

# 9 Der Kosterlitz-Thouless-Phasenübergang (topologisch!)

Nobel-Preis 2016 (Kosterlitz, Thouless, und Haldane)

Typisch in 2 Dim. mit kontinuierlicher Symmetrie, auch relevant für High-Tc (2 Dim. schichten,  $T > 0$ ), Helium Filme und 4 Dim. Gittertheorie.

*Kurb. Expansion hängt kontinuierlich von  $T$  ab: keine Universalität!*

Klassische Systeme: Flüssigkristalle  $\rightarrow$  LCD = Liquid Crystal Display

Entdeckt mit einer RG-Analyse 1974

Exakt in Body Centered Solid on Solid Modell („BCSOS-Modell“) = „6-Vertex-Modell“

*↳ Baxter*

s.S. 76

## 9.1 Das klassische 2 Dim XY-Modell

Winkel  $\Theta_n \in [0, 2\pi]$

Energie:  $H = J \sum_{\langle nm \rangle} \cos(\Theta_n - \Theta_m)$

Zustandssumme:  $Z = \sum_{\{\Theta_n\}} e^{-\beta H}$

*hier: Quadratgitter*



*↳ im Limes  $\Delta \epsilon \rightarrow 0$ : Heisenberg Spin 1/2 Kette*

Globale Symmetrie: Rotation aller „Spins“ um den selben Winkel. kontinuierliche Symmetrie!  
In  $d = 2$  (Quadratgitter) hat das Modell sehr ungewöhnliche Eigenschaften.

*u(a)*

*Beweis!*

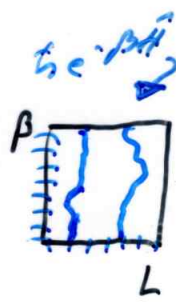
Dazu: Das Mermin-Wagner-Theorem (rigoros, einzeln für jedes Modell)

- In  $d \leq 2$  Dimensionen (Gitter) kann eine kontinuierliche globale Symmetrie (z.B.  $\Theta$ ) in einem klassischen System nicht „spontan gebrochen“ sein.  
d.h.  $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Theta_n \rangle = 0$  bei allen Temperaturen

• Analog

- diskrete Symmetrie in  $d = 1$  (z.B. Ising in  $d=1$ )
- Quantenmechanische Systeme bei  $T > 0$  in  $d \leq 2$  (kontinuierliche Symmetrie)

Weltlinienbild: Rechnung auf  $d + 1$  dimensionalen Gitter da eine zusätzliche Dimension benötigt wird (Werte von  $0$  bis  $\beta$ ). Ist  $\beta$  endlich und wird die räumlichen Länge  $L$  gegen unendlich geschickt, so verhält sich das System so, wie ein System mit der räumlichen Dimension. Deshalb gilt es für  $d \leq 2$ . Ist  $T = 0$ , dann ist  $\beta = \infty$  und das Theorem gilt nur für  $d = 1$ .



NB:

Elitzur Theorem:

Eine lokale kontinuierliche Symmetrie (z.B. in Eichtheorie  $A_\mu(x, t) \rightarrow A_\mu(x, t) + \partial_\mu \lambda(x, t)$ ) kann nie spontan gebrochen werden.

Elitzur

zu unterscheiden:

# "Symmetriebrechung"

1. Spontane Symmetrie Brechung „SSB“:  $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_i \rangle \neq 0$

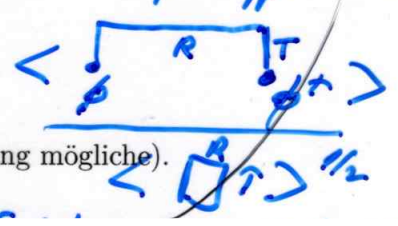
2. Langreichweitige Ordnung „LRO“:  $\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_i S_{i+R} \rangle \neq 0$   $\langle S_i S_{i+R} \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_{i+R} \rangle \neq 0$

