Theoretische Mechanik WS 2023/24, Blatt 5

5.1 Rotierende Stange

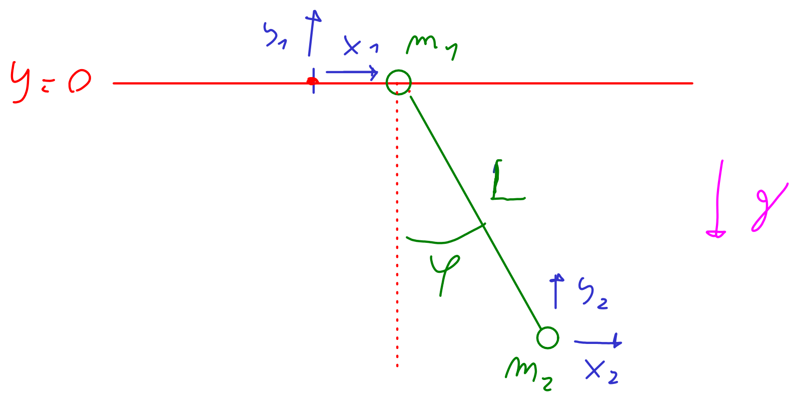
Ein Massenpunkt m bewegt sich reibungsfrei auf einer unendlich langen geraden Stange mit vernachlässigbarer Masse, welche sich auf der $x-y$ Ebene befindet und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z Achse rotiert.
Schreiben Sie die Zwangsbedingungen in Kartesischen Koordinaten (z soll vernachlässigt werden).
Eine konstante Kraft $-mf$ zieht den Körper in Richtung des Koordinatenursprungs.
Schreiben Sie die Lagrangefunktion. Als verallgemeinerte Koordinate benutzen Sie die Entfernung ρ zur Drehachse.
Bestimmen Sie die Bewegeungsgleichungen.
Finden Sie deren Lösungen zu den Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = v_0$.

5.2 Hamilton Funktion für das Massenpunkt auf einer rotierenden Stange

Schreiben Sie die Hamiltonfunktion H für das Massenpunkt auf einer rotierenden Stange (Bsp. 6.1). Auf die richtigen Variablen achten.
Schreiben Sie die Hamiltonsche Bewegungsgleichungen und verifizieren Sie, dass diese Äquivalent zu den Lagrange Bewegungsleichungsn aus dem Bsp 6.1 sind.
Ist H eine Erhaltungsgröße? Ist H gleich der Energie des Massenpunktes? Ist die Energie erhalten? Warum?

5.3 Rutschendes Pendel

Betrachten Sie zwei Massen m_i, mit Koordinaten x_i, y_i ($i = 1, 2$, die z_i Koordi-



naten können Sie vernachlässigen). m_1 rutscht Reibungsfrei auf einer horizontalen Stange und m_2 ist mit m_1 durch eine masselose starre Stange der Länge L verbunden. Auf die Massen wirkt die Gravitationskraft $-g\,\boldsymbol{e}_y$.
Wie viele Zwangsbedingungen gibt es? Schreiben Sie diese in Kartesischen Koordinaten.
Wie viele verbleibende Freiheitsgrade f besitzt das System?

Wählen Sie als verallgemeinerte Koordinaten (VK) x_1 und φ. Schreiben Sie die kartesischen Koordinaten als Funktion der VK.
Schreiben Sie die Geschwindigkeiten als Funktion der VK.
Schreiben Sie die kinetische und potentielle Energie sowie die Lagrangefunktion.

5.4 Rutschendes Pendel (cont.)

Welche Koordinate(n) sind zyklisch?
Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen (fall ein verallgemeinerter Impuls konstant sein soll, brauchen Sie diesen nicht weiter nach der Zeit abzuleiten).
Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen für den Fall, dass φ klein ist und finden Sie deren allgemeine Lösung (es reicht die Lösung für eine der Koordinaten).
(**Hinweis:** φ klein bedeutet, (i) $\sin(\varphi) \approx \varphi, \cos(\varphi) \approx 1$ und (ii) es sollen maximal lineare Terme in $\varphi, \dot{\varphi}$ in den Bewegungsgleichungen behalten werden. Quadratische Terme und höher sollen vernachlässigt werden.)

5.5* Modifizierte Keplerbahnen

Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens mit Masse m in einem zentralen Potential. Das Potential $U(r)$ sei zunächst allgemein, und das effektive Potential

$$U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)$$

habe ein Minimum bei r_0 und es gelte

$$\frac{1}{2} \frac{dU_{eff}}{dr^2}\bigg|_{r_0} = \gamma^2$$

Die Gesamtenergie des Teilchens sei nun knapp über dem Minimum (also $E - U_{eff}(r_0)$ klein), so dass man $U_{eff}(r)$ bis zur zweiten Ordnung in $r - r_0$ um das Minimum entwickeln kann.
Berechnen Sie die "Periode" T in dieser Näherung.
Hinweis: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$
Bestimmen Sie (in dieser quadratischen Näherung*) die Drehung (Änderung) $\Delta\varphi$ des Winkels φ innerhalb einer Periode T.
(e) Benutzen Sie nun das Potential

$$U(r) = -\frac{\alpha}{2\,m\,r^n} \qquad n < 2$$

und bestimmen Sie diesen Drehwinkel $\Delta\varphi$ als Funktion von n (es reicht, wenn Sie die Bestimmungsgleichungen aufstellen). Für $n < 0$ soll $\alpha < 0$ genommen werden.
Optional: Mit einem Computeralgebrasystem wie z.B. Mathematica, zeigen Sie, dass

$$\Delta\varphi = 2\frac{\pi}{\sqrt{2-n}}\ .$$

Diskutieren Sie die qualitative Form der Bahnen, und insbesondere, bei welchen Werten von n die Bahnen geschlossen sind.

*Im Ausdruck für $dr/d\varphi$ sollen nur die führenden Terme in $r - r_0$ beibehalten werden.