

Gitteranalyse des Higgs-Mechanismus

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

vorgelegt von
Diplom - Physiker
Hans Gerd Evertz
aus
Heinsberg/Rhld.

Referent: Professor Dr. J. Jersák
Korreferent: Professor Dr. H.A. Kastrup
Tag der mündlichen Prüfung: 10. 7. 1987

Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>1. Einleitung</u>	1
1.1 Umfeld	1
1.2 Motivation	4
1.3 Gliederung	8
1.4 <i>Zusammenfassung der Ergebnisse</i>	9
<u>2. Die untersuchten Modelle</u>	11
2.1 Zum Higgs-Mechanismus im Glashow-Salam-Weinberg-Modell	11
2.2 Eichinvariante Darstellung der Higgs-Modelle	22
2.3 Die untersuchten Gittermodelle	26
2.4 Grenzfälle und Phasendiagramme	30
2.5 Das Verhalten lokaler Observabler in Monte-Carlo-Untersuchungen	33
2.6 Rechnungen zur Ordnung des Higgs-Phasenübergangs	36
<u>3. Eichinvariante Zweipunktfunktionen</u>	43
3.1 Einführung	43
3.2 Das Confinement-Problem (Potentiale)	46
3.3 Beweis zum Umfungsverhalten der Wegner-Wilson-Schleifen	53
3.4 Exponentieller Zerfall der Zweipunktfunktionen	57
3.5 Interpretation der Abschirmenergie μ	63
3.6 Ordnungsparameter	70
3.7 Zusammenfassung	79
<u>4. Massen</u>	81
4.1 Quantenzahlen und Korrelationsfunktionen	81
4.2 Massen im U(1)-Higgs-Modell	86
4.3 Massen im SU(2)-Higgs-Modell	97
<u>5. Das SU(2)-Higgs-Modell bei endlicher Temperatur</u>	108
5.1 Einführung	108
5.2 Der Higgs-Übergang	111
5.3 Schlußfolgerungen	117
<u>6. Schlußbemerkungen</u>	120
<u>Anhang: Quantenzahlen von Gitteroperatoren</u>	123
Literaturverzeichnis	133
Danksagung	

1. Einleitung

1.1 Umfeld

Die fundamentalen Kräfte der Natur werden erfolgreich durch Theorien mit lokaler Eichinvarianz beschrieben. Die erste Eichtheorie war die Maxwell'sche Elektrodynamik. Sie ist als Grenzfall in der quantenfeldtheoretischen QED enthalten, die wiederum ein Teil des auf der Eichgruppe $SU(2) \otimes U(1)$ beruhenden Glashow-Salam-Weinberg-Modells der elektroschwachen Wechselwirkung ("Standardmodell") ist [1]. Die starke Wechselwirkung wird durch die unter lokalen $SU(3)$ -Eichtransformationen invariante QCD beschrieben [2]. Auch die allgemeine Relativitätstheorie kann als eine gegenüber lokalen Koordinatentransformationen invariante Eichtheorie aufgefaßt werden.

Die bisherigen Erfolge dieser Theorien beruhen meist auf perturbativen Rechnungen mit Störungsentwicklungen in der Eichkopplung. In der QED kann man etwa das anomale magnetische Moment des Müons mit bemerkenswerter Genauigkeit ausrechnen. Die perturbative QCD beschreibt korrekt z.B. das Auftreten von Jets in e^+e^- -Annihilationen bei hohen Energien. Das Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkungen sagte richtig die Existenz und Stärke des neutralen schwachen Stromes und der Paritätsverletzung in der tiefinelastischen Elektron-Deuteron-Streuung, die Größe der Asymmetrie in der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, sowie vor allem die Existenz der Eichbosonen W und Z mit den experimentell bestätigten Werten der Massen voraus [3]. Zur Erzeugung dieser Massen dient im Standardmodell der zunächst quasiklassisch und perturbativ formulierte Higgs-Mechanismus [4], bei dem mit Hilfe skalarer Materiefelder die Eichbosonen massiv werden.

Eine Reihe von Phänomenen ist perturbativen Rechnungen jedoch nicht zugänglich. Hierunter sind das bei großen Abständen (~ 1 Fermi) in der QCD auftretende Confinement, Bindungszustände (z.B. von Quarks in der QCD) bei starken Wechselwirkungen und eine sehr wünschenswerte vollständige, nicht nur quasiklassische Analyse des Higgs-Mechanismus. Die Grundlage für nicht-perturbative (und eichinvariante) Untersuchungen ist die sehr elegante von Feynman formulierte Pfadintegraldarstellung [5] der Quantenfeldtheorie. Sie ist zu der kanonischen Formulierung äquivalent. Bei formaler Entwicklung des Pfadintegrals nach Potenzen von \hbar ergibt sich die Schleifen-Entwicklung der

Störungstheorie. Auch das Pfadintegral bedarf, wie andere Formulierungen der Quantenfeldtheorie, für eine korrekte Definition der Regularisierung. Hierzu wird es, nach Übergang zu euklidischer Raum-Zeit, auf einem 4-dimensionalen Raum-Zeit-Gitter definiert. Dies führt auf die von Wilson 1974 [6] eingeführten Gittereichtheorien [7]. Sie benötigen keine Eichfixierung und sind deshalb manifest eichinvariant. Allerdings wird dabei die kontinuierliche Symmetrie der euklidischen Raum-Zeit durch diskrete Symmetrien des Gitters angenähert. Gittereichtheorien haben formal große Ähnlichkeit mit Systemen der statistischen Physik, so daß deren Untersuchungsverfahren vorteilhaft herangezogen werden können.

Zur Erkundung der Eigenschaften von Gittereichtheorien dienen sowohl strenge Beweismethoden wie auch approximative Verfahren. Neben Hoch- und Tieftemperaturentwicklungen erweisen sich dabei vor allem Approximationen des Pfadintegrals mittels einer Markov-Kette von Feldkonfigurationen als sehr erfolgreich. Zur Generierung solcher Konfigurations-Ensembles dienen Monte-Carlo (MC) Simulationen [8], z.B. mit Hilfe des auch in dieser Arbeit verwendeten Metropolis-Algorithmus [9]. Ziel von Rechnungen auf Gittern bleibt es, Aussagen über die Physik des Kontinuums zu machen, also den Gitterabstand a letztendlich in einem Kontinuumslimit gegen Null gehen zu lassen.

Große Erfolge feierten die Gittereichtheorien zunächst vor allem bei perturbativ nicht zugänglichen Problemen in der QCD [10]: Numerische Evidenz für das Confinement der Quarks konnte gefunden werden; berechnete Hadronmassen zeigen grobe Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen; die Berechnung eines von Null verschiedenen Quark-kondensats bestätigte die bisherigen Hypothesen über spontane chirale Symmetriebrechung, und bei hohen Temperaturen wurde die Existenz eines Deconfinement-Übergangs gezeigt [11]. Die meisten dieser Rechnungen hat man allerdings in der Approximation statischer Quarks durchgeführt, da die Berücksichtigung dynamischer Fermionen wegen der Pauli-Statistik numerisch äußerst aufwendig ist.

Gittereichtheorien mit gekoppelten Eich- und skalaren Materiefeldern, die Gitter-Higgs-Modelle, haben in den letzten Jahren immer mehr an Bedeutung gewonnen. Solche Modelle gestatten es unter anderem, den für das Standard-

modell der elektroschwachen Wechselwirkung unabdingbaren Higgs-Mechanismus ohne die Einschränkungen perturbativer Rechnungen zu studieren. Im Gegensatz zu Theorien mit Fermionen konnten Higgs-Modelle stets als vollständige Systeme aus Eichfeldern und dynamischen skalaren Materiefeldern behandelt werden. Ihre Formulierung auf dem Gitter [12,13] und die Methoden der numerischen Behandlung [7] bereiten keine Probleme. Die ersten grundlegenden Untersuchungen waren analytischer Art [12-17]. Eine solche Untersuchung gibt es auch für die Eichgruppe $SU(2) \times U(1)$ [18].

Später wurden die Phasendiagramme (im Raum der Kopplungskonstanten) einer ganzen Reihe von Higgs-Modellen mit numerischen Methoden bestimmt, unter anderem für Grenzfälle der vierdimensionalen $U(1)$ - und $SU(2)$ -Higgs-Modelle [19,20]. Die Ergebnisse dieser Rechnungen waren die Grundlage für weitergehende Untersuchungen, vor allem solcher Higgs-Modelle, die für das Standardmodell wichtig sind. (Einen ausführlichen Überblick findet man in [21].) Die Phasenstrukturen und Higgs-Phasenübergänge wurden in Monte-Carlo-Rechnungen genauer erforscht [22-33], die Natur der auftretenden Phasen analytisch [34-43] und numerisch [32,44-48] untersucht und die Spektren in einigen Gebieten dieser Phasen mit MC-Rechnungen bestimmt [32,49-54]. Auch Higgs-Modelle bei endlicher Temperatur ($T > 0$) wurden analysiert [16,55,23,28,56-58]. Dabei leisteten die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Untersuchungen [30,45,46,52-54,58] wichtige Beiträge. Es gibt auch analytische Überlegungen [59-63] zum Kontinuumslimites der Higgs-Modelle, sowie erste noch sehr explorative numerische Ansätze zur Renormierungsgruppenstruktur [64].

Es bestehen berechtigte Hoffnungen, daß die Untersuchungen der Higgs-Modelle auf dem Gitter zur weiteren Vertiefung des Verständnisses der Quantenfeldtheorie und in der Zukunft auch zu Ergebnissen von phänomenologischer Relevanz führen werden.

1.2 Motivation

Beweggründe für die in dieser Arbeit beschriebenen Untersuchungen von Higgs-Modellen auf dem Gitter entstammen drei verschiedenen Problemkreisen : dem Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung, der konstruktiven Feldtheorie, sowie der Kosmologie.

Das **Standardmodell** der elektroschwachen Wechselwirkung [1] beruht auf lokaler Eichinvarianz unter der Gruppe $SU(2) \otimes U(1)$. Unverzichtbarer Teil dieses Modells ist der Higgs-Mechanismus der Erzeugung von Vektorboson-Massen [3]. Er ermöglicht es, unter anfänglicher Wahrung der lokalen Eichinvarianz massive Eichbosonen W und Z zu beschreiben. Gleichzeitig bleibt die Theorie renormierbar [65].

Das zu diesem Zweck postulierte skalare Feld erhält im Higgs-Mechanismus -in semiklassischer Approximation und bei fixierter Eichung- einen nichtverschwindenden Erwartungswert, der dann zur Grundlage von störungstheoretischen Betrachtungen gemacht wird. Wegen des Auftretens dieses Vakuumerwartungswertes ist der Higgs-Mechanismus inhärent nicht-perturbativ. Der skalare Sektor ist derjenige Teil des Standardmodells, über den experimentell und theoretisch am wenigsten bekannt ist. Die Masse m_H des Higgs-Teilchens ist im Standardmodell eine unbestimmte Größe, zu der perturbativ nur grobe Schranken existieren. Falls m_H größer als etwa 1 TeV sein sollte, bricht die störungstheoretische Behandlung zusammen [60-63,66-69]. Zum Studium des Higgs-Mechanismus eignet sich deswegen hervorragend die nichtperturbative und eichinvariante Gitterformulierung der Theorie.

