächeladungsdichte mit γ statt σ , um diese mit der Leitfähigkeit zu unterscheiden.

dass die Normalkomponente B_n von \mathbf{B} stetig durch die Grenzfläche hindurch ist:

$$\boxed{B_n^{(1)} = B_n^{(2)}}, \quad (12.2)$$

während die Normalkomponente von \mathbf{D} eine Unstetigkeit γ_f hat²

$$\boxed{D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = \gamma_f}, \quad (12.3)$$

mit γ_f die Flächenladungsdichte der freien Ladungsträger auf der Grenzfläche. Für Dielektrika mit $\gamma_f = 0$ ist die Normalkomponente von \mathbf{D} stetig. Dagegen ist die Normalkomponente von \mathbf{E} auf der Grenzfläche eines Dielektrikums unstetig, wie wir sehen werden. Natürlich springt D_n beim Übergang zwischen einem Metall und einem Isolator um γ_f .

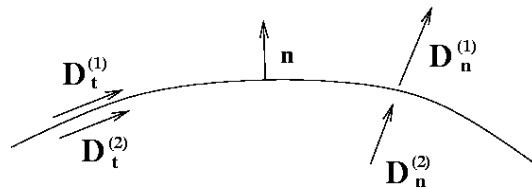


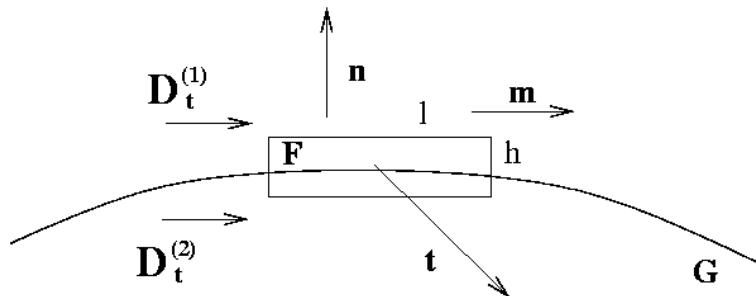
Abbildung 12.1:

2.) Tangentialkomponenten von \mathbf{E} und \mathbf{H}

Wir benutzen:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_f, \quad (12.4)$$

und wenden den Integralsatz von Stokes auf eine Rechteckige Fläche F (Skizze) an. Die



Fläche F habe Kanten der Länge l tangential zur Grenzfläche G und der Länge h senkrecht dazu. \mathbf{n} sei die Normale zu G und \mathbf{t} die Normale zu F (also $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$), dann ist die Kante l parallel zum Einheitsvektor \mathbf{m} , wobei

$$\mathbf{m} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}. \quad (12.5)$$

²**Zu Beachten:** Die Konvention für die Indizes (1) und (2) für \mathbf{D} und für die unten besprochene Vektorfelder ist folgende: $\mathbf{D}^{(1)}$ ist das Feld auf der Aussenseite und $\mathbf{D}^{(2)}$ das Feld auf der Innenseite der Grenzfläche (Fig. 12.1). Das Index „n“ steht für „Normalkomponente“, „t“ für „Tangentialkomponente“.

Der Satz von Stokes gibt für die erste von (12.4)

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{f} = \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_F \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{f} \quad (12.6)$$

Wir nehmen l und h beliebig klein, so dass die Fläche F innerhalb von F nahezu glatt und die Felder konstant sind, allerdings sei $h \ll l$. In diesem Limes gibt (12.6)

$$l (\mathbf{E}_t^{(2)} - \mathbf{E}_t^{(1)}) \cdot \mathbf{m} = -h l \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (12.7)$$

