Flusskoordinaten und Anwendung auf ein toroidales Modellfeld

Christopher Albert, TU Graz - ITPcp

2. Juni 2014

1 Allgemeines zu Flusskoordinaten

- Quellen:
  - D'haeseleer et al. [1991]
  - Hazeltine and Meiss [1990]
  - http://fusionwiki.ciemat.es/wiki/Flux_coordinates
- Clebsch-Darstellung (Hintergrund in Barbarosie [2011], Gallavotti [2002])
  - Idee: Feldlinien als Schnittkurve zweier Flächen, die normal zur Normalfläche auf die **B**-Feldlinien (normal zur Flussrichtung) stehen.

$$\mathbf{B} = \nabla\rho \times \nabla\nu$$

  - Divergenzfreiheit von B folgt durch

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{B} &= \nabla\cdot(\nabla\rho\times\nabla\nu)\\ &= (\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\rho)}_{=0})\times\nabla\nu + \nabla\rho\times(\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\nu)}_{=0})\\ &= 0\end{aligned}$$

  - Durch Flächen mit konstantem ρ und ν verschwindet der magnetische Fluss,

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\rho = \mathbf{B}\cdot\nabla\nu = 0.$$

- Führe Flusskoordinaten $(\rho, \varphi, \vartheta)$ ein
  - ρ ist eine Koordinate und $\nu = \nu(\rho, \varphi, \vartheta)$ ist eine beliebige Funktion, sodass das **B**-Feld dargestellt werden kann.

– Idee: Verallgemeinerung von pseudotoroidalen Koordinaten mit Radius ρ, toroidalem Winkel φ und poloidalem Winkel ϑ.
– Kontravariante Komponenten von $\mathbf{B}$ sind gegeben mit

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}\left(\partial_i\rho\partial_j\nu\right)\mathbf{e}_k \\ B^\rho &= 0 \\ B^\varphi &= \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\vartheta\nu \\ B^\vartheta &= -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\varphi\nu\end{aligned}$$

- Eindeutigkeit bzgl. φ und ϑ

  – Forderung: $\mathbf{B}(\rho_0,\varphi,\vartheta) = \mathbf{B}(\rho_0,\varphi+2\pi,\vartheta) = \mathbf{B}(\rho_0,\varphi,\vartheta+2\pi)$
  – Bis zu lineare Terme von ν in φ und ϑ heben sich weg bei $\nabla\rho\times\nabla\nu$

$$\begin{aligned}\nu(\rho,\varphi,\vartheta) &= a(\rho) + b(\rho)\varphi + c(\rho)\vartheta \\ \nabla\nu &= (a'(\rho) + b'(\rho)\varphi + c'(\rho)\vartheta)\nabla\rho + b(\rho)\nabla\varphi + c(\rho)\nabla\vartheta \\ \nabla\rho\times\nabla\nu &= (a'(\rho) + b'(\rho)\varphi + c'(\rho)\vartheta)(\underbrace{\nabla\rho\times\nabla\rho}_{=0}) + b(\rho)\nabla\rho\times\nabla\varphi + c(\rho)\nabla\rho\times\nabla\vartheta \\ &= b(\rho)\nabla\rho\times\nabla\varphi + c(\rho)\nabla\rho\times\nabla\vartheta\end{aligned}$$

  – Höhere Terme sind nicht mehr eindeutig bezgl. Winkel, z.B.

$$\nabla\rho\times\nabla(d(\rho)\varphi^2) = (d'(\rho)\varphi^2)(\nabla\rho\times\nabla\rho) + d(\rho)\frac{\varphi}{2}\nabla\varphi$$

  – Kann noch beliebige periodischer Funktion $\tilde{\nu}(\rho,\varphi,\vartheta)$ addieren

$$\nu(\rho,\varphi,\vartheta) = a(\rho)\varphi + b(\rho)\vartheta + \tilde{\nu}(\rho,\varphi,\vartheta) \tag{1}$$

