B1: $\hat{J}_1^z, \hat{\vec{J}}_1^2, \hat{J}_2^z, \hat{\vec{J}}_2^2$; Eigenzustände $|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle$

mit $\boxed{|m_1|\le j_1 \;\&\; |m_2|\le j_2 \;\&\; j_{1/2}\in \frac{n}{2} \quad n\in\mathbb{N}_0}$

Eigenwertgl.: $\hat{J}^z_{1/2}|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle = \hbar\, m_{1/2}|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle$

$\hat{\vec{J}}^2_{1/2}|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle = \hbar^2 j_{1/2}(j_{1/2}+1)|\text{''}\rangle$

B2: $\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}^z, \hat{\vec{J}}_1^2, \hat{\vec{J}}_2^2$; Eigenzust. $|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle$

mit $\boxed{j\in\frac{n}{2}, n\in\mathbb{N}_0 \;\&\; |m|\le j}$

Eigenwertgl.: $\hat{\vec{J}}^2|j,m,j_1,j_2\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m,j_1,j_2\rangle$

$\hat{J}^z|j,m,j_1,j_2\rangle = \hbar\, m|j,m,j_1,j_2\rangle$

$\hat{\vec{J}}^2_{1/2}|j,m,j_1,j_2\rangle = \hbar^2 j_{1/2}(j_{1/2}+1)|\text{''}\rangle$

Basistransf.: Stelle $|j,m,j_1,j_2\rangle$ dar als Lin.-Komb. von $|m_1,m_2,j_1,j_2\rangle$: $|j,m,j_1,j_2\rangle = \sum_{m_1,m_2} C(jm|m_1,m_2,j_1,j_2)\cdot|m_1,m_2,j_1,j_2\rangle$

Im folgenden: $j_1 \& j_2 =$ fix: $|j,m,j_1,j_2\rangle \to |j,m\rangle$ & $|m_1,m_2,j_1,j_2\rangle \to |m_1,m_2\rangle$

- Es gilt: $\boxed{m=m_1+m_2}$ $\Rightarrow$ Stelle $|j,m\rangle$ zu festem m dar als Lin.-Komb. von $|m_1,m_2\rangle$
  $\rightarrow$ Verwende nur solche m_1,m_2 für die gilt: $m=m_1+m_2$!
- Aber $\boxed{j\neq j_1+j_2}$

Bsp: $j_1=1, j_2=1, \rightarrow m_1\in[1,0,-1], m_2\in[1,0,-1]$; Stelle $|j=1,m=1\rangle$ dar durch $|m_1,m_2\rangle$ sodass $m=1=m_1+m_2$

Möglichkeiten für $m_1 \& m_2$: ① $m_1=1, m_2=0$ ② $m_1=0, m_2=1$ $\rightarrow |j=1,m=1\rangle = C_1|m_1=1,m_2=0\rangle + C_2|m_1=0,m_2=1\rangle$

- Für feste $j_1 \& j_2$ ergibt sich sofort der mögliche Wertebereich von j, m, m_1, m_2:
  - Wegen $m=m_1+m_2$: $j_{max}=j_1+j_2$; $j_{min}=+|j_1-j_2|$ $\rightarrow j\in[j_1+j_2, j_1+j_2-1,\dots,|j_1-j_2|]$
  - Wegen $|m|\le j$: $m_{max}=+j_{max}=j_1+j_2$; $m_{min}=-j_{max}=-(j_1+j_2)$ $\rightarrow m\in[j_1+j_2, j_1+j_2-1,\dots,-(j_1+j_2)]$
  - Wegen $|m_{1/2}|\le j_{1/2}$: $m_1\in[j_1,\dots,-j_1]$ $m_2\in[j_2,\dots,-j_2]$

j_1 & j_2 gegeben:

