Theoretische Mechanik WS 2023/24, Blatt 4

4.1 Streuprozess: relative Koordinaten

Wir betrachten den elastischen Stossprozess zwischen zwei Teilchen (T_1 mit Masse m_1 und T_2 mit Masse m_2), welche mit dem repulsiven Potential $U(r) = \alpha/r^2$, $\alpha > 0$ wechselwirken.
Betrachten Sie zunächst den Prozess in den relativen Koordinaten. Mit Hilfe des allgemeinen Ausdrucks aus dem Skriptum, bestimmen Sie den Streuwinkel θ^{BS} (nennen wir den nun $\tilde{\theta}$) als Funktion des Streuparameters b und der Energie E im Relativsystem.
Schreiben Sie den Integralausdruck an und finden Sie die Lösung.
Von nun an soll angenommen werden, das b gross ist.
Zeigen Sie, dass in diesem Limes (die Konstante q ist zu bestimmen):

$$\tilde{\theta} \approx \frac{\pi}{2} \frac{q^2}{b^2} \tag{1}$$

Bestimmen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega^{BS}$ (Formel aus dem Skriptum) in den relativen Koordinaten.
Hinweise:
Für $\epsilon \ll 1$ können wir verwenden $(1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\ \epsilon$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}$$

4.2 (fort. von 4.1) Streuprozess: Laborkoordinaten

Wir betrachten nun das Laborsystem, wo das Teilchen T_2 am Anfang in Ruhe ist. Es soll weiterhin b groß, also $\tilde{\theta}$ klein sein.
Der Zusammenhang zwischen θ^L und $\tilde{\theta}$ (Formel aus dem Skriptum, bzw. Handnotizen) wird besonders einfach in diesem Limes. Bestimmen Sie diesen Zusammenhang, sowie die Beziehung zwischen θ^L und b (sieht ähnlich wie Gl. 1 aus) in diesem Limes.
Bestimmen Sie $d\sigma/d\Omega^L$ in den Laborkoordinaten. Das Ergebnis, Gl. 1, kann verwendet werden, falls 4.1 nicht gelöst wurde.
Die Targets T_2 werden mit ρ Teilchen pro Volumen des Typs T_1 mit Geschwindigkeit v beschossen. Bestimmen Sie die Zahl von Teilchen T_1, die pro Zeiteinheit in einem (Labor) Winkel zwischen θ_1 und θ_2 gestreut werden (θ_1 und θ_2 sind klein).

4.3 Massenpunkt auf einer Kugeloberfläche

Betrachte einen Massenpunkt m, der sich auf der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R im Schwerefeld (Richtung $-m\ g\ \boldsymbol{e}_z$) bewegt. Die Kugel bewege sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_z$ nach oben. *

*Diese Bewegung ist von aussen erzwungen

Schreibe die Zwangsbedingung in den Kartesischen Koordinaten.
Bestimme die Lagrangefunktion. Wähle als verallgemeinerte Koordinaten die Winkeln der sphärischen Koordinaten (θ, ϕ).
Stelle die Lagrangegleichungen für die nicht zyklische Koordinate (siehe unten) auf.
Zeige, dass eine der beiden Koordinaten (nennen wir sie q_1) eine *zyklische Koordinate* ist, d.h. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0$.
Das bedeutet, dass der dazugehörige verallgemeinerte Impuls

$$p_1 \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \text{const.}$$

Erhalten ist.
Setzte diese Beziehung in die Lagrange Gleichung für die andere Koordinate q_2 ein.
Für gegebenen Wert der Konstante p_1, finde eine *stationäre* Lösung dieser Gleichung, d.h. bei der q_2 zeitunabängig ist.

4.4* (fort. von 4.3) Bewegung in der Nähe der stationären Lösung

Betrachte die Situation, bei der q_2 sich in der Nähe der stationären Lösung $\bar{q}_2$ befindet, also $q_2 - \bar{q}_2$ klein ist. Schreibe die Bewegungsgleichungen für diesen Fall und löse sie. Untersuche auch, ob die genäherte Lösung stabil ist. Dieses Beispiel kann auch mit Unterstützung von *Mathematica* gelöst werden.

4.5 Teilchen in einem 1-D Potential

Ein Teilchen mit der Masse m befindet sich in einem eindimensionalen Kraftfeld, welches durch das Potential

$$U(x) = -\frac{\alpha}{x^2 + b^2} \qquad \alpha > 0$$

beschrieben ist. (Das Teilchen kann sich nur eindimensional entlang x bewegen).
Skizzieren Sie zuerst das Potential in Abhängigkeit von x. Welche Einheiten hat α? Berechnen Sie und skizzieren Sie die Kraft (die x-Komponente), die auf das Teilchen wirkt.
Analysieren Sie nun qualitativ, wie die Teilchenbahn in Abhängigkeit der Gesamtenergie E aussieht. Für welchen Bereich von E ist das Teilchen im Potential gefangen (gebunden)? Bestimmen Sie die Umkehrpunkte.
Stellen Sie einen Integralausdruck für die Schwingungsperiode T auf.