Für $h \rightarrow 0$ verschwindet der Teil mit $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Da \mathbf{m} beliebig gewählt werden kann (auf der Oberfläche), folgt die Stetigkeit der Tangentialkomponente von \mathbf{E} :

$$\boxed{\mathbf{E}_t^{(1)} = \mathbf{E}_t^{(2)}} , \quad (12.8)$$

Ganz analog ergibt die zweite Gleichung von (12.4) (wir lassen von vornerein den $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ -Teil weg):

$$l (\mathbf{H}_t^{(2)} - \mathbf{H}_t^{(1)}) \cdot \mathbf{m} = I_f \quad (12.9)$$

wo I_f die Stromstärke der durch F fließenden (freien) Ströme ist. Für endliche Stromdichten würde dieser Term im Limes $h \rightarrow 0$ verschwinden, aber nicht im Fall einer endlichen Flächenstromdichte (freier Ladungen) \mathbf{i}_f . Analog zur Flächeladungsdichte γ definiert man eine Flächenstromdichte \mathbf{i} als

$$\mathbf{i} = \lim_{h \rightarrow 0} h \mathbf{j} . \quad (12.10)$$

In limes $h \rightarrow 0$ haben wir also

$$\frac{I_f}{l} = h \mathbf{j}_f \cdot \mathbf{t} \rightarrow \mathbf{i}_f \cdot \mathbf{t} . \quad (12.11)$$

(12.9) mit (12.11) und (12.5) gibt also

$$-(\mathbf{H}_t^{(1)} - \mathbf{H}_t^{(2)}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}) = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_t^{(1)} - \mathbf{H}_t^{(2)})) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{i}_f \quad (12.12)$$

für beliebige Vektoren \mathbf{t} (tangential zu G) gibt das

$$\boxed{\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_t^{(1)} - \mathbf{H}_t^{(2)}) = \mathbf{i}_f} . \quad (12.13)$$

Der Sprung in der Tangentialkomponente von \mathbf{H} ist gleich der Flächestromdichte in die Richtung senkrecht zu \mathbf{H} . Für ein normales Dielektrikum (also kein Leiter oder Supraleiter) verschwindet \mathbf{i}_f , so dass die Tangentialkomponente von \mathbf{H} stetig ist.

Zusammenfassend haben wir also für ein *normales* Dielektrikum (**ohne Flächeladungs- und Flächestromdichten**), dass die folgende Komponenten durch die Oberfläche zwischen zwei Dielektrika hindurch ³ stetig sind:

$$\boxed{B_n, \quad D_n, \quad \mathbf{E}_t, \quad \mathbf{H}_t} . \quad (12.14)$$

³der Vakuum kann auch als Dielektrikum mit $\mu = \mu_0$ und $\epsilon = \epsilon_0$ betrachtet werden

12.2 Lineare, isotrope Medien

Falls

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (12.15)$$

gilt, findet man aus (12.2), (12.8), (12.3) und (12.13):

$$\boxed{\mu_1 H_n^{(1)} = \mu_2 H_n^{(2)}}; \quad \boxed{\frac{D_t^{(1)}}{\epsilon_1} = \frac{D_t^{(2)}}{\epsilon_2}} \quad (12.16)$$

und

$$\boxed{\epsilon_1 E_n^{(1)} - \epsilon_2 E_n^{(2)} = \gamma_f}; \quad \boxed{\mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{B}_t^{(1)}}{\mu_1} - \frac{\mathbf{B}_t^{(2)}}{\mu_2} \right) = \mathbf{i}_f}. \quad (12.17)$$

