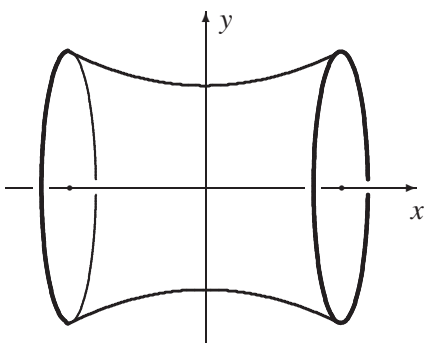


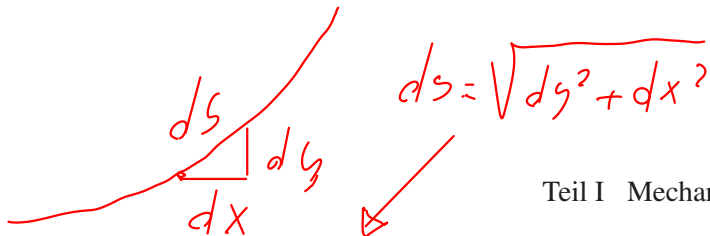
7.3 + 7.4 ^x

Beispiel 9.1A & 9.1B



Zwischen zwei parallelen Drahtkreisen (Radius R) spannt sich eine Seifenhaut. Die beiden Kreise stehen im Abstand D senkrecht auf der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten. Bestimmen Sie die Form der Seifenhaut. Wie verhält sich die Haut beim langsamen Auseinanderziehen der Drahtringe?

Lösung: Die Seifenhaut stellt eine Fläche dar, die durch die Rotation einer Kurve $y = y(x)$ um die x -Achse erzeugt werden kann. Die Lage der Seifenhaut wird also durch die Funktion $y(x)$ definiert. Wegen der Oberflächenspannung stellt sich die Seifenhaut so ein, dass ihre Fläche minimal wird (die Schwerkraft wird nicht berücksichtigt).



Ein Wegelement der Kurve hat die Länge $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$. Durch Rotation um die x -Achse entsteht eine zylindrische Teilfläche der Größe $2\pi y ds$. Die Fläche A der Seifenhaut soll minimal sein:

$$J[y] = A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx y \sqrt{1 + y'^2} = \text{minimal} \quad (3.23)$$

Dieses Funktional ist von der Form

$$J[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y') \quad \text{mit} \quad F(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}$$

Die Randwerte sind

$$(x_1, y_1) = (-D/2, R), \quad (x_2, y_2) = (D/2, R)$$

Aus $F_x = \partial F / \partial x = 0$ und der Euler-Lagrange-Gleichung folgt

HAMILTON: $F_{y'}(y, y') y' - F(y, y') = \text{const.}$

Dies ergibt sich analog zu (2.15) mit F anstelle von \mathcal{L} , und mit x anstelle von t . Für unser F wird $F_{y'} y' - F = \text{const.}$ zu

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} \quad \text{oder} \quad y'(x) = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}$$

Dies können wir integrieren:

$$x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{(y/c)^2 - 1}} = \pm c \operatorname{arccosh}(y/c) + \text{const.}$$

Wegen der Symmetrie ($x \leftrightarrow -x$) des Problems ist die Konstante null, und wir erhalten

$$y(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \quad y' = \frac{y}{c} \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