3. Von Null verschiedene „Stiffness“:  $\Upsilon = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^{d-1}} \frac{\partial^2 F}{\partial \Phi^2} \neq 0$   
*(aber nicht  $\Upsilon \neq 0$ )*  
*Helicity modulus*

zu Stiffness: Hier wird ein periodisches System mit Randbedingungen betrachtet, bei dem sich der Winkel  $\Theta$  am Rand um  $\Phi$  ändert ( $\Theta_{L+1} = \Theta_1 + \Phi$ ). Beispiele:

- XY-Modell : keine SSB, keine LRO, aber Stiffness
- Peierls-Phase (mag. Fluss) in elektromagnetischen Modellen
- Supraleitende Stiffness ( $\Rightarrow$  Meissner Effekt)

Analog bei Higgs-Mechanismus (mit Eichfeldern) "Fredenhagen-Marcu Ordnungsparameter":



Man kann zeigen dass: SSB  $\Rightarrow$  LRO  $\Rightarrow$  endl. Stiffness (nur in diese Richtung möglich).  
 Beispiel: Supraleitung!

Quantenmechanisch: „Off-Diagonal Long Range Order“ (ODLRO):

z.B.  $\lim_{R \rightarrow \infty} \langle c_{\uparrow,0} c_{\downarrow,0} c_{\uparrow,R}^\dagger c_{\downarrow,R}^\dagger \rangle \neq 0$

ODLRO  $\Rightarrow$  endl. Stiffness

$\Rightarrow$  Meißner-Effekt

*aber  $\langle \psi_R^\dagger \psi_R \rangle \neq 0$  ! keine SSB bei Supraleitung*  
*BCS: "  $\neq 0$  " (BCS: Mean-Field Näherung, analog zu  $M = \langle s_i \rangle$  ungleich Null)*

*superfluid density*  
*• Brude weight*

## Jetzt wieder 2d-XY-Modell 2d XY: KT-Uebergang:

- Keine spontane Symmetriebrechung, keine LRO, aber Sprung in der Stiffness bei allen Temperaturen  $T = T_{KT}$
- Phasenübergang „unendlicher Ordnung“. Freie Energie und alle ihre Ableitungen analytisch
- In der Tieftemperatur Phase ändern sich die kritischen Exponenten als Funktion der Temperatur!  
Universalität verletzt!

Dies sieht man schon in einer Näherung:

Grenzfall sehr tiefer Temperatur ( $\beta$  groß)

Energie wichtig  $\Rightarrow$   $\Theta_n$  variiert räumlich langsam  $\Rightarrow \cos(\Theta_n - \Theta_m) \approx 1 - \frac{1}{2}(\Theta_n - \Theta_m)^2$ .  
 Diese Approximation heißt „Gaußsche Näherung“ da die Zustandssumme wie eine Gaußfunktion aussieht. Resultat: Spinwellen ( $\Rightarrow$  alle Integrale berechenbar)

Nach ein wenig Rechnen:

Hier angemessene Form der Korrelationsfunktion

$\langle e^{i(\Theta_0 - \Theta_R)} \rangle \approx \left( \frac{1}{|R|} \right)^{\frac{1}{2\pi\beta J}}$   
*Potenzartig!*

$\propto \frac{1}{R^{d-2+1/\nu}}$  (9.1)

Kritischer Exponent ist eine Funktion von  $\beta$ !