Beispiel: Dielektrikum im Plattenkondensator

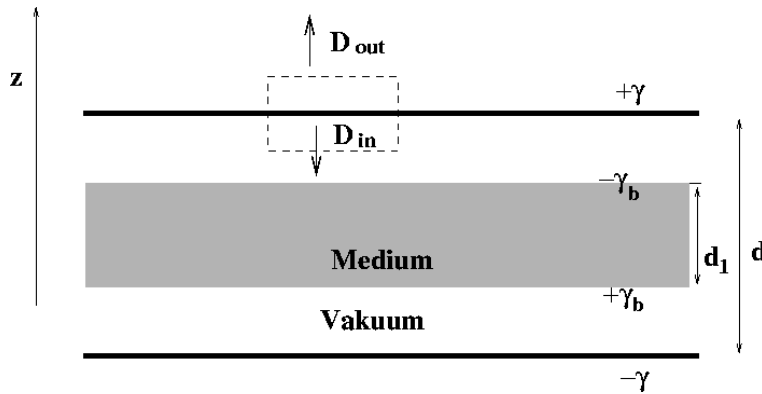


Abbildung 12.2: Plattenkondensator

Wir betrachten ein Plattenkondensator Fig. 12.2 bestehend aus zwei (im Prinzip unendlich ausgedehnten) Metallplatten mit der Flächeladungsdichten $+\gamma$ und $-\gamma$. In der Mitte zwischen den Platten befindet sich ein Dielektrikum (Konstanten ϵ, μ). Aus Symmetriegründen zeigt \mathbf{D} (und daher \mathbf{E}) überall in z -Richtung und hängt nur von z ab. Damit \mathbf{D} im unendlichen verschwindet, muss \mathbf{D} überall ausserhalb der Platten verschwinden: $\mathbf{D}_{out} = 0$ (konsistent mit dem Gausschen Theorem, da die Gesamtladung im Kondensator 0 ist).

Innerhalb des Kondensator ergibt das Gaussche Theorem $\mathbf{D}_{in} = -\gamma \mathbf{e}_z$. Da D_n stetig ist gilt das auch innerhalb des Dielektrikums. Also im Dielektrikum ist $\mathbf{E} = -\frac{\gamma}{\epsilon} \mathbf{e}_z$. Auf der Oberfläche des Dielektrikums hat daher \mathbf{E} eine Unstetigkeit (von unten nach oben), die einer Flächendichte gebundener Ladungen γ_b entspricht:

$$E_n^{(1)} - E_n^{(2)} = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} + \frac{\gamma}{\epsilon} = -\frac{\gamma(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon_0 \epsilon} \equiv \frac{\gamma_b}{\epsilon_0} < 0. \quad (12.18)$$

Die Ladungsdichte γ_b schirmt die Ladung der Platten ab.
Die Spannung des Kondensators ist

$$V = (d - d_1) \frac{\gamma}{\epsilon_0} + d_1 \frac{\gamma}{\epsilon} . \quad (12.19)$$

Die Kapazität eines Kondensators ist definiert als Q/V , also für unseren Kondensator mit Fläche F

$$C = \frac{\gamma F}{V} . \quad (12.20)$$

Die Kapazität eines Kondensators wird in Farad (F) gemessen $Farad = Coulomb/Volt$. Das Verhältnis zwischen den Kapazitäten eines Kondensators, der mit Dielektrikum vollständig gefüllt ist ($d_1 = d$) und eines mit Vakuum ($d_1 = 0$) gibt die Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums

$$\frac{C_{Diel}}{C_{Vak}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} . \quad (12.21)$$

12.2.1 Elektrische Leitfähigkeit in Metallen

In *reellen* (also nicht-idealen) Metallen erzeugt ein \mathbf{E} -Feld einen Strom innerhalb des Metalles. Die Größe und Richtung des Stromes hängt im Prinzip auf komplexer Weise von \mathbf{E} ab, doch, wie in Fall von Dielektrika, gilt für nicht zu große \mathbf{E} eine lineare Abhängigkeit (Ohm'sches Gesetz)

$$\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E} , \quad (12.22)$$

wo die *Leitfähigkeit* σ oft als konstanter Skalar betrachtet werden kann, kann aber (wie bei ϵ) von der Frequenz abhängig sein und für anisotrope Metalle ein Tensor sein. Aus (12.22) und (12.8) folgt für die Tangentialkomponente von \mathbf{j}_f :

$$\boxed{\frac{\mathbf{j}_{ft}^{(1)}}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{j}_{ft}^{(2)}}{\sigma_2}} . \quad (12.23)$$

Für die Normalkomponente folgt über die Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (12.24)$$

bei Anwendung des Gauß'schen Satzes (wie in (12.3))

$$\boxed{j_{fn}^{(1)} - j_{fn}^{(2)} = -\frac{\partial \gamma_f}{\partial t}} . \quad (12.25)$$

Speziell für stationäre Ströme folgt die Stetigkeit der Normalkomponenten

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0 \quad \Rightarrow \quad j_{fn}^{(1)} = j_{fn}^{(2)} . \quad (12.26)$$

Dann, aus (12.3) folgt, dass auf der Oberfläche zwischen zwei Metalle, durch die ein Strom

j_f fließt sich eine Flächeladungsdichte

$$\gamma_f = j_{fn} \left(\frac{\epsilon^{(1)}}{\sigma^{(1)}} - \frac{\epsilon^{(2)}}{\sigma^{(2)}} \right) \quad (12.27)$$

bildet.