Die einfachste Lagrangedichte des vollen $SU(2) \otimes U(1)$ -Modells enthält schon vier Kopplungskonstanten. In dieser Arbeit wird daher als Baustein des vollen Modells das $SU(2)$ -Higgs-Modell untersucht, das dem Higgs-Sektor des Standardmodells entspricht, und als formal analoges Modell, mit $U(1)$ -Symmetrie, das $U(1)$ -Higgs-Modell. In beiden Modellen tritt ein Higgs-Phasenübergang auf. Im $U(1)$ -Higgs-Modell begrenzt er eine Coulomb-Phase. Dort besteht deshalb die Möglichkeit, am Higgs-Phasenübergang die Erzeugung von Vektorboson-Massen auf nichtperturbative Weise zu untersuchen.

Da Fermionen am Higgs-Mechanismus nicht beteiligt sind, können sie unberücksichtigt bleiben. Erst dadurch werden die untersuchten Modelle mit numerischen Methoden der Gittereichtheorien effektiv behandelbar.

Eines der interessantesten Probleme bei der Analyse des Higgs-Mechanismus entsteht durch die Trivialität der ϕ^4 -Theorie, in die das Standardmodell im Grenzfall verschwindender Eichkopplung übergeht. Durch zahlreiche analytische [70,71] und numerische [72] Untersuchungen ist es inzwischen fast sicher, daß die renormierte Kopplung λ_{ren} in dieser asymptotisch nicht freien Theorie bei unendlich großem Abschneideparameter (bzw. verschwindender Gitterkonstante) in 4 Dimensionen Null ist.

Eine wichtige und noch ungeklärte Frage ist nun, ob die Trivialität der ϕ^4 -Theorie auch durch Ankopplung von Eichfeldern nicht verhindert werden kann, und ob sie sich auf das Standardmodell übertragen würde. In der renormierten Theorie würde dann die Kopplung zwischen Eichfeldern und skalaren Feldern verschwinden. Am einzigen bisher bekannten Renormierungsgruppen-Fixpunkt des SU(2)-Higgs-Modells, dem Gaußschen Fixpunkt der freien Theorie, bestehen Anzeichen für ein solches Verhalten [59]. Dies würde eine gründliche Umarbeitung der heutigen Vorstellungen über den Higgs-Mechanismus erfordern.

Wenn sich die Trivialität nicht übertragen sollte, erweckt aber andererseits die Möglichkeit, daß die renormierte ϕ^4 -Theorie einen freien Parameter weniger besitzt als die nackte Theorie, auch die Hoffnung, daß im Standardmodell der renormierte Wert der Higgsmasse festliegen und durch nichtperturbative Rechnungen bestimmbar sein könnte.

Zur Klärung dieser sehr interessanten und im Rahmen perturbativer Überlegungen nicht lösbarer Probleme im Standardmodell ist eine nichtperturbative Charakterisierung des Higgs-Mechanismus unentbehrlich. Dazu dient auch die Untersuchung der Massen des Higgsbosons und von Eichbosonen, in der Nähe des für einen Kontinuumslikes nötigen Higgs-Phasenübergangs.

In der konstruktiven Feldtheorie sind Systeme mit gekoppelten Eich- und Materiefeldern von großem Interesse. Die Charakterisierung der Phasen dieser Systeme ist z.T. analytisch noch nicht gelungen [43]. Zur konstruktiven Formulierung von Quantenfeldtheorien (QFT) muß die Gitterregularisierung herangezogen werden. Daher ist es natürlich, solche Systeme nicht nur analytisch, sondern auch numerisch zu studieren. Beide Methoden ergänzen sich in der Regel, so daß ihre gemeinsame Anwendung zu einem wesentlich besseren Verständnis der QFT führen kann.

Ein wichtiges Problem in der QFT (mit Auswirkungen z.B. auf die QCD) ist es, Confinement dann zu beschreiben, wenn dynamische Materiefreiheitsgrade anwesend sind. Im Falle einer reinen Eichtheorie kann die Energie zwischen zwei voneinander separierten äußeren Ladungen, die mit wachsendem Abstand ins Unendliche ansteigt, als Confinement-Kriterium benutzt werden [6]. Sind hingegen dynamische Materiefelder anwesend, so wird nach Erreichen einer genügend großen Energie immer Paarerzeugung und damit Hadronisierung stattfinden, so daß die Energie des Gesamtsystems bei weiterer Separierung nicht mehr unbeschränkt wächst [12,13,73]. Deshalb kann man das einfache Confinement-Kriterium des mit zunehmendem Abstand unbeschränkten Wachstums der Energie zweier Ladungen hier nicht mehr verwenden. Diese wie auch andere Auswirkungen dynamischer Materiefelder hängen nicht mit ihrem Spin zusammen. Sie können daher schon an den einfachsten Systemen, denjenigen mit skalaren, bosonischen Feldern studiert werden, also im Rahmen von Higgs-Modellen.

Zu den bemerkenswertesten Eigenschaften der beiden untersuchten Modelle gehört das Auftreten von Confinement und Higgs-Mechanismus innerhalb derselben Phase [12-14]. Diese beiden in früheren Betrachtungen im Kontinuum völlig getrennten Phänomene können daher zueinander in Beziehung gesetzt [12,16,40,74-76] und gemeinsam analysiert werden. Es gibt keinen lokalen Ordnungsparameter, der zwischen Higgs-Mechanismus und Confinement unterscheiden könnte. (Der in der ϕ^4 -Theorie ohne Eichfelder zur Definition der Symmetriebrechung verwendete Erwartungswert $\langle\phi\rangle$ ist in der eichinvarianten Formulierung identisch Null [17,40,43].) Wegen der Verbindung von Confinement und Higgs-Mechanismus kann man auch im Higgs-Gebiet der Confinement-Higgs-Phase ein reiches Teilchenspektrum vermuten.

Im $U(1)$ -Higgs-Modell gibt es zusätzlich zur Confinement-Higgs-Phase noch eine Coulomb-Phase mit freien Ladungen. Dies ermöglicht es, die Unterschiede zwischen Phasen mit freien Ladungen und solchen mit Confinement exemplarisch zu studieren und Ordnungsparameter zu suchen, die (auch bei Anwesenheit dynamischer Materiefelder) zwischen diesen Phasen unterscheiden [35-39,41,43-47].

Die Gitterregularisierung ist natürlich auch für die konstruktive Feldtheorie nur ein Zwischenschritt auf dem Wege zur Beschreibung einer Kontinuumstheorie. Geht die Gitterkonstante gegen Null, so werden physikalisch endliche (Korrelations-)längen in Gittereinheiten unendlich, d.h. Massen in Gittereinheiten werden Null. Ein Kontinuumsliches kann deswegen nur an einem Phasenübergang (PÜ) von mindestens 2. Ordnung durchgeführt werden. Damit besteht auch aus diesem Blickwinkel großes Interesse an den Phasenübergängen der Theorie und deren Ordnung, ebenso wie an dem Verhalten von Massen in ihrer Nähe.

Für die Kosmologie sind physikalische Phänomene bei sehr hohen Temperaturen, wie sie bei der Expansion und Abkühlung des Universums nach dem Urknall aufgetreten sind, sehr wichtig. Man nimmt an [77-80], daß bei Temperaturen weit oberhalb der Skala der elektroschwachen Wechselwirkung noch kein Higgs-Mechanismus stattfand und daher die Eichbosonen W , Z und γ alle masselos waren. Damit hatte das frühe Universum andere thermodynamische Eigenschaften als bei tieferen Temperaturen. Ein perturbativ vorhergesagter nachfolgender Phasenübergang zu einer Phase mit aktivem Higgs-Mechanismus [77-80] ist die Grundlage der sehr erfolgreichen Theorien eines inflationären Universums [81]. Für die Berechnung der Entwicklung des Universums und den Vergleich der Konsequenzen mit experimentellen Beobachtungen ist es deshalb sehr wichtig, möglichst exakt zu wissen, bei welcher Temperatur der Higgs-Mechanismus einsetzt und von welcher Art der entsprechende Übergang ist. Solche Fragen verlangen Untersuchungen mit nichtperturbativen Methoden.

1.3 Gliederung

In dieser Arbeit berichte ich über Untersuchungen der Eigenschaften von zwei Modellen mit gekoppelten Eichfeld- und skalaren Materiefeld-Freiheitsgraden, dem $U(1)$ -Higgs- und dem $SU(2)$ -Higgs-Modell. Das 2. Kapitel beinhaltet die Grundlagen der weiteren Untersuchungen. Nach Rekapitulation des Higgs-Mechanismus im Standardmodell im Kontinuum und der dort auftretenden Probleme beschreibe ich die Modifikationen, die sich durch eine eichinvariante Formulierung der Higgs-Modelle auf dem Gitter ergeben. Die Vorstellung der untersuchten Gittersysteme, ihrer Grenzfälle sowie bisher bekannter Eigenschaften im Lichte lokaler Observabler schließen sich an. Kapitel 2.6 enthält neue Ergebnisse zur Ordnung der Higgs-Phasenübergänge [30,52].

Eine genauere Charakterisierung der Phasen der Higgs-Modelle ist mit Hilfe von eichinvarianten Zweipunktfunktionen möglich, die auf den Higgs-Phasenübergang sehr empfindlich reagieren und deren physikalische Interpretation das Geschehen am Übergang physikalisch anschaulich werden läßt. Die Zweipunktfunktionen erlauben auch die Formulierung neuer Confinement-Kriterien. Aus dem Blickwinkel der Feldtheorie behandle ich im 3. Kapitel hierzu analytische Ergebnisse, darüber deutlich hinausgehende numerische Evidenzen sowie deren physikalische Interpretationen [45,46].

Im Zusammenhang mit dem Standardmodell sind vor allem Massen von Teilchen und ihre Abhängigkeit von den Kopplungskonstanten wichtig. Entsprechende Rechnungen in beiden Modellen [52-54] in der Nähe der Higgs-Phasenübergänge (bei Kopplungen, für die Übergänge zweiter Ordnung erwartet wurden), beschreibe ich im 4. Kapitel. Auch einige Bemerkungen zum Kontinuumslimit des $SU(2)$ -Higgs-Modells finden sich dort.

Rechnungen, die das Verhalten eines Modells bei endlicher Temperatur bestimmen sollen, müssen auf asymmetrischen Gittern und damit getrennt von den übrigen Untersuchungen durchgeführt werden. Im 5. Kapitel berichte ich über solche Rechnungen für das $SU(2)$ -Higgs-Modell [58], besonders über die dabei gefundene sehr interessante Veränderung des Higgs-Phasenübergangs bei endlicher Temperatur.

Das 6. Kapitel enthält Schlußbemerkungen.

1.4 Zusammenfassung der Ergebnisse

Das U(1)-Higgs-Modell und das SU(2)-Higgs-Modell, mit skalaren Feldern in der fundamentalen Darstellung der Eichgruppe, werden in dieser Arbeit mittels Monte-Carlo-Rechnungen auf Gittern der Größen $8^3 \cdot 16$ bis 16^4 untersucht. Diese Untersuchungen dienen der nichtperturbativen Analyse des Higgs-Mechanismus. Dabei betrachte ich drei Themenkreise ausführlich :

Erstes Untersuchungsgebiet sind die Eigenschaften von eichinvarianten Zweipunktfunktionen. Ihr exponentieller Zerfall führt auf eine neue Größe, die Abschirmenergie μ . Zusammen mit Wegner-Wilson-Schleifen gestatten die Zweipunktfunktionen, zwei Ordnungsparameter zu definieren, die als Confinement-Kriterien dienen. Sie unterscheiden auch bei Anwesenheit von dynamischen Materiefeldern zwischen der Coulomb-Phase mit freien Ladungen und der Confinement-Higgs-Phase mit Abschirmung von Ladungen. Einer dieser Ordnungsparameter entspricht einem Vorschlag von Fredenhagen und Marcu, der zweite wird durch die Analyse von μ neu gewonnen.