- Magnetische Flüsse

  – Die Koeffizienten in (1) hängen mit dem magnetischen Fluss zusammen. Toroidaler und poloidaler Fluss sind gegeben als

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{tor}} &= \int_{S_{\mathrm{tor}}}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \\ \Psi_{\mathrm{pol}} &= \int_{S_{\mathrm{pol}}}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\end{aligned}$$

  wobei S_{tor} die Querschnittsfläche des Torus normal zu $\mathbf{e}^\varphi$ ist und S_{pol} die Fläche zwischen $r=0$ und r_0 normal zu $\mathbf{e}^\vartheta$. (D'haeseleer et al. [1991], S. 77)

- Wir leiten zuerst eine Formel her, mit der die Flüsse über ein Volumsintegral geschrieben werden können (am Beispiel von Ψ_{tor} wobei Ψ_{pol} analog funktioniert).
- Schneide Torus an z.B. toroidaler Fläche auf und integriere mit Winkel gewichteten Fluss:

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \varphi \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = &-\int_0^{\rho_0} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \varphi \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi|_{\varphi=0} \\ &+ \int_{\rho=\text{const.}} \\ &+ \int_0^{\rho_0} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \varphi \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi|_{\varphi=2\pi}\end{aligned}$$

- Nur der letzte Term bleibt übrig:

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \varphi \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= 2\pi \int_0^{\rho_0} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi \\ &= 2\pi \int_{S_{\text{tor}}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi \Psi_{\text{tor}}\end{aligned}$$

- Mit $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ gilt

$$\nabla(\mathbf{B}\varphi) = \underbrace{\varphi \nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0} + \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi,$$

  und mit Gauss

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \varphi \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_V \mathrm{d}V \nabla(\mathbf{B}\varphi) \cdot \\ &= \int_V \mathrm{d}V \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ Toroidaler und poloidaler Fluss durch Volumsintegrale gegeben:

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{tor}} &= \int_{S_{\text{tor}}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{2\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}V \\ \Psi_{\text{pol}} &= \int_{S_{\text{pol}}} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{2\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot \nabla\vartheta \mathrm{d}V\end{aligned}$$

• Zusammenhang der Flüsse mit den Koeffizienten a und b in (1)

  - Damit wir seltener 2π schreiben müssen, setze $\psi := \Psi/2\pi$

- Ableitungen nach dem Radius ergibt

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_{\text{tor}} = \frac{\mathrm{d}\psi_{\text{tor}}}{\mathrm{d}\rho} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_0^\rho \rho' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \ldots \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \sqrt{g}\mathbf{B}\cdot\nabla\varphi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \sqrt{g}B^\varphi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \partial_\vartheta \nu \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \left(b(\rho) + \partial_\vartheta \tilde{\nu}(\rho,\varphi,\vartheta)\right) \\
\dot{\psi}_{\text{tor}} &= b(\rho)
\end{aligned}$$

- Poloidaler Fluss ergibt analog

$$\dot{\psi}_{\text{pol}} = -a(\rho)$$

- Eliminieren der oszillierenden Funktion $\tilde{\nu}$
  - Ziel: Vereinfachte Form von **B**-Feld in geeigneten Koordinaten, in denen die Feldlinien zu Geraden werden
  - Transformation auf neue Winkelkoordinaten (Flusskoordinaten), um $\tilde{\nu}$ zu eliminieren

$$\begin{aligned}
\varphi_f &= \varphi + \frac{\tilde{\nu}}{a(\rho)} = \varphi - \frac{\tilde{\nu}}{\dot{\psi}_{\text{pol}}} \\
\vartheta_f &= \vartheta + \frac{\tilde{\nu}}{b(\rho)} = \vartheta + \frac{\tilde{\nu}}{\dot{\psi}_{\text{tor}}}
\end{aligned}$$