- Erstelle Liste für alle möglichen m in absteigender Reihenfolge aus $m \in [j_1+j_2, \dots, -(j_1+j_2)]$
- Bestimme zu jedem m alle möglichen Werte m_1 & m_2 sodass gilt $m = m_1 + m_2$
- Bestimme zu jedem m all möglichen Werte j sodass $|m| \leq j$

j ($\lvert j_1-j_2\rvert \leq j \leq \lvert j_1+j_2\rvert$, $j \geq \lvert m\rvert$)	m ($m = m_1 + m_2$)	m_1 ($\lvert m_1\rvert \leq j_1$)	m_2 ($\lvert m_2\rvert \leq j_2$)	allg. Linearkombination
j_1+j_2	j_1+j_2	j_1	j_2	$\to \lvert j=j_1+j_2, m=j_1+j_2\rangle = \lvert m_1=j_1, m_2=j_2\rangle$
j_1+j_2	j_1+j_2-1	j_1-1	j_2	$\to \lvert j=j_1+j_2, m=j_1+j_2-1\rangle = c_1\lvert m_1=j_1, m_2=j_2-1\rangle + c_2\lvert m_1=j_1-1, m_2=j_2\rangle$
j_1+j_2-1		j_1	j_2-1	$\lvert j=j_1+j_2-1, m=j_1+j_2-1\rangle = c_1'\lvert m_1=j_1, m_2=j_2-1\rangle + c_2'\lvert m_1=j_1-1, m_2=j_2\rangle$
j_1+j_2	j_1+j_2-2	j_1-2	j_2	
j_1+j_2-1		j_1-1	j_2-1	
j_1+j_2-2		j_1	j_2-2	
$\vdots$	$\vdots$			
j_1+j_2	$-(j_1+j_2)$	$-j_1$	$-j_2$	$\to \lvert j=j_1+j_2, m=-(j_1+j_2)\rangle = \lvert m_1=-j_1, m_2=-j_2\rangle$
B_2		B_1		

- Die Liste zeigt welche Basiszustände $|m_1, m_2\rangle$ aus (B_1) nötig sind um einen Zustand $|j, m\rangle$ bei jedem m als Lin.-Komb. darzustellen

- Identifiziere: • $|j=j_1+j_2, \underset{\max(m)}{m=j_1+j_2}\rangle = |m_1=j_1, m_2=j_2\rangle$ & • $|j=j_1+j_2, m=-(j_1+j_2)\rangle = |m_1=-j_1, m_2=-j_2\rangle$

- Alle Basiszustände $|j,m\rangle$ sind ortogonal & alle Zustände $|m_1,m_2\rangle$ sind orthogonal

$\to \langle j,m|j',m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$ & $\langle m_1,m_2|m_1',m_2'\rangle = \delta_{m_1,m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$

→ D.h. kennt man zu einem bestimmten m alle Zustände $\{|j,m\rangle\}$ bis auf einen so lässt sich den verbleibende Zustand aus d. Orthogonalitätsbeziehung ~~...~~ und der Normierung berechnen:

~~man weiß nämlich aus d. Liste welche Zustände $|m_1,m_2\rangle$~~

~~→ Schreibe $|j,m\rangle$ als allg~~

1. Schreibe unbekannten Zustand $|j',m\rangle$ als allg Lin-Komb von Zust. $|m_1,m_2\rangle$ (für die gilt $m_1+m_2=m$ → siehe Liste)

2. Schreibe Skalarpr. $\boxed{\langle j,m|j',m\rangle = 0}$ zw. allen bekannten Zustände $\{|j,m\rangle\}$ und unbekannten Zustand $|j,m\rangle$ und Schreibe Normierung $\boxed{\langle j,m|j,m\rangle = 1}$ um die Koeffizienten der Lin.-Komb. für $|j,m\rangle$ zu berechnen

Bsp: $j_1 = 1 = j_2$. gegeben: $|j=2,m=1\rangle$ gesucht $|j=1,m=1\rangle$

Wegen $m = m_1+m_2$ muss gelten: $|j=1,m=1\rangle = A\,|m_1=1,m_2=0\rangle + B\,|m_1=0,m_2=1\rangle$

Schreibe: $\langle j=2,m=1|j=1,m=1\rangle = 0$ & $\langle j=1,m=1|j=1,m=1\rangle = 1$ → liefert A & B.