Übergang Leiter (1) - Nichtleiter (2)

Da im Nichtleiter kein Strom fließen kann, folgt aus (12.26)

$$j_{fn}^{(1)} = j_{fn}^{(2)} = 0, \quad (12.28)$$

und damit über (12.22)

$$E_n^{(1)} = 0, \quad (12.29)$$

da $\sigma_1 \neq 0$. Dagegen folgt für $E_n^{(2)}$ aus (12.17):

$$\epsilon_2 E_n^{(2)} = -\gamma_f. \quad (12.30)$$

Insbesondere für die Elektrostatik ist, wegen $\mathbf{j}_f = 0$, auch

$$\mathbf{E}_t^{(1)} = 0; \quad (12.31)$$

dann fordert (12.8)

$$\mathbf{E}_t^{(2)} = 0, \quad (12.32)$$

also steht das \mathbf{E} -Feld senkrecht zur Leiteroberfläche; es ist null innerhalb des Leiters, wie wir bereits gesehen haben.

12.3 Reflexion und Brechung von Licht

Wie bereits erwähnt können die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (11.38),(11.39) in linearen, isotropen Medien auf der gleichen Weise wie im Vakuum behandelt werden. Im Abwesenheit freier Ladungen ($\rho_f = 0 = \mathbf{j}_f$) lassen sich z.B. die Gleichungen (11.38) wie in Kap. 9 entkoppeln. Man erhält die Wellengleichungen

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0; \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = 0, \quad (12.33)$$

wobei c' die Phasengeschwindigkeit im Medium ist

$$\boxed{\frac{1}{c'^2} = \epsilon\mu} \quad (12.34)$$

Monochromatische, ebene Wellen

Da wir im folgenden das Verhalten des elektromagnetischen Feldes an ebenen Grenzflächen untersuchen wollen, betrachten wir spezielle Lösungen von (12.33) in Form ebener Wellen, z.B.:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}, \quad (12.35)$$

wobei zwischen ω und \mathbf{k} die Beziehung

$$\omega = c' k = \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (12.36)$$

gelten muss. Wie in Kap. 9 findet man, dass \mathbf{E} , \mathbf{H} und \mathbf{k} senkrecht zueinander stehen.

Gleichung (12.36) unterscheidet sich von (9.23) dadurch, dass in der letzteren c eine Konstante ist, während c' im allgemeinen von ω abhängt, da $\epsilon = \epsilon(\omega)$.

(9.49) ist daher nicht mehr eine Lösung der Wellengleichung. Die Komponenten verschiedener Frequenz ω in einer monochromatischen ebenen Welle laufen mit verschiedener Geschwindigkeit $c' = c'(\omega)$: das Wellenpaket behält seine Form im Laufe der Zeit nicht bei (**Zerfließen oder Dispersion** von Wellenpaketen; vgl. hierzu Abschnitt 10.3).

Phasen- vs. Gruppengeschwindigkeit

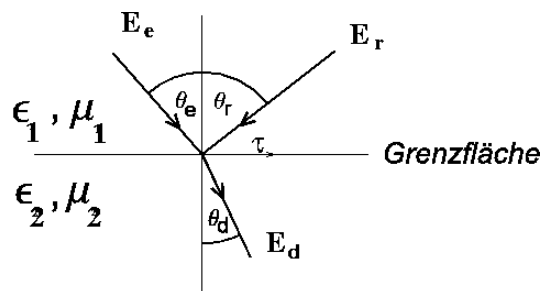
Je nach Verlauf von $\epsilon(\omega)$ kann $c' > c$ werden. Dies bedeutet keinen Widerspruch zur Relativitätstheorie, da die *Phasengeschwindigkeit* $v_{ph} = c'$ nicht identisch ist mit der *Gruppengeschwindigkeit*

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \quad (12.37)$$

eines Wellenpaketes, dessen Amplitude auf die Umgebung der Wellenzahl k_0 konzentriert ist; der Energietransport in einem solchen Wellenpaket ist durch v_g und nicht durch v_{ph} bestimmt.

