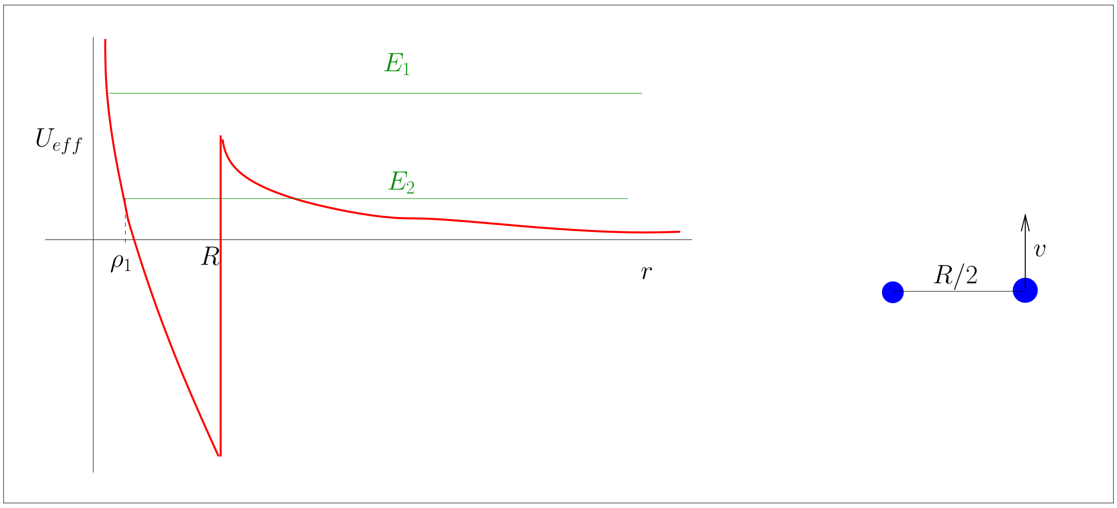
Theoretische Mechanik WS 2022/23, Blatt 3

Dieses Blatt ist etwas umfangreicher, da die nächsten zwei Termine auf vorlesungsfreihe Tage fallen.

3.1 Gebundene Bahnen



Zwei Teilchen mit den Massen $m_1 = m$ und $m_2 = 3m$ bewegen sich im dreidimensionalen Raum und wechselwirken mit dem Potential

$$U(r) = \begin{cases} -V & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases} \qquad V, R > 0 \; .$$

Die Energie E und der Drehimpuls ℓ im im System der relativen Koordinaten seien gegeben.
Für welche Werte von E gibt es gebundene Bahnen? Gibt es Energiebereiche, in denen es sowohl gebundene als auch ungebundene Bahnen gibt?
Bestimme die Minimal- (ρ_1) und Maximalentfernung (ρ_2) zwischen den Teilchen bei gebundenen Bahnen und nur ρ_1 bei ungebundenen.
Bestimme den Winkel $\Delta\varphi$, um den sich die Bahn zwischen zwei Zeitpunkten dreht, bei denen die Teilchen die Maximalentfernung zueinander haben.
In welchen Fällen schließt sich die Bahn: immer, nie, manchmal?
Angenommen ein Teilchen ist am Anfang in Ruhe und das andere befindet sich im Abstand $R/2$ und bewegt sich mit der Geschwindigkeit v senkrecht zur Verbindungsachse (siehe Abb.). Bei welchen Werten von v gibt es gebundene Bahnen (E und ℓ sind nun zu bestimmen)?

$$\int_1^z \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arccos(1/z)$$

3.2 Massenpunkte mit internen Kräften

Gegeben sind drei Punkte $i = 1, 2, 3$ mit Massen $m_1 = m$, $m_2 = m$, $m_3 = 2\ m$, die sich in den Positionen

$$\boldsymbol{r}_1 = d\ \mathbf{e}_x \qquad \boldsymbol{r}_2 = -d\ \mathbf{e}_x \qquad \boldsymbol{r}_3 = 2d\ \mathbf{e}_y$$

befinden. Jeder Punkt i übt auf jeden anderen Punkt j eine Kraft

$$\mathbf{F}_{ij} = \alpha |\mathbf{r}_{ij}|^2 \mathbf{r}_{ij} \qquad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\ .$$

mit $\alpha > 0$. Ist die Kraft zentral? Ist sie isotrop? Ist diese attraktiv oder repulsiv?
Bestimmen Sie die Gesamtkraft, die auf dem ersten Massenpunkt wirkt. Skizzieren Sie den Kräftevektor.
Bestimmen Sie die gesamte potentielle Energie des Systems (Potentialnullpunkt $U = 0$ wenn alle Teilchen im Ursprung stehen).

3.3 Drehimpulse und Gesamtenergie im Laborsystem

Angenommen, die gegebenen Massenpunkte haben die Geschwindigkeiten

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \dot{\boldsymbol{r}}_2 = u\ \boldsymbol{e}_y, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_3 = -u\ \boldsymbol{e}_y + 2u\ \boldsymbol{e}_x$$

Berechne die einzelnen Drehimpulsvektoren der drei Massenpunkte, den Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L}$, sowie die Gesamtenergie E des Systems.

3.4 Gesamtenergie im Schwerpunktsystem

Bestimme nun die Lage $\mathbf{R}$ und die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{R}}$ des Schwerpunktes.
Bestimme die gesamte Energie $E^{BS} = T^{BS} + U^{BS}$ im Bezugsystem des Schwerpunktes, sowie die kinetische Energie T_s des Schwerpunktes. Verifiziere explizit die Beziehung aus der Vorlesung $E = E^{BS} + T_s$.

3.5 Drehimpulse im Schwerpunktsystem

Berechne die Drehimpulsvektoren der drei Massenpunkte, sowie den Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{L}^{BS}$ im Schwerpunktsystem (innerer Drehimpuls). Berechne den Drehimpuls $\mathbf{L}_s$ des Schwerpunktes.
Verifiziere explizit die Beziehung aus der Vorlesung $\mathbf{L} = \mathbf{L}^{BS} + \mathbf{L}_s$.

3.6 Coriolis Kraft

Ein Körper auf der Erde wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, 0, v_{0z})$ aus den Boden geworfen $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, wobei $\mathbf{e}_x$ in Nordrichtung und $\mathbf{e}_z$ nach oben zeigt. Ohne Scheinkräfte würde sich dieser Körper auf einer Parabel in der xz-Ebene bewegen. Bestimme die Ablenkung dieses Körpers von der xz-Ebene am Ende des Fluges.
Hinweis: Die Zentrifugalkraft soll Vernachlässigt werden. Die Bewegungsgleichungen lauten also mit der Corioloskraft $\dot{\mathbf{v}} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{g}$.
Die Geschwindigkeitskomponenten in der xz-Ebene können durch die ungestörte Wurfparabel, die aus der o.g. Gleichung mit $\boldsymbol{\omega} \to 0$ ensteht, genähert werden. Diese sollen in die Gleichung für v_y eingesetzt und durch einfache Integration $v_y(t)$ bestimmt werden. Danach sollen die drei Komponenten von $\mathbf{r}(t)$ bestimmt werden. Die Ablenkung ist der Wert von y am Ende der Flugzeit.
Interpretiere qualitativ die Vorzeichen (Ost/West) der Ablenkung (es mehrere Beiträge) auf Sicht eines Inertialen Bezugssystem (d.h. ohne Scheinkräfte, wie beim Beispiel vom Turm im der Vorlesung).