Im U(1)-Higgs-Modell stehen die numerischen Ergebnisse für die Ordnungsparameter voll im Einklang mit den theoretischen Ergebnissen und Erwartungen. Sie zeigen die Existenz geladener Zustände in der Coulomb-Phase und das Einsetzen von Abschirmung im Higgs-Gebiet. Das Verhalten der Ordnungsparameter kann mit Hilfe heuristischer physikalischer Bilder interpretiert werden, die zu Wasserstoffatomen bzw. Positronium-Teilchen analog sind.

Bei der Analyse des SU(2)-Higgs-Modells zeigt sich im Higgs-Gebiet das erwartete Verhalten der Ordnungsparameter. Dagegen ist im Confinement-Gebiet auch auf dem größten verwendeten Gitter noch kein asymptotisches Verhalten erreichbar.

Zweites größeres Untersuchungsgebiet sind die Spektren neutraler Zustände in den beiden Higgs-Modellen. Im U(1)-Higgs-Modell sind in der Coulomb-Phase drei verschiedene Zustände erkennbar. Das Photon ist masselos, in Übereinstimmung mit bisher unbestätigten Erwartungen. Daneben existieren in der Coulomb-Phase massive skalare und Vektorboson-Zustände. Dies sind neutrale gebundene Zustände von geladenen bosonischen Teilchen, analog zum Positronium in der QED. Im Higgs-Gebiet der Confinement-Higgs-Phase gibt es das massiv gewordene Photon und das Higgs-Boson. Ein weiterer Vektorzustand mit einer vom Photon deutlich verschiedenen Masse

ist hier nicht unterscheidbar. Diese Ergebnisse bestätigen qualitativ die durch perturbative Rechnungen gewonnenen Vorstellungen über das Spektrum der skalaren QED.

Im SU(2)-Higgs-Modell werden die Higgsmasse m_H und die Vektorbosonmasse m_W in der Nähe von 3 auf der Higgs-Phasenübergangsfläche liegenden Punkten bestimmt. Die Massen zeigen nur eine schwache Abhängigkeit von der quartischen Selbstkopplung λ und von der Eichkopplung β , variieren aber stark mit dem dritten Kopplungsparameter, dem Hopping-Parameter κ . Am Phasenübergang hat m_H ein scharfes Minimum, während m_W stark abfällt, aber oberhalb von einer halben inversen Gitterkonstanten bleibt. Das Massenverhältnis m_H/m_W wächst schon kurz oberhalb des Übergangs über 1 hinaus. Diese Erkenntnisse werden in der Zukunft zur Bestimmung der Werte der Kopplungsparameter dienen, bei denen das SU(2)-Higgs-Modell auf dem Gitter am besten die Kontinuumstheorie approximiert.

Die Higgs-Phasenübergänge zeigen auf großen symmetrischen Gittern an allen untersuchten Stellen Anzeichen für Übergänge 1. Ordnung, was einen Kontinuumslikes an diesen Stellen verhindern würde. Eine eindeutige Schlußfolgerung hierüber ist jedoch zur Zeit noch nicht möglich.

Drittes Untersuchungsgebiet ist das Verhalten des Higgs-Phasenübergangs im SU(2)-Higgs-Modell bei endlicher Temperatur. Die dazu durchgeführten Monte-Carlo-Rechnungen ergeben, daß der Higgs-Übergang bei genügend hoher Temperatur sehr schwach ist und vermutlich in ein "Crossover" übergeht. Dabei verschiebt sich seine Position etwas zu höheren Werten des Hopping-Parameters hin. Diese Verschiebung bedeutet, daß das Modell in der Higgs-Phase mit festen Kopplungskonstanten bei Erhöhung der Temperatur dieses "Crossover" durchläuft. Dies entspricht dem von Kirzhnits, Linde und Weinberg aufgrund von perturbativen Rechnungen vorhergesagten Phasenübergang, bei dem nach dem Urknall die Massen der Vektorbosonen entstanden sind. Zur Klärung der physikalischen Bedeutung der Abschwächung des Higgs-Phasenübergangs, die bei perturbativen Rechnungen nicht festgestellt wurde, sind noch weitere Untersuchungen nötig.

Detailliertere Zusammenfassungen gebe ich in den Kapiteln 2.6, 3.7 und 5.3 sowie am Ende der Abschnitte 4.2 und 4.3.

2. Die untersuchten Modelle

In diesem Kapitel werden die untersuchten Modelle eingeführt. Als Bezugspunkt für die in nichtperturbativen Gitterrechnungen erzielten Ergebnisse rekapituliere ich in Kap. 2.1 den Higgs-Mechanismus für das Standardmodell im Kontinuum und seine Probleme. Zur Vorbereitung der Gitterformulierungen gebe ich dann in Kap. 2.2 eine eichinvariante Darstellung des Higgs-Mechanismus, wodurch schon die Modifikation einiger üblicher Vorstellungen nötig wird. Die Definition der im folgenden untersuchten Gittermodelle schließt sich an. Mit Hilfe von Grenzbetrachtungen ergeben sich in Kap. 2.4 die qualitativen Phasendiagramme der Modelle. In Kap. 2.5 fasse ich von früheren Arbeiten her bekannte Eigenschaften lokaler Observabler zusammen. Neue Rechnungen auf Gittern bis zur Größe 16^4 [30,52], die unerwartete Diskontinuitäten am Higgs-PÜ zeigen, sind in Kap. 2.6 behandelt.

2.1 Zum Higgs-Mechanismus im Glashow-Salam-Weinberg-Modell

Als Grundlage, und zum Vergleich mit den späteren, darüber hinausgehenden Ergebnissen der eichinvarianten und nichtperturbativen Gitterrechnungen, rekapituliere ich hier zunächst die perturbative Formulierung des Higgs-Mechanismus. Dabei wird begründet, wieso die Higgs-Masse m_H zur Zeit nicht theoretisch voraussagbar ist. Es folgt eine kurze Beschreibung des vielzitierten Coleman-Weinberg-Mechanismus. Die experimentell fehlende Ingredienz im Standardmodell ist das Higgs-Teilchen, dessen wenige vorhergesagte Eigenschaften dann zusammengefaßt werden. Gitterrechnungen bieten die Chance, zu einer weitergehenden Beschreibung des Higgs-Teilchens zu gelangen. Schließlich werden die schon in Kap. 1 als Motivation für Gitterrechnungen angesprochenen internen Probleme des Standardmodells erläutert.

Perturbatives Szenario. Auf der Basis der Eichgruppe $SU(2) \otimes U(1)$ stellt das Glashow-Salam-Weinberg-Modell [1], für jede Generation von Quarks und Leptonen einzeln, eine vereinheitlichte Theorie von schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung dar. Die geringe Stärke der schwachen Wechsel-

wirkung wird durch die hohe Masse der Eichteilchen W und Z erklärt. Die Erzeugung dieser Massen unter Erhaltung von Eichinvarianz und Renormierbarkeit [65] der Theorie leistet der Higgs-Mechanismus, durch "spontane Symmetriebrechung" im eigens dazu eingeführten skalaren Higgs-Sektor der Theorie. Um auf den Higgs-Mechanismus näher eingehen zu können, sei hier kurz die wohlbekanntes Lagrangedichte des Standardmodells in der "ungebrochenen", manifest eichinvarianten Form wiedergegeben. (Eine vollständigere Darstellung findet man zum Beispiel in [82]).

$$L_{SM} = L_{Eich} + L_{\psi} + L_{Higgs} + L_{Yuk} \quad , \quad (2.1)$$

$$L_{Eich} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad , \quad (2.2)$$

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_{\mu} A_{\nu}^i - \partial_{\nu} A_{\mu}^i + g_2 \varepsilon^{ijk} A_{\mu}^j A_{\nu}^k \quad ,$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_{\mu} B_{\nu} - \partial_{\nu} B_{\mu} \quad ,$$

$$L_{\psi} = \sum_j \bar{\psi}_j i\gamma^{\mu} (D_{\mu} \psi_j) \quad , \quad (2.3)$$

$$L_{Yuk} = \sum_{ij} \alpha_{ij} (\bar{\psi}_{L,i} \varphi) \psi_{R,j} + \text{h.c.} \quad , \quad (2.4)$$

$$L_{Higgs} = (D_{\mu} \varphi)^{\dagger} (D^{\mu} \varphi) - V(\varphi^{\dagger} \varphi) \quad , \quad (2.5)$$

$$(D_{\mu} \varphi) = \left(\partial_{\mu} - i \frac{g_2}{2} \tau^i A_{\mu}^i - i \frac{g_1}{2} B_{\mu} \right) \varphi \quad ,$$

$$V(\varphi^{\dagger} \varphi) = m^2 \varphi^{\dagger} \varphi + \lambda_k (\varphi^{\dagger} \varphi)^2 \quad . \quad (2.6)$$

$A_{\mu} = A_{\mu}^i \tau^i$ (τ^i : Paulimatrizen) und B_{μ} sind die Eichfelder von SU(2) bzw. U(1)_Y, D_{μ} sind die (jeweiligen) kovarianten Ableitungen, ψ sind Fermion-Felder (ψ_L linkshändige SU(2)-Dubletts, ψ_R rechthändige Singletts), und φ ist das Higgs-Dublett

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_{1,2} \in \mathbb{C} \quad . \quad (2.7)$$

Die Lagrangedichte L_{SM} ist unter lokalen Eichtransformationen invariant. Für $L_{Eich} + L_{Higgs}$ sind dies die Transformationen

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &\rightarrow G_1(x) G_2(x) \varphi(x) \quad , \quad \begin{cases} G_1(x) \in U(1) \\ G_2(x) \in SU(2) \end{cases} \quad , \\
i\frac{g_2}{2} A_\mu(x) &\rightarrow G_2(x) \frac{g_2}{2} A_\mu(x) G_2^{-1}(x) - G_2 (\partial_\mu G_2^{-1}) \quad , \quad (2.8) \\
i\frac{g_1}{2} B_\mu(x) &\rightarrow i\frac{g_1}{2} B_\mu(x) - G_1 (\partial_\mu G_1^{-1}) \quad ,
\end{aligned}$$

woraus die Kovarianz der Größen

$$\begin{aligned}
D_\mu(x) &= \partial_\mu - i\frac{g_2}{2} A_\mu - i\frac{g_1}{2} B_\mu \rightarrow G_2 D_\mu(x) G_2^{-1} \quad , \\
F_{\mu\nu}(x) &= \frac{2i}{g_2} [D_\mu, D_\nu] \Big|_{g_1=0} \mathbf{1} \rightarrow G_2 F_{\mu\nu}(x) G_2^{-1} \quad , \quad (2.9) \\
B_{\mu\nu}(x) &= \frac{2i}{g_1} [D_\mu, D_\nu] \Big|_{g_2=0} \mathbf{1} \rightarrow B_{\mu\nu}(x)
\end{aligned}$$

folgt. (Für Fermionen siehe [82].) Außerdem ist L_{Higgs} zusätzlich unter der globalen Transformation (vgl. Gl.(2.38))

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2^* \\ \alpha_1 \varphi_2 - \alpha_2 \varphi_1^* \end{pmatrix} \quad , \quad |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1 \quad (2.10)$$

invariant.