  - Ergebnis

$$\mathbf{B}(\rho,\varphi,\vartheta) = \nabla\rho \times \nabla(\dot{\psi}_{\text{tor}}\vartheta_f - \dot{\psi}_{\text{pol}}\varphi_f)$$

  - Vektorpotential lässt sich als Produkt darstellen

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= -\nu\nabla\rho \\
\mathbf{B} &= -\nabla\times(\nu\nabla\rho) \\
&= \nabla\rho\times\nabla\nu - \nu\underbrace{(\nabla\times\nabla\rho)}_{=0}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = (\dot{\psi}_{\text{pol}}\varphi - \dot{\psi}_{\text{tor}}\vartheta)\mathbf{e}^\rho$$

(allerdings nicht physikalisch korrekt, da nicht eindeutig bzgl. Winkelvariablen)

- Kanonische Form
  - Führt zu eindeutigem Vektorpotential und Hamiltonscher Form
  - Beziehung zwischen kanonischer Form und Clebsch-Form

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla\varphi \times \nabla\psi_{\text{pol}}(\rho) + \nabla\psi_{\text{tor}}(\rho) \times \nabla\vartheta \\ &= -\dot{\psi}_{\text{pol}}(\rho)\nabla\rho \times \nabla\varphi + \dot{\psi}_{\text{tor}}(\rho)\nabla\rho \times \nabla\vartheta \\ &= \nabla\rho \times \nabla(\dot{\psi}_{\text{tor}}\vartheta - \dot{\psi}_{\text{pol}}\varphi). \\ &= \frac{\dot{\psi}_{\text{pol}}}{\sqrt{g}}\mathbf{e}_{\vartheta} + \frac{\dot{\psi}_{\text{tor}}}{\sqrt{g}}\mathbf{e}_{\varphi}\end{aligned}$$

    (Letzte Umformung ist möglich, weil $\nabla\dot{\psi}_{\text{tor}}(\rho) = \ddot{\psi}_{\text{tor}}\nabla\rho$ und $\nabla\rho \times \nabla\rho = 0$)
  - Toroidale und poloidale Komponente hat linearen Zusammenhang

$$B^{\vartheta} = qB^{\varphi}$$

    mit Safety-Factor

$$q(\rho) = \dot{\psi}_{\text{tor}}(\rho)/\dot{\psi}_{pol}(\rho)$$

    konstant auf ρ-Fläche.
  - Vektorpotential für alternative Form

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \psi_{\text{tor}}\nabla\vartheta - \psi_{\text{pol}}\nabla\varphi \\ \mathbf{B} &= \nabla\psi_{\text{tor}} \times \nabla\vartheta + \psi_{\text{tor}}\underbrace{(\nabla \times \nabla\vartheta)}_{=0} \\ &\quad + \nabla\varphi \times \nabla\psi_{\text{pol}} - \psi_{\text{pol}}\underbrace{(\nabla \times \nabla\varphi)}_{=0} \\ \mathbf{A} &= \psi_{\text{tor}}\mathbf{e}^{\vartheta} - \psi_{\text{pol}}\mathbf{e}^{\varphi}\end{aligned}$$

    (das ist auch physikalisch OK und eindeutig)

- Hamilton-Formalismus für festes ρ
  - Verwende ψ_{tor} als Hamiltonfunktion und ϑ als Zeitparameter, dann sind ψ_{pol} und φ dazugehörige Wirkungs-Winkel-Variablen

$$\frac{\psi_{\text{pol}}}{\vartheta} = -\frac{\partial\psi_{\text{tor}}}{\partial\varphi} = 0 \qquad \frac{\varphi}{\vartheta} = \frac{\partial\psi_{\text{tor}}}{\partial\psi_{\text{pol}}} = q = \text{const.}$$

  - Kleine Störung: $A_{\vartheta} = \psi_{\text{tor}} + \tilde{A}_{\vartheta}$, dann ergibt sich

$$\frac{\psi_{\text{pol}}}{\vartheta} = -\frac{\partial\tilde{A}_{\vartheta}}{\partial\varphi} \qquad \frac{\varphi}{\vartheta} = q + \frac{\partial\tilde{A}_{\vartheta}}{\partial\psi_{\text{pol}}}$$