*3.700!*  
*bc. hoher Temp.*  
 *$T < T_{KT}$*

Grenzfall hoher Temperaturen ( $\beta$  klein)

$\langle e^{i(\Theta_0 - \Theta_R)} \rangle = \frac{1}{Z} \int_0^{2\pi} \left( \prod_j d\theta_j \right) e^{i(\Theta_0 - \Theta_R)} e^{-\beta J \sum_{\langle nm \rangle} \cos(\Theta_n - \Theta_m)}$   
*Entwicklung in  $\beta$*

1 -  $\beta J \cos(\theta_n - \theta_m) + \dots$   
 2  $\cos(x) = \exp(ix) + \exp(-ix)$



KAPITEL 9. DER KOSTERLITZ-THOULESS-PHASENÜBERGANG  
(TOPOLOGISCH!)

mit  $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$  und  $\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0$  analog zu  $\sum_{s_i=\pm 1} s_i = 0$

Nach Rechnung (Damit Integral einen Beitrag liefert benötigt man eine „Verbindung“ von  $\Theta_0$  und  $\Theta_R$  mittels Faktoren von  $\beta J \cos(\Theta_n - \Theta_m)$ ):

$$\langle e^{i(\Theta_0 - \Theta_R)} \rangle \approx (\beta J)^R = e^{-R \ln(\frac{1}{\beta J})} \rightarrow \xi = \frac{1}{\ln(\frac{1}{\beta J})} \quad (9.2)$$

$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \xi = \infty$  d.h. in dieser Hochtemperaturnäherung wird ein Phasenübergang ( $\xi = \infty$ ) bei  $\beta J = 1$  erreicht. (Bei tieferen Temperaturen ist das Ergebnis dieser Hochtemperaturnäherung unsinnig ( $\xi < 0$ ))

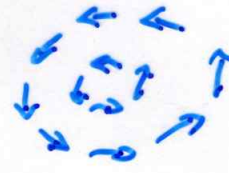
Tatsächlich

$\xi < \infty$  oberhalb von  $T_{KT}$  und  $\xi = \infty$  mit potenzartiger Korrelationsfunktion für alle

$T \leq T_{KT}$ .  $T_{KT} = 0.89...J$

„Anregungen“ des XY-Modells:

Vortexes (Vortices)

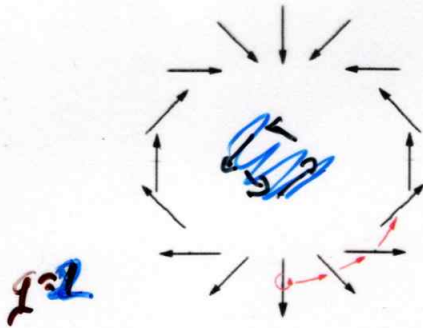


Windungszahl  $q=1$

Spinwellen:  
(schon in Gaußscher Näherung)



Vortexes:



Windungszahl  $q=2$

Abbildung 9.1: Anregungen des XY-Modells: Spinwellen (oben) und Vortexes (unten)

1. Spinwellen (in gaußscher Näherung enthalten)

2. „Vortexes“

Windungszahl  $q := \frac{1}{2\pi} \oint \nabla \theta d\vec{r}$

Dies sind „Topologische“ Objekte: lokale Spinänderung können keine Vortexes erzeugen oder Vernichten.

Eigenschaften:

- Energie (Wechselwirkung) eines Vortexpaares (im Abstand  $R$  in 2d):  $\Delta E = \dots = \ln(R) \rightarrow \ln N$  wenn  $R = \sigma$  (Systemgröße) in  $R$  kommt von  $\int d^2x \nabla \theta(\vec{x}) \cdot \nabla \theta(\vec{x}-\vec{R})$
- Entropie dazu: 2 Vortex kann an allen  $N$  Plätzen des Gitters sitzen.
- Freie Energie eines zusätzlichen Vortex in Umgebung von Vortexes (positiv oder negativ?)  $\Delta F = E - TS = \underbrace{c_1 \ln(R)}_{c_1 \ln(N)} - c_2 T \ln(N) \propto (T_c - T) \ln(N)$

$\Rightarrow$  Phasenübergang!

