Theoretische Mechanik WS 2023/24, Blatt 8

Bei allen Beispielen, aber bei 8.1,8.2 insbesondere, wenn Sie eine Konstante eingeführt und eindeutig definiert haben, ist es nicht notwendig, diese in die Lösung einzusetzen

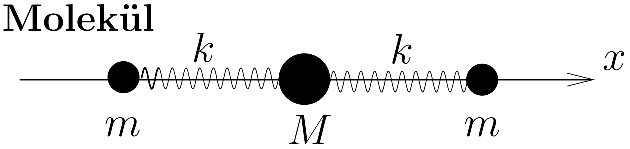
8.1 Harmonische Bewegung: Dämpfung und externe Kraft

Betrachten Sie die eindimensionale Bewegung (auf der z-Achse) eines Teilchens der Masse m, auf dem eine Kraft $K = K_h + K_r + K_e$ wirkt. K besteht also aus einer harmonischen Kraft $K_h = -m\ \omega_0^2\ z$, einer Reibungskraft $K_r = -2\ \gamma\ m\ \dot{z}$ und einer zeitabhängigen, externen Kraft $K_e = f\ m\ t + m\ g$. Finden Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung.
Finden Sie die spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen $z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$.
Hinweise: Ansatz für die partikuläre Lösung: $z_{p1} = p\ t + h$.

8.2 Dämpfung und externe Kraft mit 2 Termen

Gleich wie 8.1 für $K_e = f\ m\ (t - \cos(\omega t + \varphi))$.
Finden Sie die allgemeine Lösung. Für die spezielle Lösung reicht es, wenn Sie die Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten hinschreiben.
Hinweise: Für die partikuläre Lösung behandeln Sie die beiden Terme der externen Kraft separat. Das Ergebnis aus 8.1 kann verwendet werden (mit $g = 0$).
Ansatz für die 2. partikuläre Lösung: $z_{p2} = \Re\mathrm{e}\ Ce^{i\omega t}$, wo C eine komplexe Zahl ist, siehe Skript.

8.3 Lineares Molekül



Betrachten Sie ein Molekül bestehend aus drei Atomen (siehe Abb.), jeweils mit den Massen m,M,m. Betrachten Sie nur die Bewegung entlang der x-Achse. Benachbarte Atome seien mit der Federkonstante k gekoppelt.
(a) Schreiben Sie die Lagrangefunktion des Systems
(b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in der Form:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

und bestimmen Sie die Matrizen $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{K}$. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sind die Auslenkungen von der Gleichgewichtslage.
(c) Suchen Sie nach Lösungen der Form:

$$\boldsymbol{u}\cos(\omega t + \phi)$$

Welche Gleichung müssen ω und $\boldsymbol{u}$ erfüllen?
Setzen Sie von nun an $M = 2m$. (c) Zeigen Sie, dass die Gleichungen folgende drei mögliche Werte von ω^2 ergeben:

$$\omega_0^2 = 0 \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = 2\frac{k}{m}$$

und bestimmen Sie die zugehörige Eigenvektoren (Moden) $\boldsymbol{u}^{(0)}$, $\boldsymbol{u}^{(1)}$,$\boldsymbol{u}^{(2)}$. Für jede Mode skizzieren Sie die entsprechende Auslenkungen.

8.4 Lineares Molekül cont.

(d) Schreiben Sie die allgemeine Lösung. Passen Sie insbesondere auf dem Term mit ω_0 auf: ist der Ansatz korrekt? Was ist der richtige (siehe Skriptum)?
(e) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung mit Anfangsbedingungen.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \alpha(0,1,0) \qquad \boldsymbol{x}(0) = \mathbf{0}$$

(**Hinweis:** Der Koeffizient von $\boldsymbol{u}^{(1)}$ wird in diesem Fall 0.)