Zur Diskussion des Higgsmechanismus verwendet man nun eine quasiklassische Näherung. Ich möchte die Diskussion hier für fixierte unitäre Eichung durchführen. (Eine sonst auftretende Schwierigkeit wird in Kap. 2.2 näher erläutert.) Das skalare Feld sei zunächst in der Form

$$\varphi(x) = e^{-i\vec{\xi}(x)\vec{\tau}/v} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

parametrisiert. ($\varphi_2(x) \geq 0$, reell). Dies ist eine allgemeine Darstellung. Durch Übergang in die unitäre Eichung mittels einer lokalen Eichtransformation wird daraus

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \quad . \quad (2.12)$$

Das Higgspotential $V(\varphi^\dagger\varphi)$, Gl.(2.6), hat im Falle $m^2 > 0$ ein Minimum bei $|\varphi| = 0$ und für $m^2 < 0$ ein Minimum bei $|\varphi| = v/\sqrt{2} > 0$. Die quasiklassische Näherung besteht nun darin, für den Erwartungswert $\langle\tilde{\varphi}_2\rangle$ dieses Minimum anzusetzen :

$$\langle\tilde{\varphi}_2\rangle = \begin{cases} 0 & , m^2 > 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} > 0 & , m^2 < 0 \end{cases} , \quad v^2 = \frac{-m^2}{\lambda_k} \quad (2.13)$$

Um diesen Wert herum wird $\tilde{\varphi}_2(x)$ entwickelt :

$$\tilde{\varphi}_2(x) = \langle\tilde{\varphi}_2\rangle + \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} , \quad (2.14)$$

so daß das skalare Feld in der unitären Eichung nun die folgende Gestalt hat¹⁾ :

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \quad (2.15)$$

In der unitären Eichung ist der Teilchengehalt der Theorie unmittelbar sichtbar. Durch Einsetzen von $\tilde{\varphi}(x)$ entstehen in L_{Higgs} Massenterme. Das Potential wird zu

$$V(\tilde{\varphi}) = -m^2 \cdot \eta^2 + \lambda_k v \cdot \eta^3 + \frac{\lambda_k}{4} \cdot \eta^4 \quad (2.16)$$

und im kinetischen Teil von L_{Higgs} erscheint

$$\begin{aligned} L_{\text{VM}} &= \left| \left(i\frac{g_2}{2} \tau^i \tilde{A}_\mu^i + i\frac{g_1}{2} \tilde{B}_\mu \right) \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{v^2}{8} \left\{ g_2^2 \left[(\tilde{A}_\mu^1)^2 + (\tilde{A}_\mu^2)^2 \right] + (g_2 \tilde{A}_\mu^3 - g_1 \tilde{B}_\mu)^2 \right\} \\ &=: m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu ; \end{aligned} \quad (2.17)$$

1) In der sonst üblichen Diskussion wird schon dem ungeeichten Feld φ ein Vakuumerwartungswert wie in Gl.(2.15) zugeschrieben, in Analogie zu Systemen ohne Eichsymmetrie (wie dem φ^4 -Modell). Dies führte zur Verwendung des Begriffs der "spontanen Symmetriebrechung" auch in der Eichtheorie. Siehe hierzu aber Kap. 2.2.

$$\begin{aligned}
W^\pm &:= (\tilde{A}_\mu^1 \mp i\tilde{A}_\mu^2) / \sqrt{2} \quad , \\
Z_\mu &:= \cos\theta_W \tilde{A}_\mu^3 - \sin\theta_W \tilde{B}_\mu \quad , \\
A_\mu &:= \sin\theta_W \tilde{A}_\mu^3 + \cos\theta_W \tilde{B}_\mu \quad , \quad \tan\theta_W := g_1/g_2 \quad .
\end{aligned}
\tag{2.18}$$

Damit ist auf dem quasiklassischen Niveau die Higgsmasse

$$\boxed{m_H^2 = 2|m^2| = 2v^2\lambda_k} \tag{2.19}$$

proportional der zweiten Ableitung von $V(\varphi)$ im Minimum, und die W-Masse

$$\boxed{m_W^2 = \frac{g_2^2 v^2}{4} = \frac{g_2^2}{4} \frac{|m^2|}{\lambda_k}} \tag{2.20}$$

proportional zur Position des Minimums. Es gilt also hier

$$\boxed{\frac{m_H}{m_W} = \sqrt{\frac{8\lambda_k}{g_2^2}}} \tag{2.21}$$

Durch Rotation im Raum von \tilde{A}_μ^3 und \tilde{B}_μ um den Winkel θ_W , Gl.(2.18), ergibt sich aus Gl.(2.17) auch die Z-Masse und das Photon A_μ bleibt masselos. Im Falle einer Higgs-Dublett-Struktur (und auch in einigen komplizierteren Fällen) folgt aus der Symmetrie von L_{Higgs} die Beziehung $m_W = m_Z \cdot \cos\theta_W$ [82].

Nach Einsetzen von Gl.(2.14) in L_ψ erhält man die geladenen Ströme, deren Niederenergielimes aus dem experimentell bestimmten Wert der Fermikopplung G_F dann die Größe von v festlegt :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} G_F}} \approx 250 \text{ GeV} \quad . \tag{2.22}$$

Die neutralen Ströme enthalten die elektromagnetische Wechselwirkung, wenn $g_2 = e/\sin\theta_W$ gilt. Nach experimenteller Bestimmung von $\sin\theta_W$ [3] liegen mit diesen Beziehungen die Massen von W und Z fest. Die Entdeckung dieser Teilchen bei den vorhergesagten Massen war ein großer Triumph des Standardmodells [3]. *Der Wert der skalaren Selbstkopplung λ_k im Potential (2.6) und damit auch der Wert der Higgsmasse (2.19) bleiben dagegen durch solche Konsistenzüberlegungen völlig unbestimmt. Die Higgsmasse ist ein noch unbestimmter Parameter der Theorie.*

Durch den Higgs-Mechanismus erhalten nicht nur die Eichbosonen W und Z, sondern auch die Fermionen Massen. Die Massenterme entstehen aus den $\bar{\psi}_L \phi \psi_R$ -Kopplungen in L_{Yuk} , Gl.(2.4). Sie sind nur von den à priori völlig unbestimmten Yukawa-Kopplungen α_{ij} abhängig. *Wie man sieht, haben die Fermionen auf diesem Niveau im Salam-Weinberg Modell keinen Einfluß auf den Higgs-Mechanismus. Fermionen können daher (vermutlich) ohne Nachteil bei den Gitteruntersuchungen weggelassen werden.*

Coleman-Weinberg-Mechanismus. In einer vielzitierten Veröffentlichung [80] zeigten S. Coleman und E. Weinberg, daß auch im Spezialfall $m^2 = 0$ der Higgs-Mechanismus auftritt, wenn die Quantenfluktuationen des Eichfeldes zumindest perturbativ berücksichtigt werden. Sie berechneten das effektive Potential des skalaren Feldes in 1-Schleifen-Näherung der Eichfelder für kleine Eichkopplungen g und für kleines λ_k .

Ich möchte hier gleich den Fall mit beliebigem m^2 behandeln. Das effektive Potential (in unitärer Eichung) ist dann [83] im U(1)-Higgs-Fall :

$$V_{eff}(\phi) = \lambda_k \phi^4 + m^2 \phi^2 + \frac{3g^4}{16\pi^2} \phi^4 \left(-\frac{1}{2} + \ln \frac{2g^2 \phi^2}{\mu^2} \right) , \quad (2.23)$$

wobei λ_k die am Renormierungspunkt μ bestimmte laufende Kopplungskonstante ist. Differenzieren und Nullsetzen ergibt ein von Null verschiedenes Minimum von V_{eff} , wenn $\langle \phi \rangle$ die Beziehung

$$\langle \phi \rangle_{min}^2 \left(1 + \frac{3g^4}{16\pi^2 \lambda_k} \ln \frac{2g^2 \langle \phi \rangle_{min}^2}{\mu^2} \right) = \frac{-m^2}{2\lambda_k} \quad (2.24)$$

erfüllt. Das Minimum $V_{eff}(\langle \phi \rangle_{min})$ liegt niedriger als $V_{eff}(0) = 0$, wenn

$$m^2 < \frac{3g^4}{16\pi^2} \langle \phi \rangle_{min}^2 \quad (2.25)$$

gilt. Durch Einsetzen in Gl.(2.24) sieht man, daß das absolute Minimum des effektiven Potentials bei

$$m_{PT}^2 = \frac{3g^4}{16\pi^2} \langle \phi \rangle_{PT}^2 = \mu^2 \cdot \frac{3g^2}{32\pi^2} \exp\left(-\frac{1}{2} - \frac{16\pi^2}{3} \frac{\lambda_k}{g^4}\right) > 0 \quad (2.26)$$

von $V_{eff}(\langle \phi \rangle_{min} > 0)$ zu $V_{eff}(0)$ springt. Die Berücksichtigung der Eich-

kopplung $g^2 \ll 1$ in 1-Schleifen-Näherung ergibt also einen Phasenübergang 1. Ordnung. Der Sprung in $\langle \tilde{\phi} \rangle$ verschwindet mit $g^2 \rightarrow 0$ allerdings exponentiell schnell. Der Übergangspunkt ist hier gegenüber $m_{\tilde{\tau}}^2 = 0$ bei $g^2 = 0$ leicht zu positiven m^2 hin verschoben, so daß, wie erwähnt, für $g^2 > 0$ auch bei $m^2 = 0$ noch der Higgs-Mechanismus auftritt. (Bei $m^2 = 0$ kann Gl.(2.24) auch dazu benutzt werden, den (beliebigen) Renormierungspunkt μ^2 durch einen ebenso frei wählbaren Wert von $\langle \tilde{\phi} \rangle^2$ zu ersetzen [83]. Gleichzeitig entfällt dann durch die Beziehung (2.24) die Kopplung λ_k aus dem effektiven Potential. (Sogenannte "dimensionale Transmutation" [80]))

Eine Übertragung der hier im Kontinuumsformalismus wiedergegebenen Resultate auf das Gitter wurde von Espriu und Wheeler durchgeführt [23]. Dabei wurde vor allem deutlich, daß eine in MC-Resultaten sichtbare erste Ordnung des Higgs-Püs durch das effektive Potential nur bei sehr kleinen λ richtig vorausgesagt werden konnte.

Fehlende experimentelle Evidenz für ein Higgs-Teilchen. Über den skalaren Sektor des Standardmodells ist experimentell fast nichts bekannt. Eine allgemeine Information kommt von dem Wert $m_W/(m_Z \cdot \cos\theta_W) \approx 1$ [3], der eine Higgs-Dublett-Struktur nahelegt (s.o.). Das Higgs-Teilchen selbst ist unentdeckt, seine Masse ein noch unbestimmter Parameter der Theorie.

