

Theoretische Mechanik WS 2023/24, Blatt 9

9.1 Doppelpendel: kleine Schwingungen

Die Lagrangefunktion des Doppelpendels (Beispiel 6.1) lautet, bei gleichen Längen l und Massen $m_1 = 3m$, $m_2 = m$

$$\mathcal{L} = 2m l^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}_2^2 + ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 4m g l \cos \varphi_1 + m g l \cos \varphi_2 ,$$

- (a) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Werte der Winkel. Behalten Sie dabei nur Terme bis zur ersten Ordnung in φ_i und $\dot{\varphi}_i$. Schreiben Sie die resultierende Gleichung in Matrix-Vektor Form (siehe Kap. über kleine, gekoppelte Schwingungen). Geben Sie explizit die Matrizen an.
- (b) Suchen Sie nach Lösungen in der Form

$$\varphi_i(t) = \Re u_i e^{i\omega t} \quad (1)$$

und finden Sie die Eigenfrequenzen ω_A und ω_B .

9.2 Doppelpendel fort.: allgemeine Lösung

- (a) Finden Sie die zugehörigen Eigenmoden und skizzieren Sie diese auf dem Doppelpendel.
- (b) Schreiben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen.
- (c) Für jede der zwei Eigenfrequenzen, bestimmen Sie eine Anfangsbedingung (Anfangswerte der φ_i und $\dot{\varphi}_i$), so dass nur diese beiträgt.

9.3 Schräger Stab

Ein Stab bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v \hat{e}_z$ relativ zum Laborsystem Σ . Aus Sicht einer Beobachterin im Laborsystem schließt der Stab mit der z -Achse einen Winkel α .

Unter welchem Winkel α' erscheint der Stab einer Beobachterin, die sich mit dem Stab mitbewegt?

Hinweis: Ein Ende des Stabs befindet sich zur Zeit $t = 0$ im Ursprung von Σ . Verwenden Sie die Lorentztransformationen für den zweiten Endpunkt des Stabs, welcher für die Beobachterin in Σ zur gleichen Zeit ($t = 0$) erscheint.

9.4 Schräge Geschwindigkeit

Das inertielle Bezugssystem S' bewege sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ relativ zu einem anderen System S , wobei $v < c$. Ein Teilchen bewege sich in Bezug auf S (Vorsicht!) mit der Geschwindigkeit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit \mathbf{w} , die von S' gemessen wird.

Für den Fall $u_1 = 0$ bestimmen Sie $|\mathbf{w}|^2$ und überprüfen Sie, dass $|\mathbf{w}| \leq c$, wobei

$|\mathbf{w}| = c$ nur wenn $u_2 = c$.

9.5 Relativistische Waschanlage

Ein Auto der Ruhelänge L_{A0} fährt mit relativistischer Geschwindigkeit v durch eine Waschanlage mit Ruhelänge L_{W0} . Diese wurde von der Betreiberin (einer Physikerin) aus Kostengründen so konzipiert, dass $L_{W0} = L_{A0}/2$ nur halb so lang ist wie das Auto, das ja aufgrund der Längenkontraktion schrumpft.

Im Ruhesystem S der Waschanlage schließen sich Einfahrts- und Ausfahrtstor an Position $x = 0$ und $x = L_{W0}$ gleichzeitig und der Waschprozess startet, sobald das Heck des Autos die Einfahrt der Waschanlage passiert hat (man kann diesen Zeitpunkt mit $t = 0$ bezeichnen). Der Waschprozess endet und die Türen öffnen sich, sobald die Front des Autos das Ausgangstor erreicht hat.

- Wie schnell muss das Auto fahren, damit es im S zwischen die Türen passt?
- Wie lange dauert der Waschprozess im System S in Abhängigkeit von v ?
- (optional ¹) Was passiert aus der Sicht der Autofahrerin, für welche die Waschanlage verkürzt erscheint? Wie lange dauert die Autowäsche für sie? Hat diese Frage eine klare Antwort? Nehmen Auto oder Tore dabei Schaden?

9.6* Wie sieht die Beobachterin den Stab?

Betrachten Sie den Stab aus Bsp. 9.3.

Welchen Winkel **sieht** die Beobachterin im Ursprung von Σ bei $t = 0$, wenn man berücksichtigt, dass das Licht vom anderen Ende des Stabs eine endliche Zeit braucht, um zu ihr zu gelangen?. Bestimmen Sie das Ergebnis explizit für $\alpha' = \pi/2$ und $\alpha' = \pi/4$.

(Effekte aus der Perspektive sollen nicht berücksichtigt werden).

¹Zur Klärung: diese Teilfrage ist optional für's Ankreuzen, könnte aber Klausurstoff sein