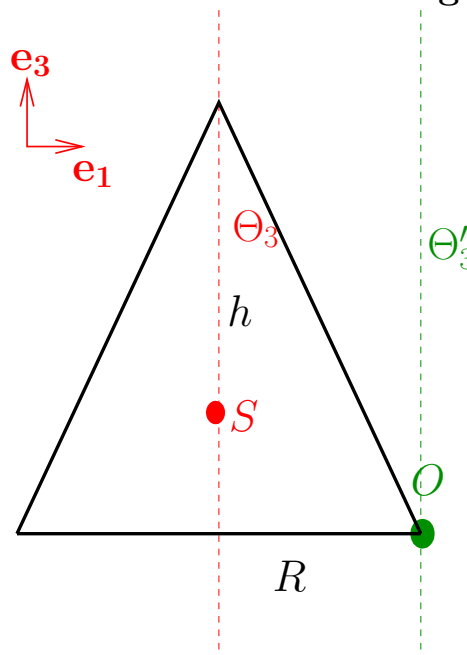


Theoretische Mechanik WS 2025/26, Blatt 13

13.1 Hauptträgheitsmomente eines homogenen Drehkegels



(a) Bestimmen Sie den Hauptträgheitsmoment Θ_3 eines homogenen Drehkegels als Funktion der Masse M und des Radius R , für Rotationen um den Massenschwerpunkt S . Hier ist $\mathbf{e}_3$ die Rotationsachse des Kegels.

Hinweis: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten. Eine gute Wahl ist, wenn man die Spitze des Kegels als Ursprung verwendet und dann den Satz von Steiner verwendet.

(b) Bestimmen Sie den Hauptträgheitsmoment Θ'_3 , wenn die Drehung durch einen Punkt O auf der äusseren Kante des Kegels läuft.

(c) Bestimmen Sie alle mögliche Richtungen der Hauptträgheitsachsen des Kegels und begründen Sie Ihre Aussage (siehe Symmetrieargument aus der Vorlesung). Kann man $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ als Hauptträgheitsachse nehmen?

13.2 Trägheitstensor und Hauptträgheitsachsen

Betrachten Sie drei starr gekoppelte Punktmassen (A, B, C) an den Koordinaten $(x_1^A, x_2^A, x_3^A) = (-1, 1, -1)$, $(x_1^B, x_2^B, x_3^B) = (1, -1, -1)$ und $(x_1^C, x_2^C, x_3^C) = (0, 0, 4)$ mit Massen $m^A = m^B = m$ und $m^C = m/2$.

(a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt $\mathbf{S}$, sowie alle Komponente des Trägheitstensors I_{ij} im Bezug auf dem Schwerpunkt.

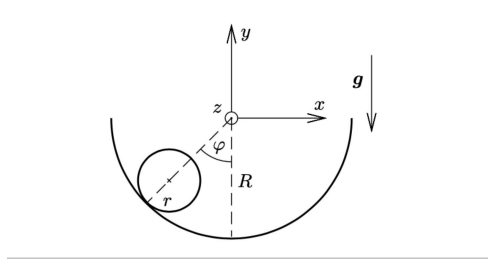
(b) Diagonalisieren Sie die Matrix $\mathbf{I}$ und finden Sie die drei Hauptträgheitsmomente.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $I_{3,j} = 0$ für $j \neq 3$. Benutzen Sie $I_{i,j} = I_{j,i}$. Die Komponente 3 mischt somit nicht mit den anderen beiden, daher ist der diagonale Term bereits ein Eigenwert und $(0, 0, 1)$ bereits ein Eigenvektor: Überprüfen Sie das! Es muss also nur die restliche 2×2 Matrix diagonalisiert werden.

(c) Bestimmen Sie die normierten Hauptträgheitsachsen.

Optional: Hätte man die Hauptträgheitsachsen vom Anfang an ohne Rechnung bestimmen können? Begründen Sie die Aussage.

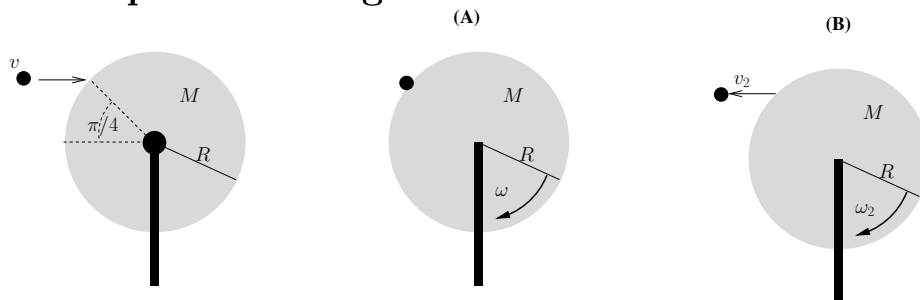
13.3 Rollender Zylinder und momentane Drehachse



Ein homogener Zylinder mit Radius r , Masse m und Hauptträgheitsmoment $\Theta_3 = mr^2/2$ bezüglich seiner Zylinderachse rollt auf der Innenseite einer größeren zylinderförmigen Schale mit Radius R . Dabei wirkt die Schwerkraft $\mathbf{g}$. Verwenden Sie als Koordinate den Winkel φ zwischen der Vertikalen und der Verbindungslinie der beiden Zylindermittelpunkte (siehe Abbildung).

- Bestimmen Sie die kinetische Energie des kleinen Zylinders.
- Bestimmen Sie potentielle Energie und Lagrangefunktion.
- Bestimmen Sie die Lagrange-Gleichung und lösen Sie diese für kleine Auslenkungen φ . Schreiben Sie die allgemeine Lösung.

13.4 Drehimpulserhaltung



Ein homogener Zylinder mit der Masse M , Radius R (Trägheitsmoment $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$), sei an seiner Achse drehbar angehängt. Ein Teilchen der Masse m bewege sich mit Geschwindigkeit v auf den Zylinder zu (siehe Winkel in der Abb.). Der Zylinder ist am Anfang in Ruhe. Es wirkt keine Schwerkraft.

Im Bild (A) bleibt die Masse nach dem Stoß am Zylinder kleben.

- Der Drehimpuls ist erhalten, schreiben Sie daher einen Ausdruck für den Gesamtdrehimpuls des Systems vor und nach dem Stoß.
- Setzen Sie diese Ausdrücke gleich und bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit der Zylinderdrehung ω nach dem Stoß.
- Bestimmen Sie den relativen Energieverlust $(\Delta E/E_{initial})$ für $M = 2m$.

Im Bild (B) ist der Stoß dagegen elastisch. Die Gesamtenergie ist also erhalten und das Teilchen fliegt horizontal zurück mit einer zu bestimmende Geschwindigkeit v_2 .¹

- Schreiben Sie einen Ausdruck für den Drehimpuls nach dem Stoß.
- Schreiben Sie einen Ausdruck für die Energie vor und nach dem Stoß.
- Schreiben Sie eine Bestimmungsgleichung für ω_2 ODER v_2 (es handelt sich um eine Gl. zweiten Grades entweder für ω_2 oder v_2 . Diese müssen Sie nicht lösen.)
- Optional:** Lösen Sie diese Gleichung für $M = 2m$.

¹Es handelt sich natürlich nicht um einen Hartkugelstoß