Aus kernphysikalischen Daten folgt [3], aufgrund des Fehlens relativ langreichweitiger Kräfte, eine nur sehr niedrige untere Schranke von

$$m_H > 15 \text{ MeV} \quad (2.27)$$

und mit etwas größerer theoretischer Unsicherheit folgt [3] aus dem Fehlen von Zerfällen $K^+ \rightarrow \pi^+ + \phi^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^+ \mu^-$ (oder $e^+ e^-$) die Schranke

$$m_H > 325 \text{ MeV} \quad (2.28)$$

In Abhängigkeit von der Masse des Higgs-Teilchens, als unbestimmtem Parameter, können über seine Eigenschaften aber doch einige theoretische Aussagen gemacht werden [82]. Die Yukawa-Kopplung (2.4) des ϕ -Feldes bewirkt, daß das Higgs-Teilchen $\phi_0(x) = v + \eta(x)$ an Fermionen proportional zu deren Masse koppelt. Auch einige der Kopplungen an die Eichfelder sind proportional zu deren Massen.

Die erfolgversprechendsten Kanäle zur *Produktion* von Higgs-Teilchen beinhalten daher schwere Fermionen oder Eichbosonen. Mit einigen Prozent Verzweigungsverhältnis könnte z.B. der Zerfall einer schweren Quarkoniumresonanz $V_{q\bar{q}} \rightarrow \phi_0 + \gamma$ auftreten, die analogen Prozesse $Z \rightarrow \phi_0 + \gamma$ oder $Z \rightarrow \phi_0 + e^+ + e^-$ dagegen auch für ein leichtes Higgs-Teilchen nur mit etwa 10^{-4} Prozent. Im Prozess $e^+e^- \rightarrow Z^0 + \phi^0$ könnten auch schwere Higgs-Teilchen produziert werden, aber wieder mit recht geringem Wirkungsquerschnitt.

Angesichts der sehr niedrigen Wirkungsquerschnitte für Higgs-Produktion (und schwieriger Signaturen für ihre Identifizierung), *überrascht es kaum -auch wenn ein relativ leichtes Higgs-Teilchen existieren sollte-, daß bis jetzt keine experimentelle Evidenz für ein solches Teilchen gefunden werden konnte.*

Störungstheoretische Einschränkungen für die Masse des Higgs-Teilchens.

Der Parameter λ_k im Potential $V(\phi^\dagger\phi)$ und dadurch auch die Higgsmasse Gl.(2.19) sind unbestimmt. Perturbativ bleiben nur Konsistenzüberlegungen, um Grenzen für m_H zu finden. Eine von Linde und Weinberg [66] gefundene untere Schranke für m_H ergibt sich aus der Forderung, daß auch mit 1-Schleifen-Korrekturen das Minimum des Higgs-Potentials bei $|\phi| = v/\sqrt{2}$ tiefer liegt als bei $V(0)$, daß also "spontane Symmetriebrechung" erhalten bleibt. Im Standardmodell erhält man (durch Berechnen der zweiten Ableitung des effektiven Potentials an einer der Gl.(2.26) entsprechenden Stelle) die Grenze

$$m_H \gtrsim 8 \text{ GeV} \quad . \quad (2.29)$$

(Bei Auftreten sehr schwerer Fermionen ($O(m_W)$) wird diese Grenze modifiziert.)

Eine obere (nur perturbativ relevante) Grenze für m_H kommt aus der Forderung, daß 2-Schleifen-Beiträge kleiner sein sollen als 1-Schleifen-Beiträge [62,67] :

$$m_H \lesssim 1 \text{ TeV} \quad . \quad (2.30)$$

Auch wird die Partialwellen-Unitarität der S-Matrix in 2-Teilchen-

Streuprozessen von Eichbosonen auf dem Baumgraphenniveau bei $m_H \approx 1$ TeV verletzt [68]. Diese Schwierigkeiten rühren daher, daß nach Gl.(2.19) die Higgsmasse und $\sqrt{\lambda_k}$ perturbativ einander proportional sind, so daß im Higgs-Sektor bei großem m_H starke Wechselwirkung herrscht (Für Überblicke hierzu siehe [69].) Bei großem m_H (großem λ_k) versagt also die Störungstheorie. Dies bedeutet natürlich nicht, daß die Theorie selbst inkonsistent würde.

Weitere Grenzen für m_H ergeben sich aus der im Anschluß behandelten möglichen Trivialität der φ^4 -Theorie.

Im Limes $\lambda_k \rightarrow \infty$ geht der SU(2)-Sektor des Standardmodells in ein geeichtes SU(2)⊗SU(2) (\approx O(4)) nichtlineares Sigma-Modell über. Perturbative Überlegungen ergeben dann [84], daß experimentell überprüfbare Größen, wie vor allem die Massen von W und Z, kaum von m_H abhängen, also nur wenig Aufschluß über die Higgsmasse geben können. Ähnliche Resultate folgen aus einer 1/N-Entwicklung in SU(N)⊗U(1) [85]. Eine andere Möglichkeit der Untersuchung bei $\lambda = \infty$ ist eine 1/N Entwicklung in der Näherung O(N) für O(4) [85]. Dies führt nicht mehr auf beliebig schwere Higgs-Teilchen, sondern zu einer (einzelnen) sehr breiten *Resonanz* im Gebiet mehrerer hundert GeV.

Die doch recht unterschiedlichen Ergebnisse der angesprochenen Rechnungen und vor allem ihre Beschränkung auf Energieskalen unterhalb von etwa 1 TeV zeigen deutlich die Notwendigkeit nichtperturbativer Untersuchungen des Standardmodells und vor allem des Higgs-Mechanismus, wie sie durch Gitterrechnungen möglich sind.

Problem der möglichen Trivialität der Higgs-Modelle. Ohne Ankopplung von Eichfeldern bildet der SU(2)-Teil der Lagrangedichte L_{Higgs} , Gl.(2.5), ein 4-komponentiges φ^4 -Modell, das nicht asymptotisch frei ist. In der störungstheoretischen Beziehung für die effektive Kopplung tritt bei hohen Energien eine Singularität, der Landau-Pol, auf. Das einkomponentige¹⁾ φ^4 -Modell ist analytisch wie numerisch intensiv untersucht worden. In $d > 4$ Dimensionen konnte analytisch gezeigt werden, daß im Kontinuum nur die Theorie mit $\lambda_k = 0$ konsistent ist, d.h. die triviale Theorie [70]. In $d=4$ Dimensionen gibt

1) Man nimmt an, daß die Frage der Trivialität nicht von der Anzahl der Komponenten des φ -Feldes abhängt.

es sehr starke analytische [70,71] und numerische [72] Hinweise für die Trivialität. Im Fall $d < 4$ bleibt die ϕ^4 -Theorie auch im Kontinuum nicht-trivial. Die ϕ^4 -Gittertheorie ist immer nicht-trivial, weil der Abschneideparameter dort endlich ist.

Einerseits muß man also befürchten, daß auch nach Einführung von Eichwechselwirkungen zumindest der skalare Sektor des Standardmodells trivial bleibt und kein Higgs-Mechanismus in der Kontinuumstheorie stattfindet [59-63], und daß dies auch durch Hinzunahme von Fermionen und Vergrößerung der Eichgruppe nicht behoben wird. Andererseits kann man hoffen, daß auch die renormierte volle Theorie, wenn sie nicht-trivial sein sollte, genau eine freie Kopplungskonstante weniger enthält als die nackte Theorie [49], wodurch z.B. die Higgsmasse festgelegt und vorhersagbar sein könnte.

Es ist aber auch denkbar und physikalisch durchaus sinnvoll, daß das Standardmodell (nur) eine effektive Theorie mit endlichem Abschneideparameter ist, die bei unendlichem Abschneideparameter trivial würde. Bei Energien oberhalb des Abschneideparameters müßten dann neue physikalische Phänomene auftreten (die auch aus anderen Gründen bei sehr großen Energien zu erwarten sind).

Man kann nun versuchen, wie es unter anderem von Dasher und Neuberger [60] vorgeschlagen worden ist, unter Annahme der Existenz eines solchen endlichen Abschneideparameters Λ eine obere Grenze für die Higgsmasse herzuleiten [59-63]. Eine systematische störungstheoretische Behandlung hierzu gibt vor allem Lindner [61,62]. Je größer die Higgsmasse, und damit λ_k in Gl.(2.19), ist, desto niedriger liegt die Energie, bei der der Landau-Pol auftritt. Aus der Forderung, daß dieser Pol oberhalb der Abschneideskala Λ liegen soll (und ähnlichen Forderungen in den in [63] aufgeführten Arbeiten) folgen also obere Schranken für die Higgsmasse. Bei sinkendem λ wachsen sie an. In 1-Schleifen-Näherung ergeben sich z.B. die Schranken [61]

$$m_H \lesssim O(150 \text{ GeV}) \quad \text{bei } \Lambda = 10^{19} \text{ GeV}, \quad (2.31)$$

bis hin zu

$$m_H \lesssim O(1 \text{ TeV}) \quad \text{bei } \Lambda = 1 \text{ TeV} \quad . \quad (2.32)$$

Eine Higgs-Masse oberhalb von 1 TeV kann im Rahmen dieser Überlegungen nicht mehr sinnvoll behandelt werden.

Wenn ein Higgs-Teilchen im Experiment gefunden wird, kann man aus solchen Schranken umgekehrt auch auf eine Energieskala Λ schließen, bis zu der neue physikalische Phänomene spätestens zu erwarten sind [59-61]. Ich werde auf solche Überlegungen noch einmal am Ende von Kapitel 4 im Zusammenhang mit dem Kontinuumslimit des SU(2)-Higgs-Modells zu sprechen kommen. Auch für die Lösung dieser mit der möglichen Trivialität zusammenhängenden Fragen ist die Notwendigkeit nichtperturbativer Untersuchungen evident.

Weitere Probleme des skalaren Sektors im Standardmodell. Zusätzlich zu der möglichen Trivialität und fehlender experimenteller Evidenz weist der skalare Sektor des Standardmodells weitere unbefriedigende Züge auf. Eine dieser Schwierigkeiten, das Hierarchieproblem, tritt bei dem Versuch auf, die elektroschwache und die starke Wechselwirkung zu vereinheitlichen. Die natürliche Skala für eine solche Theorie liegt bei etwa 10^{15} GeV, so daß zwei "Symmetriebrechungen" bei stark verschiedenen Skalen, nämlich 10^2 und 10^{15} GeV nötig sind. Wenn die Symmetriebrechungen durch den Higgs-Mechanismus erzeugt werden, so erhält man bei Renormierung für die untere Skala eine Korrektur in der Größenordnung der oberen Skala. Man müßte also -unbefriedigenderweise- bei jedem Renormierungsgruppenschritt durch Feineinstellung der nackten Parameter die gewünschten Skalen fixieren.

Unbefriedigend ist auch die Tatsache, daß die Yukawa-Kopplungen der Higgs-Teilchen völlig willkürlich sind und die Fermionmassen in keiner Weise erklären.

Wegen der genannten Probleme gibt es Bedenken, die völlig ad hoc nur zum Zwecke des Higgs-Mechanismus eingeführten skalaren Felder des Standardmodells als elementar anzusehen. Daher sind Versuche unternommen worden, die Higgsfelder als zusammengesetzte Operatoren von elementaren Fermionen zu beschreiben [86]. Dieser Ansatz wäre nichts völlig Neues: schon die Landau-Ginzburg-Theorie der Supraleitung, die Modell für den Higgs-Mechanismus war und eine zum bosonischen Teil der Lagrangedichte des

Standardmodells sehr ähnliche Energiedichte besitzt [87], wird mikroskopisch durch die BCS-Theorie erklärt, in welcher spontane Symmetriebrechung durch ein Kondensat von skalaren Cooperpaaren auftritt, also durch Bindungszustände fermionischer Elektronen.