– Störung mit Fourier-Darstellung in φ mit Modenzahlen m, n:

$$\frac{im}{2\pi}\psi_{\mathrm{pol};m,n} = \frac{-in}{2\pi}\tilde{A}_{\vartheta;m,n}$$
$$\psi_{\mathrm{pol};m,n} = -\frac{n}{m}\tilde{A}_{\vartheta;m,n}$$

2 Anwendung auf ein Modellfeld

- Quelle: M. Heyn - Skriptum zum Modellfeld im idealisierten Tokamak
- Pseudo-Toroidale Koordinaten
  - Koordinaten r, ϑ, φ (mit $R = R_0 + r\cos\varphi$)

    $$x = (R_0 + r\cos\vartheta)\cos\varphi$$
    $$y = (R_0 + r\cos\vartheta)\sin\varphi$$
    $$z = r\sin\vartheta$$

  - Basisvektoren

    $$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$
    $$\mathbf{e}_\varphi = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
    $$\mathbf{e}_\vartheta = r\begin{pmatrix} -\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

  - Metrik mit $\sqrt{g} = rR(r,\vartheta)$

    $$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

- Annahmen:
  - Radialen Feldkomponente verschwindet (Flussflächen mit kreisförmigem Querschnitt)
  - Keine Abhängigkeiten vom toroidalen Winkel φ
- Gleichungen für das Magnetfeld

– Divergenzfreiheit

$$
\begin{aligned}
0 = \mathrm{div}\mathbf{B} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}B^i\right) \\
&= \frac{1}{rR}\left(\partial_r(rR\underbrace{B^r}_{=0}) + \underbrace{\partial_\varphi}_{=0}(rRB^\varphi) + \partial_\vartheta(rRB^\vartheta)\right)
\end{aligned}
$$

– Integration

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\vartheta}(RB^\vartheta) &= 0 \\
RB^\vartheta &= \frac{R_0}{r}B^*_{(\vartheta)}(r) \\
\Rightarrow B_{(\vartheta)} &= |\mathbf{e}_\vartheta|B^\vartheta = B^*_{(\vartheta)}(r)\frac{R_0}{R(r,\vartheta)}
\end{aligned}
$$

– Radiale und poloidale Ströme vernachlässigbar

$$
\begin{aligned}
4\pi\mathbf{J} = \mathrm{rot}\mathbf{B} &= \mathbf{e}_i\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}\partial_j B_k\right) \\
0 = (\mathrm{rot}\mathbf{B})^r &= \frac{1}{rR}\left(\partial_\varphi B_\vartheta - \partial_\vartheta B_\varphi\right) \Rightarrow B_\varphi = B_\varphi(r) \\
0 = (\mathrm{rot}\mathbf{B})^\vartheta &= \frac{1}{rR}\left(\partial_r B_\varphi - \partial_\varphi B_r\right) \Rightarrow B_\varphi = B_0 R_0 \\
\Rightarrow B_{(\varphi)} &= |\mathbf{e}^\varphi|B_\varphi = B_0\frac{R_0}{R(r,\vartheta)}
\end{aligned}
$$

– Feldlinien

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= B^r = 0 \Rightarrow r = \mathrm{const.} \\
\dot{\varphi} &= B^\varphi = B_0\frac{R_0}{R^2} \\
\dot{\vartheta} &= B^\vartheta = B^*_{(\vartheta)}(r)\frac{R_0}{rR} \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vartheta} &= \frac{B^\varphi}{B^\vartheta} = \frac{rB_0}{RB^*_{(\vartheta)}(r)} \approx \frac{rB_0}{R_0B^*_{(\vartheta)}(r)} = q(r)
\end{aligned}
$$

