

# Theoretische Mechanik WS 2023/24, Blatt 11

## 11.1 Trägheitstensor und Hauptträgheitsachsen

Betrachten Sie drei starr gekoppelte Punktmassen ( $A, B, C$ ) an den Koordinaten  $(x_1^A, x_2^A, x_3^A) = (-1, 1, -1)$ ,  $(x_1^B, x_2^B, x_3^B) = (1, -1, -1)$  und  $(x_1^C, x_2^C, x_3^C) = (0, 0, 4)$  mit Massen  $m^A = m^B = m$  und  $m^C = m/2$ .

(a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt  $\mathbf{S}$ , sowie alle Komponente des Trägheitstensors  $I_{ij}$  im Bezug auf dem Schwerpunkt.

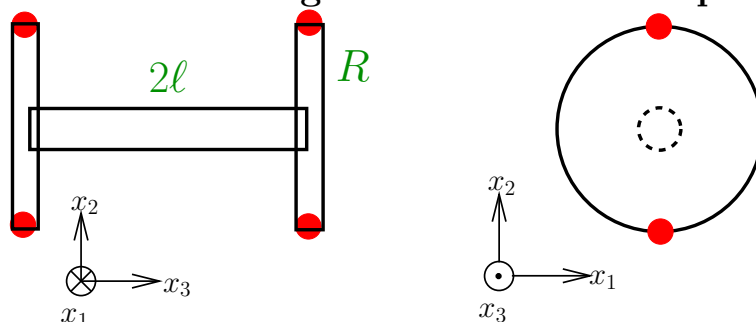
(b) Diagonalisieren Sie die Matrix  $\mathbf{I}$  und finden Sie die drei Hauptträgheitsmomente.

**Hinweis:** Zeigen Sie, dass  $I_{3,j} = 0$  für  $j \neq 3$ . Benutzen Sie  $I_{i,j} = I_{j,i}$ . Die Komponente 3 mischt somit nicht mit den anderen beiden, daher ist der diagonale Term bereits ein Eigenwert und  $(0, 0, 1)$  bereits ein Eigenvektor: Überprüfen Sie das! Es muss also nur die restliche  $2 \times 2$  Matrix diagonalisiert werden.

(c) Bestimmen Sie die normierten Hauptträgheitsachsen.

**Optional:** Hätte man die Hauptträgheitsachsen vom Anfang an ohne Rechnung bestimmen können?

## 11.2 Räder mit Achse: Trägheitstensor und Hauptträgheitsachsen



Gegeben sei ein Räder+Achse System, das aus drei Zylindern und vier Massenpunkte besteht (siehe Abb.: aus zwei Richtungen gesehen):

- Zwei homogene Scheiben jeweils mit Radius  $R$ , Höhe  $H$  und Masse  $M$
- Eine Achse mit Radius  $r$ , Höhe  $2l$  und Masse  $m$ .
- Vier Massenpunkte mit Masse  $\mu$  (rote Punkte auf dem Bild)

Sie können  $r$  und  $H$  als sehr klein betrachten und daher vernachlässigen.

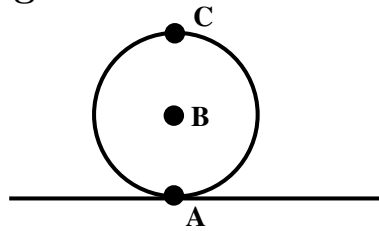
(a) Warum stimmen die Hauptträgheitsachsen des Systems mit den Achsen  $x_1, x_2, x_3$  überein (geometrisches Argument)? Wo liegt der Schwerpunkt  $S_H$  des Systems?

(b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente  $\Theta_i$  des Systems bezüglich seines Schwerpunktes (also mit  $S_H$  als Ursprung des KS).

**Hinweis:** Der Trägheitstensor der Systems besteht aus der Summe der Trägheitstensoren der einzelnen Teile. Dazu können Sie die bekannte Ausdrücke für die Trägheitsmomente eines Zylinders <https://de.wikipedia.org/wiki/Trägheitsmoment> (siehe Tabelle unten) verwenden. Allerdings sind diese im Bezug auf dem Schwerpunkt der jeweiligen Zylinders angegeben. Um den Trägheitstensor der beiden Scheiben bezüglich  $S_H$  zu bestimmen, benutzen Sie das Theorem von Steiner.