2.2 Eichinvariante Darstellung der Higgs-Modelle

In der üblichen Formulierung des Higgs-Mechanismus im Salam-Weinberg-Modell wird für das (nicht eichinvariante) Higgsfeld der Erwartungswert $\langle \varphi_2 \rangle = v/\sqrt{2} > 0$ postuliert und um diesen Wert herum entwickelt. Führt man dagegen die Theorie über den Pfadintegralformalismus (ohne Eichfixierung) ein (vgl. Kap. 2.3), so sind nur eichinvariante Erwartungswerte von Null verschieden ("Elitzur-Theorem"), und es gilt $\langle \varphi \rangle = 0$ [17]. Zur Überwindung dieses scheinbaren Gegensatzes trugen eine Reihe von Arbeiten [40,16,74-76] bei, deren zeitlich erste von G. Mack stammt [74]. Die folgende Darstellung stützt sich (zum Teil) auf die Arbeiten von Fröhlich, Morchio und Strocchi [40] sowie Dimopoulos, Raby und Susskind [75]. In den zitierten Arbeiten wird aufgezeigt, daß alle physikalischen Größen im Standardmodell als SU(2)-Singletts, also eichinvariant geschrieben werden können. *Die eichinvariante Darstellung geht bei unitärer Eichung dann in die übliche Formulierung über¹⁾*. (Dies ist analog dazu, daß die Masse eines Teilchens in einem bestimmten Bezugssystem gleich seiner Energie ist [74].)

Im eichinvarianten Pfadintegralformalismus beinhaltet das Elitzur-Theorem [17] die Aussage, daß auf dem Gitter der Erwartungswert aller lokal nicht eichinvarianten Größen verschwindet; d.h. lokale Eichsymmetrien werden nicht "spontan" gebrochen.

In einer Kontinuumstheorie ist auch zur Berechnung eichinvarianter Funktionen stets die Fixierung einer Eichung nötig. Formal näher an der Störungstheorie bleibend, fixieren Fröhlich, Morchio und Strocchi daher im

1) Gl.(2.15) bleibt also gültig: in der unitären Eichung gilt $\langle \varphi_2 \rangle > 0$ bei $m^2 < 0$.

Pfadintegral auf dem Gitter die Eichung. Sie zeigen in Eichtheorien mit skalaren Materiefeldern, daß *mit der von ihnen fixierten Eichung*, die u.a. die temporäre Eichung umfaßt, globale Eichsymmetrien ungebrochen bleiben. Hieraus folgt $\langle \varphi \rangle = 0$. Der Grenzwert von $\langle \varphi \rangle$ für verschwindende Eichkopplung, nämlich Null, ist daher nicht gleich dem Erwartungswert im Modell bei $g \equiv 0$, dem spontan gebrochenen φ^4 -Modell, vielmehr führt der Grenzübergang auf eine gemischte Phase des φ^4 -Modells (mit Anteilen von Symmetriebrechungen in beiden Richtungen). Die übliche Störungstheorie um $\langle \varphi \rangle = v/\sqrt{2}$ herum ist deswegen eigentlich nicht gerechtfertigt [40]. Ihr dennoch gegebener großer Erfolg wird durch die Möglichkeit der erwähnten eichinvarianten Darstellung verstehbar. Fröhlich, Morchio und Strocchi zeigen, daß eine eichinvariante Darstellung aller physikalischen Größen in den Higgs-Modellen immer möglich ist. (Zur Frage des Verschwindens von $\langle \varphi \rangle$ siehe auch den Übersichtsartikel von Borgs und Nill [42].)

Zur Anwendung dieser Ergebnisse auf das Standardmodell sei im folgenden nur die SU(2)-Eichgruppe betrachtet, der U(1)-Anteil also "abgeschaltet". (Im U(1)-Higgs-Fall erhält man analoge Ausdrücke). Für skalare Teilchen in der fundamentalen Darstellung der SU(2) kann man das Dublett $\varphi(x)$ auch über eine SU(2)-Matrix σ_x und einen radialen Teil ρ_x darstellen :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} =: \Phi(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \rho_x \sigma_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \\ & \hspace{25em} (2.33) \\ \Phi(x) &= \begin{pmatrix} \varphi_2^* & \varphi_1 \\ -\varphi_1^* & \varphi_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} \sigma_2^* & \sigma_1 \\ -\sigma_1^* & \sigma_2 \end{pmatrix} \in \text{SU}(2) \quad , \\ & \hspace{15em} \rho_x = |\varphi(x)| = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{1/2} \in \mathbb{R}^+ \quad , \end{aligned}$$

und für zwei beliebige SU(2)-Dubletts $\varphi_{(1)}$ und $\varphi_{(2)}$ gilt :

$$\text{Re } \varphi_{(1)}^+ \varphi_{(2)} = \frac{1}{2} \text{tr } \Phi_{(1)}^+ \Phi_{(2)} \quad . \quad (2.34)$$

Der eichinvariante Ersatz für die Eichfelder $D_\mu(x)$ ist nun :

$$D'_\mu(x) := \sigma_x^+ D_\mu(x) \sigma_x \quad . \quad (2.35)$$

Die entsprechende Beziehung in Gitterschreibweise (s. Kap. 2.3) lautet

$$U'_x := \sigma_x^+ U_{x\mu} \sigma_x \quad . \quad (2.36)$$

Die Wirkung (2.1) enthält mit diesen Transformationen im skalaren Sektor $L_{\text{Eich}} + L_{\text{Higgs}}$ nur noch eichinvariante Felder, nämlich ρ_x und $D'_\mu(x)$. In der unitären Eichung, Gl.(2.12), gehen die üblichen eichvarianten Felder in die eichinvarianten Felder über :

$$\tilde{\phi}_2(x) = \rho_x \quad , \quad \tilde{\sigma}_x \equiv 1 \quad , \quad \tilde{D}_\mu(x) = D'_\mu(x) \quad . \quad (2.37)$$

Die globalen Transformationen (2.10) erhalten jetzt eine ganz einfache Form :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\rightarrow \Phi(x) \cdot G \quad , \quad G \in \text{SU}(2) \quad , \\ D'_\mu(x) &\rightarrow D'_\mu(x) \quad \text{bzw.} \\ U_{x\mu} &\rightarrow U_{x\mu} \quad . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nunmehr könne für die in der unitären Eichung sichtbaren physikalischen Teilchen des Standardmodells eichinvariante Darstellungen angegeben werden :

Teilchen	unitär	eichinvariant	Gitterdarstellung
Higgs	$\tilde{\phi}_2(x)$	$\frac{\varphi^\dagger}{ \varphi } \varphi$	ρ_x
Elektron	$\tilde{\psi}_2(x)$	$\frac{\varphi^\dagger}{ \varphi } \psi$	-
Neutrino	$\tilde{\psi}_1(x)$	$i \frac{\varphi^\dagger}{ \varphi } \tau_2 \psi$	-
W^0	\tilde{A}_μ^3	$\frac{i}{g} \frac{\varphi^\dagger}{ \varphi } \vec{D}_\mu \frac{\varphi}{ \varphi }$	$\frac{i}{ag} \text{tr} \left(\sigma_x^\dagger U_{x\mu} \sigma_{x+\mu} \frac{1 - \tau_3}{2} \right)$
W^+	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{A}_\mu^1 - i \tilde{A}_\mu^2)$	$\frac{-i}{g\sqrt{2}} \frac{\varphi^\dagger}{ \varphi } \vec{D}_\mu \tau_2 \frac{\varphi}{ \varphi }$	$\frac{-1}{ag\sqrt{2}} \text{tr} \left(\sigma_x^\dagger U_{x\mu} \sigma_{x+\mu} \frac{\tau_1 - i\tau_2}{2} \right)$
W^-	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{A}_\mu^1 + i \tilde{A}_\mu^2)$	$\frac{-i}{g\sqrt{2}} \frac{\varphi^\dagger}{ \varphi } \tau_2 \vec{D}_\mu \frac{\varphi^*}{ \varphi }$	$\frac{-1}{ag\sqrt{2}} \text{tr} \left(\sigma_x^\dagger U_{x\mu} \sigma_{x+\mu} \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} \right)$

Tabelle 2.1: Teilchen und zugehörige Felder im SU(2)-Teil des Standardmodells, in unitärer Eichung und in eichinvarianter Darstellung. In der rechten Spalte werden Gittergrößen verwendet (s. Kap. 2.3).

Der Vollständigkeit halber sind in Tabelle 2.1 auch schon die unter Verwendung von Gl.(2.33) (und von $A^* = \tau_2 A \tau_2$, $A \in \text{SU}(2)$) bestimmten Gitterausdrücke angegeben. Sie werden in Kapitel 4 näher untersucht. Auf die Behandlung fermionischer Ausdrücke auf dem Gitter wird hier verzichtet, da sie im folgenden nicht gebraucht werden. Darstellungsansätze für die volle $\text{SU}(2) \otimes \text{U}(1)$ -Gruppe und für Yukawakopplungen werden in [40] angesprochen.

Die übliche Formulierung der Theorie erhält man jetzt durch Entwickeln um $\langle \phi_2 \rangle = v/\sqrt{2}$. Die Störungsentwicklung eichinvarianter Greensfunktionen stimmt *der Form nach* mit der üblichen Störungsrechnung überein [40], zwischen den Greensfunktionen in den beiden Darstellungen bestehen Beziehungen. Weil aber der Grenzübergang $g \rightarrow 0$ auf eine gemischte Phase des ϕ^4 -Modells führt (s.o.), kann die übliche Störungsentwicklung nicht asymptotisch sein [40]. Allgemein gilt [40], daß das Auftreten des Higgs-Mechanismus nicht mit dem Sprung eines lokalen Ordnungsparameters verbunden ist¹⁾, sondern mit der Existenz eines nichttrivialen Eichorbits (Eichbahn), der das Higgspotential minimiert.

Die eichinvariante Darstellung in Tabelle 2.1 entspricht einer Confinement-Schreibweise, wie etwa bei Hadronen in der QCD. Dimopoulos, Raby und Susskind [75] sprechen hier, im Zusammenhang mit der analytischen Verbindung von Confinement- und Higgs-Gebiet (s.u.), von der "Komplementarität" des Higgs- und des Confinement-Bildes.

Die physikalisch beobachtbaren Teilchen im Standardmodell in seiner eichinvarianten Formulierung werden also durch zusammengesetzte Felder dargestellt, anders als in der üblichen unitären Schreibweise. Diese Beschreibung ist analog zu derjenigen der Mesonen in der QCD. Ein W-Boson erscheint dabei formal nicht elementarer als ein ρ -Meson. Das ϕ -Feld hat die Rolle eines skalaren Quarks. In Analogie zur QCD kann man daher, zumindest im Confinement-Gebiet des Modells, auf die Existenz angeregter Zustände mit nicht allzu hohen Energien schließen. Da Confinement- und Higgs-Gebiet analytisch verbunden sind, kann man auch in letzterem die Existenz angeregter Zustände annehmen. Allerdings könnten sie zu sehr hohen Energien hin

¹⁾ Zum Beispiel gilt in der unitären Eichung (bei Berücksichtigung von Quantenfluktuationen) $\langle \phi_2 \rangle > 0$ auch bei $m^2 > 0$.

verschoben sein. Angeregte W-Bosonen sind also nicht unbedingt eine Spezialität von z.B. Technicolor-Theorien oder "Composite Models" und auch kein zwingender Hinweis auf eine solche Theorie.