- Clebsch-Form
  – Finde $\nu(r,\varphi,\vartheta)$ für $\rho = r$
  – Hier: $R = R(r,\vartheta) = R_0 + r\cos\vartheta$ ergibt Abhängigkeit von $\sqrt{g}B^\varphi$ von ϑ, die in $\tilde{\nu}(r,\varphi,\vartheta)$ steckt.

$$
\partial_\vartheta\nu = rB_0\cdot\frac{R_0}{R}
$$

- Die Ableitungen der Flüsse ergeben sich sich aus den Integralen

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_{\mathrm{tor}} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \sqrt{g} B^{\varphi} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta r B_0 \frac{R_0}{R} \\
&= \frac{rB_0}{\sqrt{1-(r/R_0)^2}} \\
\psi_{\mathrm{tor}} &= -B_0 R_0 \sqrt{R_0^2 - r^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_{\mathrm{pol}} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \sqrt{g} B^{\vartheta} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta R_0 B^*_{(\vartheta)}(r) \\
&= R_0 B^*_{(\vartheta)}(r) \\
\psi_{\mathrm{pol}} &= R_0 \int_0^r r' B^*_{(\vartheta)}(r')
\end{aligned}$$

- Parameter in der Clebsch-Darstellung folgen

$$\begin{aligned}
a(r) &= -R_0 B^*_{(\vartheta)}(r) \\
b(r) &= \frac{rB_0}{\sqrt{1-(r/R_0)^2}}
\end{aligned}$$

- Clebsch-Darstellung

$$\begin{aligned}
\nu(r,\varphi,\vartheta) &= \frac{rB_0}{\sqrt{1-(r/R_0)^2}}\vartheta - R_0 B^*_{(\vartheta)}(r)\varphi + \tilde{\nu}(r,\vartheta) \\
&\approx R_0 B^*_{(\vartheta)}(r)\left(q\vartheta - \varphi\right)
\end{aligned}$$

• Transformation auf Fluss-Koordinaten

- Toroidale Magnetfeldkomponente

$$\partial_\vartheta \nu = rB_0 \cdot \frac{R_0}{R} = \frac{rB_0}{\sqrt{1-(r/R_0)^2}} + \partial_\vartheta \tilde{\nu}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \partial_\vartheta \tilde{\nu} &= rB_0R_0 \left(\frac{1}{1 + r/R_0 \cos\vartheta} - \frac{1}{\sqrt{1-(r/R_0)^2}}\right) \\
\tilde{\nu} &= -rB_0R_0 \frac{2\tan^{-1}\left(\frac{(r/R_0-1)\tan(\vartheta/2)}{\sqrt{1-(r/R_0)^2}}\right) + \vartheta}{\sqrt{1-(r/R_0)^2}} + f(r)
\end{aligned}$$

– Transformation der Flussvariablen

$$
\begin{aligned}
\vartheta_f &:= \vartheta + \tilde{\nu}/\dot{\psi}_{\mathrm{tor}} \\
&= \vartheta - \tilde{\nu}/B_0 R_0^2 \sqrt{1-(r/R_0)^2} \\
&= \vartheta + 2\frac{r}{R_0} \frac{\tan^{-1}\left(\frac{(r/R_0-1)\tan(\vartheta/2)}{\sqrt{1-(r/R_0)^2}}\right)}{1-(r/R_0)^2}
\end{aligned}
$$

Literatur

C. Barbarosie. Representation of divergence-free vector fields. *Quarterly of Applied Mathematics*, 69(2):309–316, 2011.

W. D'haeseleer, W. Hitchon, J. Callen, and J. Shohet. Springer Series in Computational Physics. Springer Berlin Heidelberg, 1991. ISBN 978-3-642-75597-2. doi: 10.1007/978-3-642-75595-8_5. URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-75595-8_5`.

G. Gallavotti. *Foundations of fluid dynamics*, volume 172. Springer, 2002.

R. D. Hazeltine and J. D. Meiss. *Plasma confinement.* Courier Dover Publications, 1990.