Koplanarität

Wir untersuchen nun das Verhalten einer Lichtwelle, beschrieben durch (12.35), an einer ebenen Grenzfläche (Skizze): Aus (12.8) folgt



$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_r) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{E}_d \quad (12.38)$$

für alle Zeiten t und alle Vektoren \mathbf{r} der Grenzfläche; $\boldsymbol{\tau}$ sei ein Einheitsvektor parallel zur Grenzfläche, \mathbf{E}_e , \mathbf{E}_r und \mathbf{E}_d bezeichnen die elektrische Feldstärke der einfallenden, reflektierten und durchgehenden Lichtwelle. Legt man den Koordinatenursprung in die Grenzfläche, so folgt aus (12.38) und (12.35) für $\mathbf{r} = 0$ die Erhaltung der Frequenz,

$$\omega_e = \omega_r = \omega_d. \quad (12.39)$$

Für $t=0$ ergibt sich ((12.38) soll für alle \mathbf{r} in der Grenzfläche gelten) aus der Phasengleichheit

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r} \quad (12.40)$$

für ein *beliebiges* \mathbf{r} auf der Grenzfläche, es folgt also $\mathbf{k}_{et} = \mathbf{k}_{rt} = \mathbf{k}_{dt}$ (*Koplanarität*) [Das kann man so sehen: Wählt man speziell $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ so, dass $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}_0 = 0$, so müssen gemäß (12.40) die 3 Vektoren \mathbf{k}_e , \mathbf{k}_r und \mathbf{k}_d senkrecht zu \mathbf{r}_0 sein, was nur möglich ist, wenn \mathbf{k}_e , \mathbf{k}_r und \mathbf{k}_d in einer Ebene liegen].

Reflexionsgesetz

Aus (12.40) folgt

$$k_e \sin \theta_e = k_r \sin \theta_r, \quad (12.41)$$

mit (12.39), $k_e = k_r$, das *Reflexionsgesetz*:

$$\theta_e = \theta_r. \quad (12.42)$$

Brechungsgesetz

Aus (12.39) ergibt sich $k_e c_e = \omega = k_d c_d$, also

$$\frac{k_e}{k_d} = \frac{c_d}{c_e} = \frac{\sqrt{\epsilon_e \mu_e}}{\sqrt{\epsilon_d \mu_d}} = \frac{n_e}{n_d}, \quad (12.43)$$

so dass mit (12.40), also $k_e \sin \theta_e = k_d \sin \theta_d$, das *Brechungsgesetz*

$$n_e \sin \theta_e = n_d \sin \theta_d \quad (12.44)$$

folgt. Hier ist

$$n_a = \frac{c}{c_a} = \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (12.45)$$

das Brechungsindex eines Mediums mit konstanten ϵ_a, μ_a .

Wertet man die in (12.38) noch enthaltenen Bedingungen für die Amplituden aus, so erhält man die **Fresnel'schen Formeln**, das **Brewster'sche Gesetz** (Erzeugung linear polarisierten Lichts) und die **Totalreflexion** (Faser-Optik) (ÜB).

Bemerkung

Wir werden sehen, dass $\epsilon(\omega)$ im allgemeinen komplex sein kann, also auch k ist komplex. Das bedeutet, dass eine elektromagnetische Welle im Medium geschwächt wird (Absorption).