Abbott-Farhi-Modell. Die Möglichkeit der eichinvarianten Darstellung und die "Komplementarität" von Confinement- und Higgs-Bildern nutzen Abbott und Farhi [76] für eine andere Interpretation des Standardmodells. Sie nehmen in der Lagrangedichte (2.1) des Standardmodells *keine* Symmetriebrechung, aber starke Kopplungen an. Um auch dann Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen zu erreichen (in teilweise perturbativer Betrachtungsweise), werden allerdings eine Reihe von Annahmen gemacht. Sind diese Annahmen erfüllt, so kann jedoch auch die stark wechselwirkende Version des Standardmodells, mit nichtperturbativ erzeugten *effektiven* Kopplungen, die bisherigen experimentellen Befunde erfolgreich beschreiben. Darüber hinaus sagt sie natürlich eine Fülle von angeregten Zuständen und modifizierten Kopplungen im 1 TeV-Bereich voraus. Um Genaueres über diese Version des Standardmodells zu erfahren, wäre eine nichtperturbative Behandlung erforderlich.

2.3 Die untersuchten Gittermodelle

Das Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung fußt auf der Eichgruppe $SU(2) \otimes U(1)$ und enthält Eichfelder, skalare und fermionische Felder. Die Simulation des vollständigen Modells auf dem Gitter ist (insbesondere wegen der Fermionen) derzeit technisch nicht möglich. Da Fermionen aber nicht zum Higgs-Mechanismus beizutragen scheinen (s. Kap. 2.1), können sie bei seiner Untersuchung vernachlässigt werden. Der Higgs-Mechanismus spielt sich im wesentlichen im $SU(2)$ -Sektor des Standardmodells ab. Um die Untersuchungen in einem behandelbaren Rahmen zu halten, werden in dieser Arbeit als Baustein des Standardmodells das $SU(2)$ -Higgs-Modell und als analoges System mit $U(1)$ -Symmetrie das

U(1)-Higgs-Modell¹⁾ untersucht. Sie sind sich formal recht ähnlich; insbesondere tritt in beiden ein Higgs-PÜ auf. Im U(1)-Higgs-Modell trennt der Higgs-PÜ die Coulomb-Phase und das Higgs-Gebiet der Confinement-Higgs-Phase voneinander (s.u.). Dort besteht deshalb die Möglichkeit, die Erzeugung von Vektorboson-Massen auf nichtperturbative Weise zu untersuchen. Die beiden Modelle werden hier zusammen eingeführt.

Die Gitterformulierung von Eichtheorien wird in dieser Arbeit als bekannt vorausgesetzt. Einführende Beschreibungen findet man z.B. in [7]. Die Modelle werden auf einem euklidischen Raum-Zeit Gitter mit Hilfe der Pfadintegraldarstellung [5] definiert. Die zur Zustandsumme

$$Z = \int D\Phi DU e^{-S} \quad (2.39)$$

$$D\Phi := \prod_n d\phi_n \quad , \quad DU := \prod_{n,\mu} dU_{n\mu}$$

gehörende Wirkung S ist

$$S = -\beta \sum_{p \in \Lambda} \frac{1}{r} \operatorname{Re} \operatorname{tr} U_p$$

$$- \kappa \sum_{\substack{n \in \Lambda \\ \mu=1..4}} \frac{2}{r} \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\phi_n^\dagger U_{n\mu} \phi_{n+\mu}) \quad (2.40)$$

$$+ \lambda \sum_{n \in \Lambda} \frac{1}{r} \operatorname{tr}(\phi_n^\dagger \phi_n - 1)^2 + \sum_{n \in \Lambda} \frac{1}{r} \operatorname{tr}(\phi_n^\dagger \phi_n) \quad .$$

Dabei sind ϕ_n die auf den Gitterpunkten n lebenden skalaren Felder, inklusive radialem Teil ρ_n (siehe Gleichung (2.33)), in der fundamentalen Darstellung der Eichgruppe, $U_{n\mu}$ die Eichfelder auf den Gitterkanten (n,μ) und U_p die hieraus gebildeten Plaketten, sowie

$$\phi_n := \rho_n \cdot \sigma_n \quad ; \quad \rho_n \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad (2.41)$$

$$\sigma_n , U_{n\mu} \in G = \begin{cases} U(1) \\ SU(2) \end{cases} \quad ; \quad r := \dim G = \begin{cases} 1, U(1) \\ 2, SU(2) \end{cases} .$$

Die Konstante r ist die Dimension der Higgs-Darstellung der Eichgruppe. (Die Spurbildung in der Wirkung S ist im 1-dimensionalen U(1)-Fall natürlich

1) Der Grenzfall $g_2 \rightarrow 0$ des $SU(2) \otimes U(1)$ -Modells hat zusätzlich zur lokalen U(1)-Symmetrie noch eine globale SU(2)-Symmetrie [18].

trivial. Im $SU(2)$ -Fall sind die Spuren immer reell.) Das Integrationsmaß enthält das Haarsche Maß $d\mu(U)$ der Eichgruppe :

$$\begin{aligned}
 dU_{n\nu} &:= d\mu(U_{n\nu}) & , \\
 d\Phi_n &:= \begin{cases} \rho_n d\sigma_n & , U(1) \\ \rho_n^3 \cdot d\sigma_n & , SU(2) \end{cases} & , \\
 d\sigma_n &:= d\mu(\sigma_n) & .
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Es wurde hier die schon in Gl.(2.33) eingeführte Schreibweise der $SU(2)$ -Higgsfelder als 2×2 -Matrizen gewählt, die eine bequeme Darstellung aller physikalischen Größen erlaubt.

Trennt man den radialen Teil ρ_n von Φ_n ab, so enthält die Wirkung nur noch die unabhängigen eichinvarianten Terme ρ_n und $U'_{n\mu} = \sigma_n^\dagger U_{n\mu} \sigma_{n+\mu}$ ($\Rightarrow U'_p = U_p$) (s. Gl.(2.36)) :

$$\begin{aligned}
 S &= -\beta \sum_{p \in \Lambda} \frac{1}{r} \operatorname{Re} \operatorname{tr} U_p \\
 &\quad - \kappa \sum_{\substack{n \in \Lambda \\ \mu=1..4}} \rho_n \rho_{n+\mu} \frac{2}{r} \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\sigma_n^\dagger U_{n\mu} \sigma_{n+\mu}) \\
 &\quad + \lambda \sum_{n \in \Lambda} (\rho_n \rho_n - 1)^2 + \sum_{n \in \Lambda} \rho_n \rho_n .
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Die Wirkung besitzt die drei freien Kopplungskonstanten β , κ und λ . Den ersten Summanden bildet die Wilson-Wirkung der reinen Eichtheorie, der zweite ist der "Hopping"-Term, welcher Eichfelder und skalare Felder koppelt. Die beiden letzten Summanden schließlich bewirken Selbstwechselwirkung der skalaren Felder. Die Wirkung ist invariant unter lokalen Eichtransformationen

$$\Phi_n \rightarrow G_n \Phi_n \quad , \quad U_{n\mu} \rightarrow G_n^\dagger U_{n\mu} G_n \quad , \quad G_n \in \begin{cases} U(1) \\ SU(2) \end{cases} \tag{2.44}$$

sowie zusätzlich unter den globalen Transformationen

$$\Phi_n \rightarrow \Phi_n \cdot V \quad , \quad U_{n\mu} \rightarrow U_{n\mu} \quad , \quad V \in \begin{cases} U(1) \\ SU(2) \end{cases} . \tag{2.45}$$

Die Wirkung ist auch unter der Transformation $\kappa \rightarrow -\kappa$, sowie für $\kappa = 0$ unter $\beta \rightarrow -\beta$ invariant [26].

Die im Standardmodell verwendete Kontinuumsform der Wirkung ergibt sich aus Gl.(2.43) im sogenannten naiven Kontinuumslimit, dem formalen Übergang $a \rightarrow 0$, nach Umparametrisierung in die im folgenden bei Verwechslungsgefahr mit "k" gekennzeichneten Kontinuumsgrößen

$$\begin{aligned}
 U_{n\mu} &= e^{-igqaA_\mu(x)} \quad , \quad q = \begin{cases} 1 & , \text{U(1)} \\ 1/2 & , \text{SU(2)} \end{cases} \quad , \\
 \Phi^k(x) &= \frac{\sqrt{\kappa}}{a} \Phi_n \quad , \\
 m_k^2 &= \frac{1-2\lambda-8\kappa}{\kappa \cdot a^2} \quad , \quad \lambda_k = \frac{\lambda}{\kappa^2} \quad , \quad \beta = \frac{1}{g^2 q^2} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

in der Form

$$\begin{aligned}
 S_k &= \int d^4x \quad \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \varphi^k(x))^\dagger \cdot (D_\mu \varphi^k(x)) \\
 &\quad + m^2 \cdot |\varphi^k|^2 + \lambda_k \cdot |\varphi^k|^4 \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

mit $D_\mu := \partial_\mu - igqaA_\mu(x)$, $\varphi^k = \Phi^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\varphi^k = \Phi^k$ (U(1)).

Diese Wirkung entspricht dem SU(2)- bzw. U(1)-Anteil der euklidischen Form von $L_{\text{Eich}} + L_{\text{Higgs}}$, Gl.(2.2) und (2.5), in Kapitel 2.1 (mit $g = g_2$, bzw. $g = g_1/2$, $\varphi \in \mathbb{C}$).

Der Higgs-PÜ tritt quasiklassisch bei $m^2 = 0$ auf. Mit Gl.(2.46) entspricht dies $\kappa = (1-2\lambda)/8$, also $\kappa = 1/8$ bei $\lambda = 0$. (Die Monte-Carlo-Ergebnisse bei großem λ weichen hiervon erheblich ab.) Variation von κ zwischen 0 und ∞ deckt, bei konstantem λ_k , in m^2 den Bereich von ∞ bis $-\infty$ ab.

Um den Vergleich mit später vorgestellten MC-Resultaten zu erleichtern, möchte ich hier noch die quasiklassischen Ergebnisse Gl.(2.13) und (2.19)-(2.21) auf Gittergrößen umgerechnet aufführen :

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_n^\dagger \varphi_n \rangle &\equiv \langle \rho_n^2 \rangle = \frac{8\kappa+2\lambda-1}{2\lambda} \quad , \\
 a^2 m_H^2 &= \frac{4\lambda}{\kappa} \langle \varphi_n^\dagger \varphi_n \rangle \quad , \quad a^2 m_W^2 = \frac{2\kappa}{\beta} \langle \varphi_n^\dagger \varphi_n \rangle \quad , \quad \frac{m_H^2}{m_W^2} = \frac{2\lambda\beta}{\kappa^2} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

$$\tag{2.49}$$

2.4 Grenzfälle und Phasendiagramme

Schon durch Grenzbetrachtungen und Entwicklungen können die Phasendiagramme der Gittermodelle (bei großen λ) qualitativ zum Teil erschlossen werden. Im folgenden gebe ich eine kurze Beschreibung der wichtigsten Merkmale. Näheres findet man z.B. in [26,88].