(c) Bestimmen Sie die  $\Theta_i$  explizit für  $m \rightarrow 0$ ,  $l = R$  und  $\mu = M/4$ .

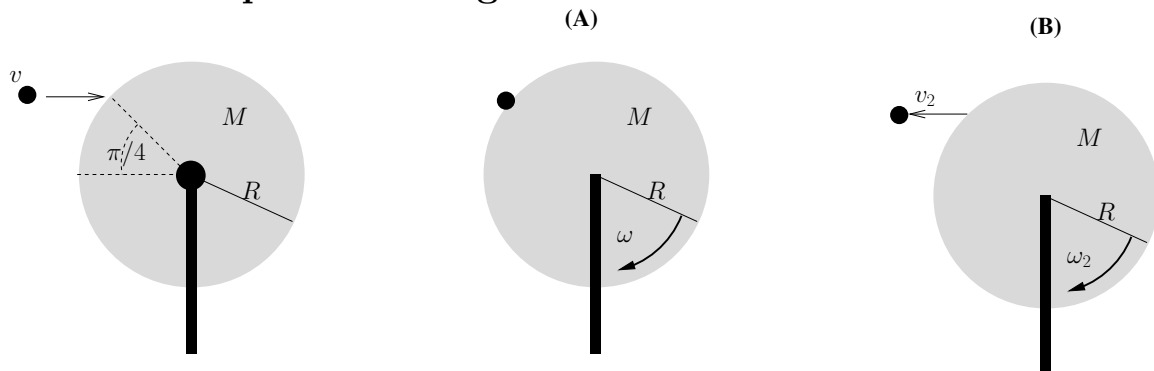
### 11.3 Kinetische Energie eines rollenden Zylinders



Berechnen Sie für drei verschiedene körperfeste Koordinatenursprünge (A, B, oder C in der Abbildung) die kinetische Energie eines homogenen Zylinders mit Masse  $M$ , Radius  $R$  und Länge  $L$ , der ohne Schlupf auf der horizontalen Ebene rollt (B hat Geschwindigkeit  $v_0$ ).

**Hinweis:** Betrachten Sie die Aufteilung der kinetischen Energie in zwei bzw. drei Anteile (siehe Skript).

### 11.4 Drehimpulserhaltung



Ein homogener Zylinder mit der Masse  $M$ , Radius  $R$  (Trägheitsmoment  $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$ ), sei an seiner Achse drehbar angehängt. Ein Teilchen der Masse  $m$  bewege sich mit Geschwindigkeit  $v$  auf den Zylinder zu (siehe Winkel in der Abb.). Der Zylinder ist am Anfang in Ruhe. Es wirkt keine Schwerkraft.

Im Bild (A) bleibt die Masse nach dem Stoß am Zylinder kleben.

(a) Der Drehimpuls ist erhalten, schreiben Sie daher einen Ausdruck für den Gesamtdrehimpuls des Systems vor und nach dem Stoß.

(b) Setzen Sie diese Ausdrücke gleich und bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit der Zylinderdrehung  $\omega$  nach dem Stoß.

(c) Bestimmen Sie den relativen Energieverlust ( $\Delta E/E_{initial}$ ) für  $M = 2m$ .

Im Bild (B) ist der Stoß dagegen elastisch. Die Gesamtenergie ist also erhalten und das Teilchen fliegt horizontal zurück mit einer zu bestimmende Geschwindigkeit  $v_2$ .<sup>1</sup>

(d) Schreiben Sie einen Ausdruck für den Drehimpuls nach dem Stoß.

(e) Schreiben Sie einen Ausdruck für die Energie vor und nach dem Stoß.

(f) Schreiben Sie eine Bestimmungsgleichung für  $\omega_2$  ODER  $v_2$  (es handelt sich um eine Gl. zweiten Grades entweder für  $\omega_2$  oder  $v_2$ . Diese müssen Sie nicht lösen.)

(g) **Optional:** Lösen Sie diese Gleichung für  $M = 2m$ .

<sup>1</sup>Es handelt sich natürlich nicht um einen Hartkugelstoß