12.4 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in leitenden Materialien

Wir betrachten einen Ohm'schen Leiter mit ebener Grenzfläche und Leitfähigkeit σ indem kein Ladungstau auftritt ($\rho_f = 0$). Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (11.38) und (11.39): lauten nach einsetzen von (12.22)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0; & \nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0; & \nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \sigma \mathbf{E} &= 0; \end{aligned} \quad (12.46)$$

$$\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E} \neq 0. \quad (12.47)$$

Als Lösung von (12.46) setzen wir an

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\}, \quad (12.48)$$

mit $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ (folgt aus $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$). Mit einem analogen Ansatz für \mathbf{H} finden wir aus (12.46):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\omega}(\mathbf{k} \times \mathbf{E}); \quad i(\mathbf{k} \times \mathbf{H}) + i\epsilon\omega \mathbf{E} - \sigma \mathbf{E} = 0. \quad (12.49)$$

Benützt man $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}k^2 = -\mathbf{E}k^2$ und eliminiert man im letzten Ausdruck von (12.49) \mathbf{E} oder \mathbf{H} , so erhält man:

$$\frac{-ik^2}{\mu\omega} + i\epsilon\omega - \sigma = 0, \quad \Rightarrow \quad k^2 = \omega^2\mu\epsilon \left(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right). \quad (12.50)$$

Komplexe Wellenzahlen

Aus (12.50) sieht man, dass in einem Leiter, k komplex sein kann. Wir berechnen nun den Real- und Imaginärteil von k . Dafür setzen wir

$$k = \alpha + i\beta; \quad k^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \quad (12.51)$$

(α, β reell), so folgt (für ϵ und σ reell):

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mu\epsilon\omega^2; \quad 2\alpha\beta = \mu\omega\sigma. \quad (12.52)$$

Eliminiert man in der ersten Gleichung α mit Hilfe der zweiten Gleichung, so entsteht:

$$\beta^4 - \frac{1}{4}(\mu\omega\sigma)^2 + \beta^2\mu\epsilon\omega^2 = 0. \quad (12.53)$$

Da β reell sein soll, kommt als Lösung nur

$$\beta^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right) \quad (12.54)$$

in Frage. Analog:

$$\alpha^2 = \frac{\mu\epsilon\omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right). \quad (12.55)$$

Für $\sigma \rightarrow 0$ folgt:

$$\beta \rightarrow 0; \quad \alpha^2 \rightarrow \mu\epsilon\omega^2 \quad (12.56)$$

in Einklang mit (12.36). Da $\mu\omega\sigma \geq 0$, müssen α und β nach (12.52) gleiches Vorzeichen haben.

Für $\beta \neq 0$ (d.h. $\sigma \neq 0$) wird eine auf eine Metalloberfläche einfallende Lichtwelle im Metall exponentiell gedämpft; für eine in positiver x -Richtung laufende ebene Welle wird nämlich

$$\exp\{i(kx - \omega t)\} = \exp\{i(\alpha x - \omega t)\} \exp\{-\beta x\}, \quad (12.57)$$

wobei mit $\alpha > 0$ auch $\beta > 0$ sein muss.

Grenzfälle

- 1.) Bei hoher Leitfähigkeit ($\sigma \rightarrow \infty$) wird die Lichtwelle praktisch total reflektiert, da die Eindringtiefe $d \sim \beta^{-1} \sim \sigma^{-1/2}$ verschwindet.
- 2.) Für hohe Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty$) ist zu beachten, dass σ gemäß (14.30) frequenzabhängig ist: σ wird für $\omega \rightarrow \infty$ rein imaginär, also k^2 in (12.50) reell; das Material wird *durchsichtig*. Diesen Effekt kann man mit **harter** Röntgenstrahlung nachweisen.

Skin-Effekt

Als Folge der Dämpfung β können wegen (12.47) Wechselströme nur in einer Oberflächenschicht des Leiters fließen, deren Dicke durch β^{-1} bestimmt ist (*Skin-Effekt*).

12.5 Wellen in einem metallischen Hohlleiter

Wir betrachten die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Gebiet, die von Metallischen Randflächen begrenzt ist. Zur Vereinfachung betrachten wir einen idealen Leiter ($\sigma \rightarrow \infty$) als Grenzfläche.

