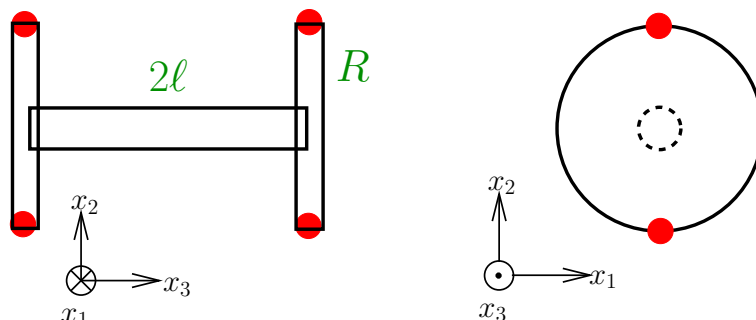


Theoretische Mechanik WS 2025/26, Blatt 14

Dieser Blatt enthält nur eine Pflichtaufgabe. Nutzen Sie die Gelegenheit, Fragen zu den vorherigen Übungen zu stellen, als Vorbereitung für die zweite Teilprüfung. Auch die zwei Vorlesungseinheiten am Montag und Mittwoch können für solche Fragen benutzt werden.

14.1 Räder mit Achse: Trägheitstensor und Hauptträgheitsachsen



Gegeben sei ein Räder+Achse System, das aus drei Zylindern und vier Massenpunkte besteht (siehe Abb.: aus zwei Richtungen gesehen):

- Zwei homogene Scheiben jeweils mit Radius R , Höhe H und Masse M
- Eine Achse mit Radius r , Höhe $2l$ und Masse m .
- Vier Massenpunkte mit Masse μ (rote Punkte auf dem Bild)

Sie können r und H als sehr klein betrachten und daher vernachlässigen.

- Warum stimmen die Hauptträgheitsachsen des Systems mit den Achsen x_1, x_2, x_3 überein (geometrisches Argument)? Wo liegt der Schwerpunkt S_H des Systems?
- Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente Θ_i des Systems bezüglich seines Schwerpunktes.

Hinweis: Der Trägheitstensor der Systems besteht aus der Summe der Trägheitstensoren der einzelnen Teilen. Dazu können Sie die bekannte Ausdrücke für die Trägheitsmomente eines Zylinders

$$\theta_3 = \frac{1}{2} M R^2 \quad \theta_{1,2} = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M H^2$$

verwenden. (e_3 =Zylinderachse). Allerdings sind diese im Bezug auf dem Schwerpunkt der jeweiligen Zylinder angegeben.

Um den Trägheitstensor der beiden Scheiben bezüglich S_H zu bestimmen, benutzen Sie das Theorem von Steiner.

- Bestimmen Sie die Θ_i explizit für $m \rightarrow 0$, $l = R$ und $\mu = M/4$.

14.2* Asymmetrischer, freier Kreisel im körperfesten und im Inertialsystem

Lösen Sie numerisch die Euler Gleichungen für den freien Asymmetrischen Kreisel (also ohne Drehmoment). Plotten Sie den Vektor ω als Funktion der Zeit.

Betrachten Sie den Fall von sehr unterschiedlichen Trägheitsmomente z.B. $\theta_1 = 0.1$, $\theta_2 = 1.$, $\theta_3 = 3.$ Nehmen Sie als Anfangsbedingung eine Rotation nah (aber nicht exakt) an der mittleren Achse e_2 .

Bestimmen Sie nun die Zeitabhängigkeit der Eulerwinkel. Dazu benutzen Sie die Beziehung zwischen den Eulerwinkeln und den Vektor ω und Lösen Sie die entspre-

hende gekoppelte Differentialgleichung. Plotten Sie die Bewegung des Kreisels im Inertialsystem.

14.3* Symmetrischer Kreisel im Schwerefeld

Lösen Sie numerisch die Lagrange Gleichung für die Eulerwinkel für den symmetrischen Kreisel im Schwerefeld. Plotten Sie die Bewegung des Kreisels. Überprüfen Sie numerisch, dass die Umkehrpunkte θ_1, θ_2 mit der Lösung der Gl. $E - U_{eff}(\theta) = 0$ übereinstimmen.