• Um aus dem bekannten Zustand $|j=j_{max}=j_1+j_2,\ m=m_{max}=j_1+j_2\rangle = |m_1=j_1,\ m_2=j_2\rangle$ alle restlichen Zustände $|j,m\rangle$ zu berechnen verwendet man den Leiteroperator $\boxed{\hat{L}^- = \hat{L}_1^- + \hat{L}_2^-}$ die Orthogonalitätsbeziehung zwischen Zuständen $|j,m\rangle$ mit gleichem m

$$\hat{L}^-|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j-1)-m(m-1)}\,|j,m-1\rangle$$

$\rightarrow$ $\hat{L}^-$ erzeugt einen Zustand mit gleichem j und kleinerem $m \rightarrow m-1$

$$\hat{L}_1^{\pm}|m_1,m_2\rangle = \hbar\sqrt{j_1(j_1-1)-m_1(m-\pm1)}\,|m_1-1,m_2\rangle$$

j	m	m_1	m_2
j_1+j_2	j_1+j_2	j_1	j_2
j_1+j_2	j_1+j_2-1 Ortho	j_1-1	j_2
j_1+j_2-1	j_1+j_2-1	j_1	j_2-1
j_1+j_2	j_1+j_2-2 Ortho	j_1-2	j_2
j_1+j_2-1	j_1+j_2-2	j_1-1	j_2-1
j_1+j_2-2	j_1+j_2-2	j_1	j_2-2

Bsp: $j_1 = j_2 = 1 \to m_1 \in [1, 0, -1]$ $m_2 \in [1, 0, -1]$; $j \in [2, 1, 0]$

$m = m_1 + m_2$ $m \in [2, 1, 0, -1, -2]$

$j \leq |m|$

j	m	m_1	m_2
2	2	1	1
2	1	0	1
1	1	1	0
2	0	-1	1
1	0	1	-1
0	0	0	0
2	-1	-1	0
1		0	-1
2	-2	-1	-1

ortho

ortho

L^-

L^-

L^-

$|j=2, m=2\rangle = |m_1=1, m_2=1\rangle$

$L^-|j=2, m=2\rangle = (\hat{L}_1^- + \hat{L}_2^-)|m_1=1, m_2=1\rangle$

$c \cdot |j=2, m=1\rangle = \sqrt{2}\,|m_1=0, m_2=1\rangle + \sqrt{2}\,|m_1=1, m_2=0\rangle$

Norm $\to$ $|j=2, m=1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,[\,|m_1=0, m_2=1\rangle + |m_1=1, m_2=0\rangle\,]$

bestimme $|j=1, m=1\rangle$ aus orthogonalität zu $|j=2, m=1\rangle$: $\langle 1,1|2,1\rangle = 0$

Schreibe $|j=1, m=1\rangle$ als lin-Komb von Zuständen $|m_1, m_2\rangle$ sodass

$m_1 + m_2 = m = 1 \Rightarrow$ $|j=1, m=1\rangle = A\,|m_1=1, m_2=0\rangle + B\,|m_1=0, m_2=1\rangle$

$\langle j=1, m=1|j=2, m=1\rangle = 0 = (A\,\langle m_1=1, m_2=0| + B\,\langle m_1=0, m_2=1|)(|m_1=0, m_2=1\rangle + |m_1=1, m_2=0\rangle)$

$\to 0 = A + B \to A = -B \to$ $|j=1, m=1\rangle = A\,[\,|m_1=1, m_2=0\rangle - |m_1=0, m_2=1\rangle\,]$

Norm: $\sqrt{\frac{1}{2}}$