Theoretische Mechanik WS 2023/24, Blatt 10

In den Relativitätsübungen verden Einheiten mit $c = 1$ verwendet.

10.1 Linear anwachsende Seitwärtskraft

Die Räumlichen Komponenten der Viererkraft für ein Teilchen mit Ruhemasse m lauten für das ruhende Laborsystem

$$K_1 = \gamma(t)F(t) \qquad K_2 = 0 \qquad K_3 = 0\ , \qquad \text{mit} \qquad F(t) = 2\ m\ b\ t\ .$$

Hier b ist eine Konstante und $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-v(t)^2}}$, wo $v(t)$ der Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens ist.

Zur Zeit $t = 0$ startet das Teilchen mit Geschwindigkeit $\bar{v}$ in y-Richtung. Bestimmen Sie alle Komponenten von $\boldsymbol{v}(t)$ als Funktion der Zeit. Bleibt v_y konstant?

Hinweis: Die Räumliche Komponenten $\boldsymbol{p}(t)$ des Impulses können Sie sofort durch einfache Integration bestimmen. Dann können Sie $p_0(t)$ aus der Beziehung zwischen Energie und Impuls ($p_\mu p^\mu = \cdots$) berechnen. Aus $p_0(t)$ bekommen Sie $\gamma(t)$. Das brauchen Sie, um $\boldsymbol{v}(t)$ aus $\boldsymbol{p}(t)$ zu extrahieren.

10.2 Linear anwachsende Seitwärtskraft (Fortsetzung)

Wie viel (Eigen-)Zeit τ ist im Bezugssystem des bewegten Teilchens während der oben beschriebenen Beschleunigungsphase $t > 0$ vergangen?

Ersatz falls 10.1 nicht gelöst wurde: $\gamma(t) = \sqrt{A^2 + B^2\ t^4}$

(a) Schreiben Sie einen Integral-Ausdruck für die Eigenzeit des Teilchens als Funktion von t.

(b) Das erhaltene Integral ist nicht mehr mit elementaren Funktionen analytisch lösbar. Berechnen Sie diesen für kleine Werte von t. Dazu entwickeln Sie $\gamma(t)^{-1}$ bis zu Ordnung t^4. Unter welcher Bedingung für t ist diese Näherung gerechtfertigt?

10.3 Beschleunigung und Verzögerung eines Teilchens

Betrachten Sie im Inertialsystem einer Beobachterin die Bewegung eines Punktteilchens

$$x(t) = \frac{2a}{3}t^{\frac{3}{2}} \qquad y(t) = z(t) = 0$$

bei der das Teilchen bis zur Maximalgeschwindigkeit v_1 beschleunigt wird, wobei die Konstante $a > 0$. Danach wird das Teilchen wieder abgebremst bis es wieder an der Stelle $x = 0$ zum Stillstand kommt. Die Verzögerung erfolgt in demselben Geschwindigkeitsverlauf wie die Beschleunigung, aber in umgekehrter zeitlicher Reihenfolge.

(a) Zeichnen Sie die angegebene Weltlinie in einem Minkowskidiagramm ein.

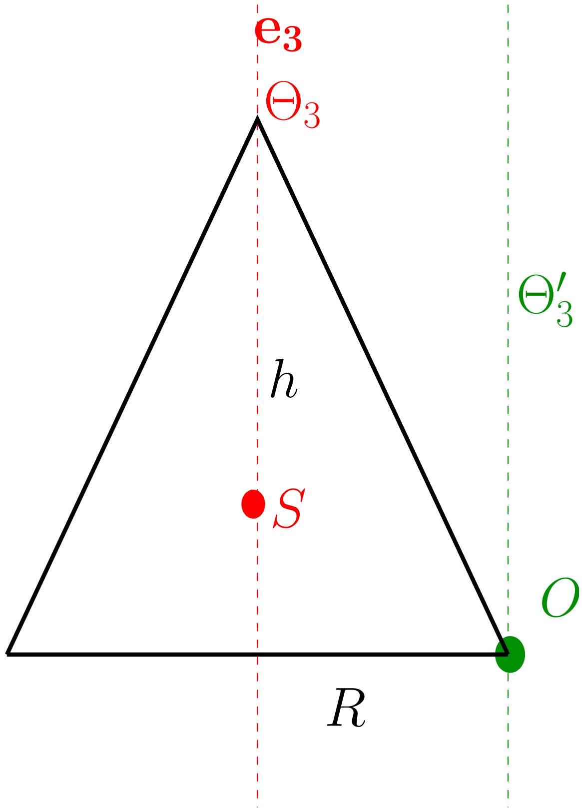
(b) Welche Zeit t_1 verstreicht im Inertialsystem der Beobachterin, bis das Teilchen die Geschwindigkeit v_1 erreicht?

(c) Bestimmen Sie die Eigenzeit τ die für das Teilchen während des gesamten Vorgangs verstreicht.

(d) bestimmen Sie τ für die zwei Fälle (i) $v_1 = c\ \sqrt{3/4}$ und (ii) $v_1 \ll c$.

Im Fall (ii) entwickeln Sie das Ergebnis aus (c) bis zu $O(v_1/c)^2$ und vergleichen Sie τ mit t_1.

10.4 Hauptträgheitsmomente eines homogenen Drehkegels



(a) Bestimmen Sie den Hauptträgheitsmoment Θ_3 eines homogenen Drehkegels als Funktion der Masse M und des Radius R , für Rotationen um den Massenschwerpunkt S. Hier ist $\boldsymbol{e}_3$ die Rotationsachse des Kegels.

Hinweis: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten. Eine gute Wahl ist, wenn man die Spitze des Kegels als Ursprung verwendet.

(b) Bestimmen Sie den Hauptträgheitsmoment Θ_3', wenn die Drehung durch einen Punkt O auf der äusseren Kante des Kegels läuft.

Hinweis: Satzt von Steiner.

(c) Bestimmen Sie alle mögliche Richtungen der Hauptträgheitsachsen des Kegels und begünden Sie Ihre Aussage (siehe Symmetrieargument aus der Vorlesung). Kann man $\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)$ als Hauptträgheitsachse nehmen?