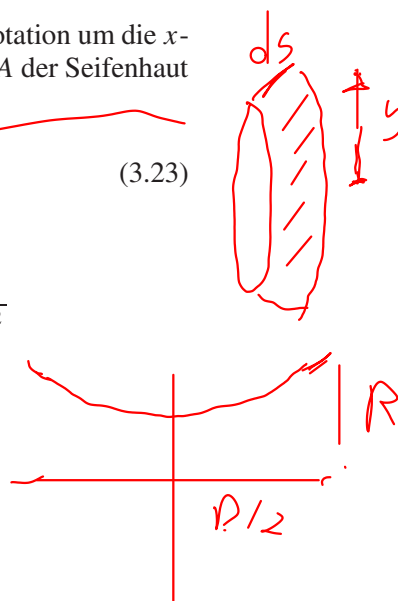
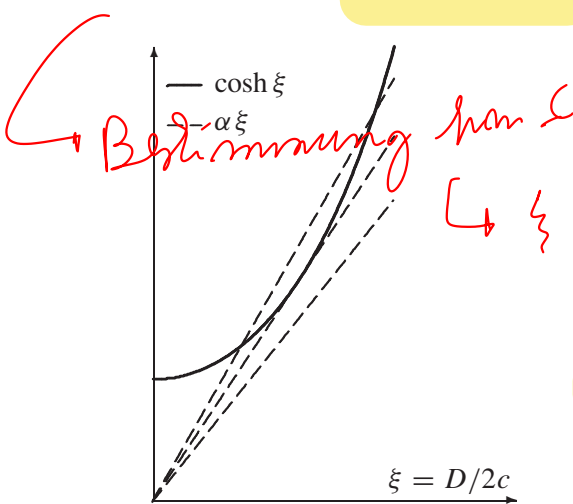
Die Randbedingung $y(\pm D/2) = R$ verlangt

$$\frac{R}{c} = \cosh\left(\frac{D}{2c}\right)$$

Anstelle der Konstanten c können wir $\xi = D/2c$ verwenden:

$$\alpha \xi = \cosh(\xi) \quad \text{mit} \quad \alpha = 2R/D \quad (3.25)$$

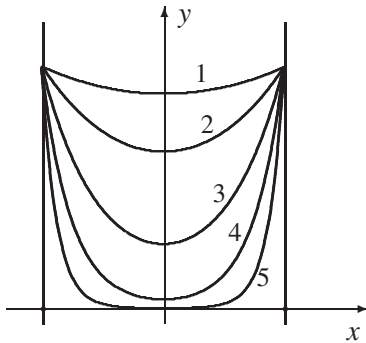
Diese Gleichung kann graphisch (Abbildung) oder numerisch gelöst werden. Für $\alpha \approx 1.509$ gibt es genau eine Lösung, für größeres α zwei und für kleineres α keine Lösung. Das Auseinanderziehen der Ringe bedeutet eine Verkleinerung von α , also den Übergang von zwei zu null Lösungen. Wir bezeichnen die Lösungen mit ξ_i .



Für die Diskussion der Lösungen betrachten wir die Kurvenschar

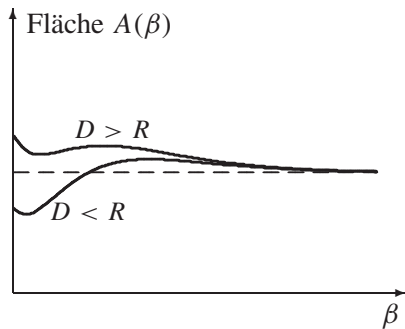
$$y(x) = R \frac{\cosh(2\beta x/D)}{\cosh \beta} \tag{3.26}$$

Diese Schar hängt von einem Parameter β ab. Für $\beta = \xi = D/2c$ fallen diese Kurven mit der Lösungskurven (3.24) zusammen.



Alle Kurven der Schar (3.26) gehen durch die Randpunkte $(\pm D/2, R)$. Die möglichen Lösungskurven (3.24) sind in der Schar enthalten, und zwar für $\beta = \xi_i$ mit den ξ_i aus (3.25). Für $\beta = 0$ ergibt sich $y = R$ und damit eine ebene Zylinderfläche. In der Reihenfolge 1 bis 5 nimmt β zu. Für $\beta \rightarrow \infty$ schnappt die Fläche auf der Mittellinie zusammen und es verbleiben nur die Ringflächen. Für diese Skizze wurde $D = R$ angenommen.