Die Randbedingungen für die Komponenten von \mathbf{E} und \mathbf{B} an den Grenzflächen eines idealen Metalles folgen aus der Tatsache, dass im Metall kein elektrisches Feld existieren kann.

- Demzufolge muß die Tangentialkomponente von \mathbf{E} verschwinden.
- Die Normalkomponente von \mathbf{B} muss zunächst nur stetig sein. Da es aber im Metall kein elektrisches Feld gibt, kann dort das Magnetfeld allenfalls statisch sein, und das ist bei einer sich ausbreitenden Welle nicht möglich. Also verschwindet auch die Normalkomponente von \mathbf{B} .

Als Beispiel betrachten wir einen unendlich langen Rohr mit rechteckigem Querschnitt (Kanten a und b). Das Rohr bestehe aus ideal leitendem Material ($\sigma \rightarrow \infty$). Die Lösung der Feldgleichungen ist von der Form einer propagierenden Welle, also pro Komponente wie

$$g(\mathbf{r}, t) = f(x, y) e^{i(kz - \omega t)},$$

wobei f eine noch zu bestimmende Funktion ist und $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Aus den obigen Überlegungen

$$\mathbf{E}_t = 0 \quad B_n = 0 \quad (12.58)$$

erhalten wir die Randbedingungen

$$E_y = E_z = B_x = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases} \quad (12.59)$$

$$E_x = E_z = B_y = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = b \end{cases} \quad (12.60)$$

Die richtige Lösung der Feldgleichungen muss natürlich auch die *Wellengleichung* erfüllen, und zwar für jede einzelne Komponente $g(\mathbf{r}, t)$ von \mathbf{E} und \mathbf{B} :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.61)$$

Mit der Methode der Separation der Variabel, kann man einen Ansatz für die Funktionen f in (12.58) der Form

$$f(x, y) = c a(k_x x) b(k_y y) , \quad (12.62)$$

wo $a(k_x x)$ ($b(k_y y)$) eine geeignete Linearkombination von $\exp(\pm i k_x x)$ ($\exp(\pm i k_y y)$) ist, welche die Randbedingungen erfüllt. Dann lautet die Bedingung (12.61)

$$k_x^2 + k_y^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} . \quad (12.63)$$

Für die z -Komponente von \mathbf{E} haben wir wegen (12.59)

$$E_z = \gamma \sin(k_x x) \sin(k_y y) \quad (12.64)$$

so dass die „erlaubten“ Werte von k_x , k_y diskret sind:

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \quad k_y = \frac{m\pi}{b} \quad m, n \in N_0 . \quad (12.65)$$

Aus $\nabla \times B = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ erhält man

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = -i\omega E_y , \quad (12.66)$$

was für $x = 0$ und $x = a$ gibt

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, x = a \quad (12.67)$$

und analog

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0, y = b , \quad (12.68)$$

was die Lösung

$$B_z = \gamma' \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad (12.69)$$

gibt.

Für die weiteren Komponenten bekommt man ähnliche Bedingungen.

Zusammenfassend kann man den Ansatz für diese Komponenten wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \beta \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \gamma \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad (12.70)$$

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \beta' \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \gamma' \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad (12.71)$$

$$m, n \in N_0; .$$

Minimale Frequenz

Durch Einsetzen von (12.63) und (12.65) erhält man die Bedingung

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} .$$

Man kann aus (12.71) (12.70) sehen, dass in einer Lösung mit $n = m = 0$ nur B_z nicht verschwindet. Diese Lösung ist aber nicht erlaubt wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Die minimale Lösung hat also n oder $m = 1$. Aus diesen Überlegungen kann man sofort eine "Ausbreitungsbedingung" für Wellen im Hohlleiter herleiten: k ist nur dann reell, wenn

$$\omega > \omega_{nm}, \quad \text{mit} \quad \omega_{nm} = c \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

gilt. Man sieht, dass sich die Dispersionsbeziehung im Hohlleiter von jener im freien Vakuum unterscheidet, so lange a und b endlich sind. Das war zu erwarten. Unterhalb einer gewissen Grenzfrequenz ω_{10} (für $a > b$) ist überhaupt keine Wellenausbreitung möglich! Diese Frequenz geht mit wachsendem a gegen 0. Ein Hohlleiter fungiert also als Niedrigfrequenzfilter.

