Theoretische Mechanik WS 2023/24, Blatt 7

7.1 Hamilton Funktion für das Massenpunkt auf einer Kugeloberfläche

Schreiben Sie die Hamiltonfunktion für das Massenpunkt auf einer Kugeloberfläche (Bsp. 4.3) für $v = 0$. Starten Sie von der Lagrangefunktion aus diesem Beispiel (Lösung von Bs. 4.3 steht auf der Übungswebseite).
Schreiben Sie die Hamiltonsche Bewegungsgleichungen und verifizieren Sie, dass diese Äquivalent zu den Lagrange Bewegungsleichungen aus dem Bsp 4.3 sind.

7.2 Harmonische Bewegung

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich in einer Dimension im Potential

$$U(x) = \frac{\beta}{x^2} - \frac{\alpha}{x} \qquad x, \alpha, \beta > 0$$

bewegt.
Bestimmen Sie die Gleichgewichstlage, also die Stelle $\bar{x}$, wo die Kraft verschwindet. Lösen Sie die Bewegungsgleichung des Teilchens in der Nähe von $\bar{x}$, also für $z \equiv x - \bar{x}$ klein. Dazu entwickeln Sie die Kraft bis zur ersten Ordnung in z. In welchem Bereich von z ist diese Näherung gültig (also $|z| << \cdots ??$)
Schreiben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen.
Hinweis: Verwenden Sie z als Variable. Führen Sie geeignete Konstanten ein, damit die Terme nicht zu unübersichtlich werden. Dasselbe gilt für die nächsten beiden Teilaufgaben.

7.3 Seifenhaut: Minimierung der Wirkung

Zwischen zwei parallelen, kreisförmigen Drahtkreisen (Radius R) spannt sich eine Seifenhaut. Die beiden Kreise stehen im Abstand D (bei $x = \pm D/2$) senkrecht auf der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten. Die Gravitationskraft wird vernachlässigt. Wegen der Oberflächenspannung stellt sich die Seifenhaut so ein, dass ihre Fläche minimal wird. Bestimmen Sie die Form der Seifenhaut, d.h. die Funktion $y(x)$.
Hinweis: Zuerst zeigen Sie, dass der Flächeninhalt durch

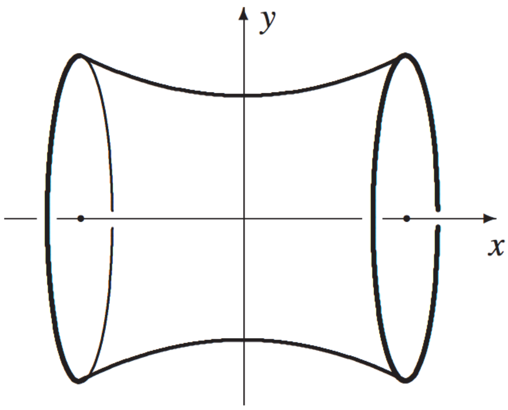
$$J[y] = \int_{-D/2}^{D/2} F(y, y')dx$$

mit

$$F(y, y') = 2\pi\, y\sqrt{1 + y'^2}$$

gegeben ist, wobei $y' = dy/dx$.
Minimieren Sie also das Funktional

$$J[y] = \int_{-D/2}^{D/2} F(y, y')dx$$



bezüglich der Funktion $y(x)$ auf folgender Weise:
(a) Schreiben Sie die zugehörige Euler-Lagrange Differentialgleichung.
(b) Benutzen Sie die Tatsache, dass die zugehörige Hamilton Funktion eine Konstante E ist (ähnlich wie beim Problem der Brachistochrome im Skript).
(c) Schreiben Sie die zugehörige Differentialgleichung für $y(x)$ und schreiben Sie dessen implizite Lösung in Form eines Integrals.

7.4* Seifenhaut: Fortsetzung

(d) Lösen Sie die o.g. Differentialgleichung. Eine Integrationskonstante können Sie z.B. mit Hilfe von der Bedingung $y'(0) = 0$ bestimmen, die andere durch den Wert von y an den Rändern.
(e) Die zweite Konstante kann nicht analytisch, aber grafisch oder numerisch bestimmt werden. Diskutieren Sie das graphisch, indem Sie die Gleichung auf folgende Form bringen: $\alpha\,\xi = \cosh(\xi)$. (α und ξ sind zu bestimmen.) Gibt es immer eine Lösung?
(f) Was passiert, wenn die Drahtringe (langsam) immer weiter voneinander weg bewegt werden? Betrachten Sie dazu die Lösbarkeit der Gleichung in Abhängigkeit der Ringdistanz und skizzieren Sie das Ergebnis für verschiedene Distanzen.