$T > T_c \Rightarrow \Delta F < 0$

$\Rightarrow$  Akkumulation von Vortexes

$T < T_c \Rightarrow \Delta F > 0 \dots$

- $T < T_{KT}$  Bei tiefen Temperaturen: wenige Vortizes, meist in gebundenen Paaren.
- $T > T_{KT}$  Bei hohen Temperaturen: „viele Vortizes“, „Kondensat“



--> zuerst Kapitel 9.3

## 9.2 Verwandte Modelle (alle in d=2)

Zeigen alle KT-Übergang und gleiches RG-Verhalten: XY kann man mit folgenden Modellen nähern:

- Villain-Modell** (wie XY-Modell, aber mit anderer Hamiltonfunktion) = **DGSOS-Modell** (Discrete Gaussian Solid on Solid; Dualitätstransformation via Gaußscher Integration).
  - $Z \propto \sum_{\{h_i\}} e^{-\frac{1}{\beta} \sum_{\langle ij \rangle} (h_i - h_j)^2}$
  - Diskrete Höhen:  $h_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  diskrete (nicht kontinuierliche) Variablen, 2d, trotzdem KT-Phasenübergang!
  - oberfläch, Roughening
  - analog Fouriertransformation im Raum der Winkel theta (0 bis 2pi) -> diskrete  $h_i$
- Skalares masseloses Feld mit Quellen**  $\approx$  „Sine-Gordon-Modell“ (angelehnt an Klein Gordon Gleichung)
- XY-Modell  $\approx$  **Spinwellen** + (unabhängig in Näherung) „Coulomb-Gas“ von Vortizes
- BCSOS-Modell** (exakt lösbar) = „6-Vertex-Modell“ s.u.
  - $Z = \sum_{h_i=0,\pm 1,\pm 2,\dots} e^{-\frac{1}{\beta} \sum_{\langle ij \rangle} |h_i - h_j|}$  mit Einschränkung dass  $h_i - h_j = 0, \pm 1$ .
  - diskret!
  - typ. Höhen unbeschränkt  $\sim \ln N$

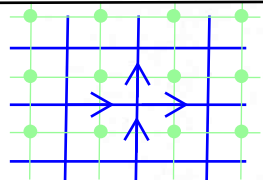
! idf. XKT (Heisenberg) am Modell

## 9.3 Einige Ergebnisse der RG-Analyse

- Kritische Temperatur:  $\pi \beta_{KT} J - 2 \approx e^{-\frac{\pi^2}{2} \beta_{KT} J}$  (grobe Näh.)
- Korrelationslänge nahe  $T_{KT}$ :
  - $T > T_{KT}$ :  $\xi \propto e^{\text{const} \sqrt{\frac{T_{KT}}{T - T_{KT}}}}$  nicht analytisch bei  $T = T_{KT}$ !
  - $T < T_{KT}$ :  $\xi = \infty$
- Freie Energie pro Platz:  $\beta f \propto \frac{1}{\xi^2}$
- Korrelations Funktion bei  $T_{KT}$ :  $\langle e^{i(\theta_0 - \theta_R)} \rangle \propto \left(\frac{1}{R}\right)^\eta$  mit  $\eta = \frac{1}{4}$
- Stiffness (= Helizität): Sprung bei  $T_{KT}$  von  $\Upsilon = 2T_{KT}$  auf 0**

6-Vertex-Modell (s.u.): an jedem Vertex gleich viele einlaufende wie auslaufende Pfeile. (Verletzung dieser Regel: "Monopole")

Spin-Lös!



BCSOS: Höhen  $h_i$  auf dualem Gitter (=Quadrate)

BCSOS  $\rightarrow$  Pfeile entsprechen Gradientendifferenzen  
 $\Rightarrow$  Bei Kreuzungspunkten der Pfeile gleich viele ein- wie auslaufend

z.B. Pfeilrichtung so, dass Höhe links größer



Exakte Lösung: R. Baxter

$\rightarrow$  KT-Übergang!  $\hookrightarrow$  "6-Vertex-Modell"  
 $\hookrightarrow$  Abb. auf Weltlinien des 2d Heisenberg Modells