Theoretische Mechanik WS 2022/23, Blatt 1

1.1 Teilchen auf spiralförmiger Bahn

Die Bewegung eines Teilchens ist durch folgende Bahnkurve beschrieben

$$\boldsymbol{r}(t) = \rho \cos(p\ t^2)\, \boldsymbol{e}_x + \rho \sin(p\ t^2)\, \boldsymbol{e}_y + u\ p\ t^2\, \boldsymbol{e}_z,$$

- Berechne den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor sowie deren Beträge.
- Berechne $s(t)$, also den Zusammenhang zwischen Weglänge s und Bahnparameter t (mit Anfangsbedingung $s(0) = 0$).
- Invertiere diese Funktion und bestimme $t(s)$. Schreibe dann die Kurve in natürlicher Parametrisierung, also $\boldsymbol{r}(s)$.

1.2 Fortsetzung

- Berechne den Tangenteneinheitsvektor [1] $\boldsymbol{\tau}(s) = \boldsymbol{r}'(s)$. (Notation: $f' \equiv \frac{df}{ds}$). Verifiziere, dass $\boldsymbol{\tau}$ parallel zu $\boldsymbol{v}$, d.h. $\boldsymbol{v}(t) = v(t)\boldsymbol{\tau}(s(t))$, und dass er normiert ist.
- Berechne den Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{n}$ und Krümmungsradius R

$$\boldsymbol{n} = R\, \boldsymbol{\tau}'(s), \quad R = \frac{1}{|\boldsymbol{\tau}'(s)|}.$$

Hinweis: Falls Sie $\boldsymbol{r}(s)$ in 1.1 nicht bestimmen konnten, benutzen Sie als Ersatz

$$\boldsymbol{r}(s) = A\ \cos(\alpha s)\ \boldsymbol{e}_x + A\ \sin(\alpha s)\ \boldsymbol{e}_y + B\ \alpha\ s\ \boldsymbol{e}_z$$

Sie müssen aber in diesem Fall die Beziehung zwischen den Konstanten A, B, α bestimmen so dass $\boldsymbol{\tau}$ normiert ist.

1.3 Fortsetzung

- Schreibe nun den Beschleunigungsvektor wie in Skript als

$$\boldsymbol{a} = a_t\ \boldsymbol{\tau} + a_n\ \boldsymbol{n} \tag{1}$$

  bestimme a_t und a_n mit den Formeln aus dem Skript. Verifiziere, dass (1) gleich dem Beschleunigunsvektor aus 1.1 ist (nur wenn du 1.1 gemacht hast). Was ist die Bedeutung von diesen zwei Komponenten der Beschleunigung?

[1] Im Skript benennen wir $\boldsymbol{\tau} \to \boldsymbol{e}_t$ und $\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{e}_n$.

- Berechne den sog. Binormalenvektor $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}$ und verifiziere, dass dieser normiert ist.

- Skiziere die Kurve $\boldsymbol{r}(t)$ und das sog. begleitende Dreibein $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ in einem beliebigen Punkt der Kurve.

1.4 Teilchenbahn in Kugelkoordinaten

Die Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ eines Massenpunktes in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) ist gegeben durch

$$\boldsymbol{r} = r\ \boldsymbol{e}_r$$

wobei sowohl r als auch $\boldsymbol{e}_r$ von der Zeit abhängen.
Schreiben Sie die zugehörige Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ als Funktion der Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) und deren Zeitableitungen, in der zugehörigen Basis $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi)$

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$