Ausbreitungs-Moden

Wir werden zunächst einige allgemeine Eigenschaften der erlaubten Lösungen studieren.

(Keine) TEM-Moden

TEM-Moden steht für transversal-elektrische und magnetische Moden. Wie bereits gesehen sind diese die einzige art von Wellen, die sich im Vakuum ausbreiten können. In einem Hohlleiter sind diese Moden dagegen nicht ausbreitungsfähig.

Das kann man durch Anwendung der Maxwell-Gleichungen für den Fall $B_z = E_z = 0$ beweisen:

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla \times \mathbf{E})_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x & (12.72) \\ 0 &= \nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y = 0 . \end{aligned}$$

Das gibt

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)E_x = (\partial_x^2 + \partial_y^2)E_y = 0 \quad \Rightarrow \quad n = m = 0 . \quad (12.73)$$

Was, wie gesagt, nicht ausbreitungsfähig ist.

Die Tatsache, dass keine Ausbreitung von TEM-Moden möglich ist ist eine allgemeine Eigenschaft von Hohlleitern die eine zusammenhängende Topologie haben, also nicht nur von rechteckigen. Der TEM-Typ tritt aber bei nichtzusammenhängende Topologien, wie z.B. beim Koaxialkabel auf.

Spezialfälle

1.) (TM-Welle)

Mit $B_z = 0$, d.h. man hat ein rein *transversales* \mathbf{B} -Feld. Man nennt die zugehörige Welle *TM-Welle* (transversal-magnetisch). Nichttriviale Lösungen für die Felder ergeben sich hier nur, falls $n > 0$ und $m > 0$, was man durch Einsetzen der Gleichungen (12.70) in die Ansätze erkennt. Die niedrigste ausbreitungsfähige Frequenz für eine TM-Welle im Hohlleiter ist demnach durch

$$\omega_{TM} = c\pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

gegeben.

2.) (TE-Welle)

Mit $E_z = 0$, und nun ist das **E**-Feld transversal. Man spricht von einer *TE-Welle* (transversal-elektrisch). In diesem Fall hat man schon nichttriviale Lösungen, falls einer der beiden Indizes n und m von Null verschieden ist. Die niedrigste ausbreitungsfähige Frequenz ist

$$\omega_{TE} = \frac{c \pi}{a},$$

falls $a > b$.

Nomenklatur

Für die Bezeichnung verschiedener Moden in Hohlleitern, die durch die Werte von n und m gekennzeichnet sind, gibt es ein Nomenklatursystem. Man stellt der Grundeigenschaft der Welle (TM bzw TE) die Indizes n und m zur Seite: TM_{nm} bzw. TE_{nm} . Die niederfrequenteste ausbreitungsfähige Welle ist demnach TE_{10} . Diese Welle wird in der Technik am häufigsten angewandt.

Lösungen

Die Konstanten $\alpha^{(l)}$, $\beta^{(l)}$ und $\gamma^{(l)}$ in (12.70),(12.71) werden durch einsetzen in die Maxwell-Gleichungen bestimmt. Man kann zeigen, dass die Werte dieser Parametern von zwei freien Parametern δ und δ' abhängen. Die Lösungen sind:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{n\pi}{a} k\delta + \frac{m\pi}{b} \frac{\omega}{c} \gamma' & \alpha' &= \frac{n\pi}{a} k\delta' - \frac{m\pi}{b} \frac{\omega}{c} \delta \\ \beta &= \frac{m\pi}{b} k\delta - \frac{n\pi}{a} \frac{\omega}{c} \gamma' & \beta' &= \frac{m\pi}{b} k\delta' + \frac{n\pi}{a} \frac{\omega}{c} \delta \\ \gamma &= -i \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \delta & \gamma' &= i \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \delta' \end{aligned} \quad (12.74)$$