$y = 0$
für $x < D/2$



Die Rotationsfläche $A(\beta)$ für die Kurven (3.26) als Funktion von β . Es gilt $A(0) = 2\pi R D$ und $A(\infty) = 2\pi R^2$. Die untere Kurve gilt für $D < R$, die obere für $D > R$. Sofern (3.25) zwei Lösungen hat, muss A in Abhängigkeit von β ein Minimum und ein Maximum haben. Wenn man von der Zylinderfläche ($\beta = 0$) weggeht, nimmt die Fläche zunächst ab. Daher kommt man mit wachsendem β zunächst zum Minimum.

Für die Abbildung wurde angenommen, dass (3.25) zwei Lösungen hat, ξ_1 und ξ_2 . Dann ist eine davon ein Minimum; dies ist die gesuchte Lösung. Diese Lösung ist dann nicht nur ein Minimum bezüglich der Variation des Parameters β wie in der Abbildung, sondern ein Minimum bezüglich aller möglichen (kleinen) Änderungen der Kurve. Die andere Lösung von (3.25) ist ein Maximum und damit eine instabile Lösung.

In der Abbildung nach (3.26) könnte die Kurve 1 das Minimum darstellen, und 3 das Maximum. Von den beiden Lösungen (3.25) entspricht diejenige mit dem größeren c -Wert dem gesuchten Minimum.

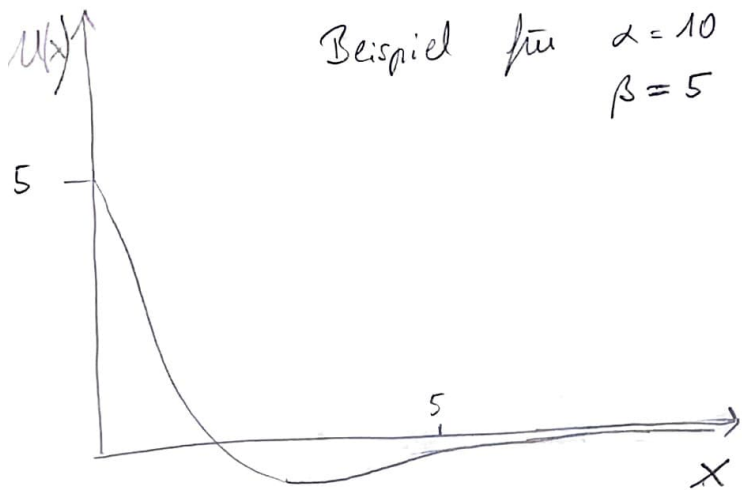
Solange $D \lesssim 1.325 R$ gilt, hat (3.25) zwei Lösungen, und die Situation wird qualitativ richtig durch die Abbildung wiedergegeben. Wenn D sich aber dem Wert nähert, an dem (3.25) nur noch eine Lösung hat, dann rücken das Minimum und Maximum in der obigen Abbildung zusammen. Am Grenzwert selbst hat die Kurve dann einen waagerechten Wendepunkt, der über der gestrichelten Linie liegt. Dann ist eine kontinuierliche Verformung zum Randminimum $A(\infty)$ möglich. Beim langsamen Auseinanderziehen der Drahringe nimmt die Seifenhaut zunächst die hier berechneten Minimalkonfigurationen an. Wenn der Abstand den Wert $D \approx 1.325 R$ erreicht, dann wird das System instabil und die Seifenhaut verformt sich dynamisch. Dieser zeitabhängige (schnelle) Prozess liegt außerhalb der hier gegebenen Beschreibung; er könnte in einer Abfolge der Kurven $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ bestehen und im Randminimum $A(\infty)$ enden.

Beispiel

~~8.2A)~~

7.2

(α, β vertauscht)



Beispiel für $\alpha = 10$
 $\beta = 5$

$$U(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta}{x}$$

$$U'(x) = -\frac{2\alpha}{x^3} + \frac{\beta}{x^2} = -F(x)$$

Gleichgewichtslage \bar{x} : $F(\bar{x}) = 0$

$$\frac{2\alpha}{\bar{x}^3} - \frac{\beta}{\bar{x}^2} = 0$$

$$\bar{x} = \frac{2\alpha}{\beta}$$

Entwickeln der Kraft bis 1. Ordnung um Entwicklungsp. \bar{x} :

$$F(x) \approx \underbrace{F(\bar{x})}_{=0} + \underbrace{F'(\bar{x})}_{\equiv z} (x - \bar{x})$$

$$F'(x) = -U''(x) = -\frac{6\alpha}{x^4} + \frac{2\beta}{x^3}$$

$$F'(\bar{x} = \frac{2\alpha}{\beta}) = -6\alpha \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^4 + 2\beta \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^3 = -\frac{3+2}{8} \frac{\beta^4}{\alpha^3} = -\frac{\beta^4}{8\alpha^3} \equiv -K$$

$$F(z) \approx -Kz$$

In welchem Bereich ist die Näherung gültig?

→ Die 1. Ordnung muss sehr viel größer sein als die 2. Ord.

Bedingung:

$$F'(\bar{x}) z \gg F''(\bar{x}) z^2$$

$$z \ll \frac{F'(\bar{x})}{F''(\bar{x})}$$

$$F''(\bar{x}) = \frac{6}{16} \frac{\beta^5}{\alpha^4}$$

reicht α

$$z \ll \frac{F'(\bar{x})}{F''(\bar{x})} \sim \frac{\frac{\beta^4}{\alpha^3}}{\frac{\beta^5}{\alpha^4}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$z \ll \frac{\alpha}{\beta} \quad \left[\frac{\alpha}{\beta} \right] \dots \text{Länge}$$

Lösung der Bewegungsgleichung für z :

$$F \sim -K z$$

$$m \ddot{z} = -K z$$

$$\ddot{z} = -\frac{K}{m} z$$

$$= -\omega_0^2 z$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

8.1

Particle on surf. of sphere

$$L = \frac{mR^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - mgR \cos \theta$$

$$p_{\varphi} = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi}}{mR^2 \sin^2 \theta}$$

$$p_{\theta} = mR^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{mR^2}$$

Weil Zwangsbedingungen zeitunabhängig!
 ↑ SUBSTITUIEREN ↓

$$H = T + V = \frac{mR^2}{2} \left(\frac{p_{\theta}^2}{(mR^2)^2} + \sin^2 \theta \frac{p_{\varphi}^2}{(mR^2 \sin^2 \theta)^2} \right) + mgR \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2mR^2} \left(p_{\theta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2 \theta} \right) + mgR \cos \theta$$

HAM. BEWEGUNGSGLEICHUNGEN;

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}$$

(A)
$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{mR^2 \sin^2 \theta}$$

(B)
$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{p_{\theta}}{mR^2}$$

$$\dot{p}_2 = - \frac{\partial H}{\partial q_2}$$

(C)
$$\dot{p}_{\varphi} = - \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

(D)
$$\dot{p}_{\theta} = - \frac{\partial H}{\partial \theta} =$$

$$= +mgR \sin \theta + \frac{p_{\varphi}^2}{2mR^2} \frac{-2}{\sin^3 \theta} \cos \theta$$

$$= mgR \sin \theta + \frac{p_{\varphi}^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta}$$

VERGLEICH MIT LAGRANGE B.G.L.

$$(A) \Rightarrow p_\psi = m R^2 \sin^2 \theta \dot{\psi} \Rightarrow (C) \Rightarrow \frac{d}{dt} (m R^2 \sin^2 \theta \dot{\psi}) = 0 \quad \checkmark$$

$$(B) \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\dot{p}_\theta}{m R^2} \quad (D) \text{ einsetzen}$$

$$\begin{aligned} \triangleleft MR^2 \ddot{\theta} &= + m g R \sin \theta + \frac{p_\psi^2}{m R^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \\ &+ \frac{(m R^2)^2 \cancel{\sin^4 \theta}}{m R^2} \dot{\psi}^2 \frac{\cos \theta}{\cancel{\sin^3 \theta}} \\ &= m g R \sin \theta + m R^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$