$\kappa \ll 1$. Bei $\kappa = 0$ entkoppelt das Higgsfeld und es bleibt nur die reine Eichwechselwirkung. Die reine U(1)-Theorie besitzt eine Coulombphase und eine Confinementphase, welche bei $\beta = 1$ durch einen Phasenübergang von wahrscheinlich 1. Ordnung [89] getrennt sind. Bei $\kappa \ll 1$ bleibt der PÜ erhalten [12,90], wie man durch eine Entwicklung in κ zeigen kann. Die reine SU(2)-Eichtheorie besitzt keinen PÜ.

$\kappa \gg 1$. Hier frieren die Eichfelder näherungsweise ein. In quasiklassischer Näherung bestimmt das Minimum des Potentials den Erwartungswert von ρ^2 . Er ist mit dem auf Gittervariablen umgerechneten quasiklassischen Kontinuumswert in Gl.(2.48) identisch. In diesem bei großen κ linear mit κ ansteigenden Wert von $\langle \rho^2 \rangle$ zeigt sich also (in von der Supraleitung herrührender Sprechweise) das "Kondensat" der skalaren Felder.

Bei $\lambda = \infty$ friert der radiale Teil des skalaren Feldes ein; es gilt $\rho_n = 1$. Die Higgs-Modelle sind im Fall $\lambda = \infty$ analytisch leichter behandelbar (s.u.).

Bei $\lambda \ll 1$ hingegen verursacht der radiale Teil abrupte Phasenübergänge erster Ordnung.

Bei $\beta = \infty$ frieren die Plaketten $r^{-1} \text{Re tr } U_p$ auf ihren maximalen Wert von 1 ein; alle Eichfelder $U_{n\mu}$ können dann zu 1 geeicht werden. Es verbleibt die Wirkung der 2- bzw. 4-komponentigen φ^4 -Theorie mit dem Higgs-Potential. Sie besitzt einen PÜ von einer symmetrischen Phase mit $\langle \varphi \rangle = 0$ bei kleinen κ zu einer Higgs-Phase mit gebrochener Symmetrie bei großen κ . Bei $\lambda = \infty$ ergibt sich ein 4-dimensionales Heisenberg-Spin-Modell. Im U(1)-Fall hat es einen Phasenübergang 2. Ordnung bei $\kappa \approx 0.15$ [91]. Auch im SU(2)-Fall ist die Existenz eines PÜs exakt gezeigt worden [92].

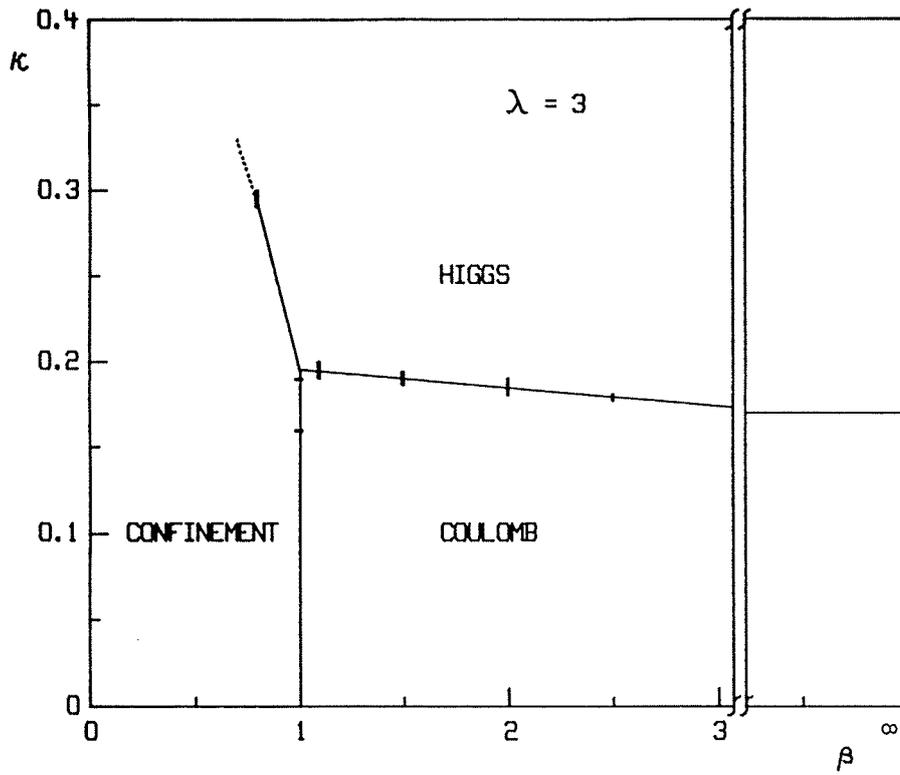
Bei $\beta \gg 1$ ($g^2 \ll 1$) kann man Störungstheorie in g^2 betreiben [23,93,59]. Espriu und Wheater [23] diskutieren auf dem Gitter das analog zu Coleman und Weinberg resultierende effektive Potential, das zum Vergleich mit MC-Resultaten in (nackten) Gitter-Kopplungskonstanten ausgedrückt werden muß und vom Integrationsmaß (2.42) zusätzlich einen bei $\rho = 0$ divergierenden Term enthält. Das effektive Potential sagt, verglichen mit MC-Daten [23], nur bei sehr kleinen λ richtig einen PÜ 1. Ordnung und bei größerem λ (zu früh) einen PÜ 2. Ordnung voraus.

In dem Streifen des Phasendiagramms bei $\lambda = \infty$ und $\beta/\kappa \ll 1$ haben Fradkin und Shenker [12], aufbauend auf einer Arbeit von Osterwalder und Seiler [14], für Higgs-Modelle mit Materiefeldern in der fundamentalen Darstellung gezeigt, daß dort alle thermodynamischen Funktionen (mit kompaktem Träger) analytisch sind. Dort gibt es daher keinen Phasenübergang.

Bei $\lambda = \infty$ ist nun die Phasenstruktur an den Rändern der Phasendiagramme klar. Mit Hilfe von MC-Analysen kann man auch ihr Inneres vervollständigen. Abb. 2.1 zeigt typische Phasendiagramme für beide Modelle bei konstantem großen λ . Die Gebiete der Phasendiagramme sind analog zu den Phasen der anschließenden reinen Eichtheorien bzw. ϕ^4 -Theorien benannt.

Über die Eigenschaften der Modelle im Inneren dieser Gebiete, etwa über die Existenz freier Ladungen in der Coulomb-Phase, geben die bisher besprochenen Betrachtungen keine Auskunft. Das (schon von Fradkin und Shenker erwartete) Zusammentreffen der beiden PÜ-Linien im U(1)-Higgs-Modell und die Fortsetzung des Higgs-PÜs zu kleinen β hin sind ein Ergebnis von MC-Rechnungen [19]. Aus dem Resultat von Fradkin und Shenker folgt, daß in beiden Modellen das Confinement-Gebiet und das Higgs-Gebiet jeweils zu einer einzigen Phase gehören. Alle thermodynamischen Funktionen mit kompaktem Träger können analytisch aus dem Confinement- in das Higgs-Gebiet fortgesetzt werden. Man kann daher annehmen, daß das in Analogie zur QCD vermutlich reichhaltige Spektrum von "zusammengesetzten" Teilchen im Confinement-Gebiet auch im Higgs-Gebiet vorhanden ist. Die Massen angeregter Zustände könnten dort allerdings zu sehr hohen Werten hin verschoben sein.

(a) U(1)-Higgs-Modell



(b) SU(2)-Higgs-Modell

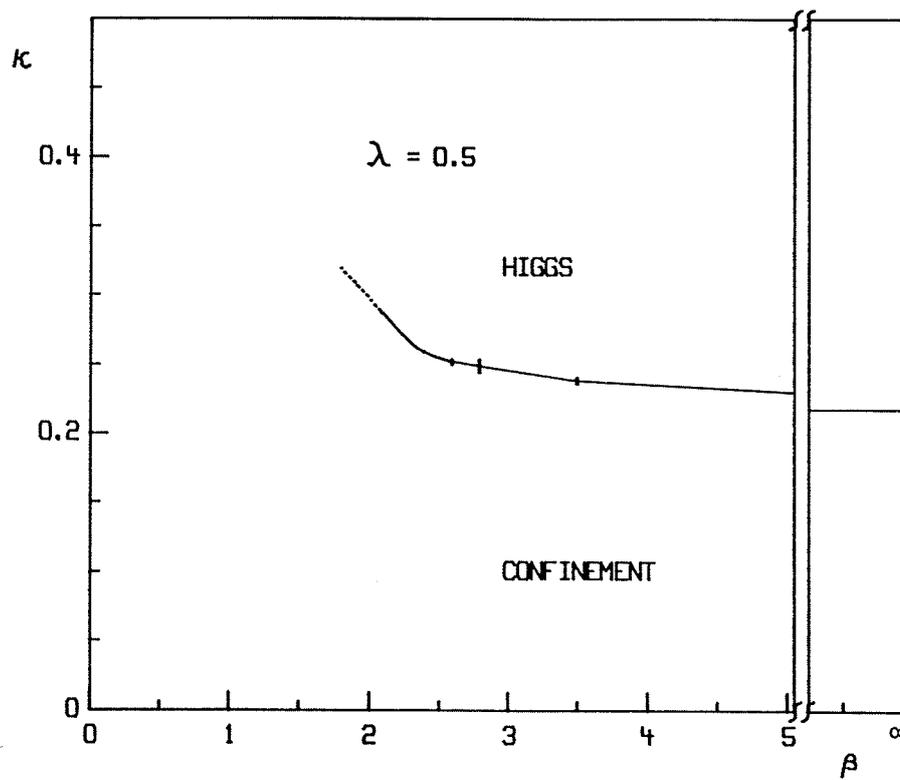


Abb. 2.1: Phasendiagramme des U(1)-Higgs-Modells (a) und des SU(2)-Higgs-Modells (b), bei konstantem groÙen λ . Die Positionen der Phasenübergänge wurden in MC-Rechnungen bestimmt.

Das SU(2)-Higgs-Modell besitzt nur eine einzige Phase, mit zwei durch den Higgs-PÜ (Fortsetzung des Übergangs bei $\beta = \infty$) nur teilweise getrennten Gebieten. Das Phasendiagramm des U(1)-Higgs-Modells, mit zwei völlig getrennten Phasen, ähnelt demjenigen des Eis-Wasser-Dampf-Systems.

Monte-Carlo-Rechnungen zeigen, daß bei großen $\lambda < \infty$ die Phasendiagramme qualitativ erhalten bleiben [22-24,26-30]. Bei sehr kleinen Werten von λ dagegen setzt sich der Higgs-PÜ bis $\beta = 0$ (und darüber hinaus) fort [24,29]; Confinement-Gebiet und Higgs-Gebiet sind dann, bei festem λ , getrennte Phasen. Im Raum der drei Kopplungskonstanten β, λ, κ bleiben sie aber analytisch verbunden.

2.5 Das Verhalten lokaler Observabler in Monte-Carlo-Untersuchungen

Die beiden in dieser Arbeit untersuchten Higgs-Modells wurden in den ersten MC-Rechnungen zunächst bei $\lambda = \infty$ analysiert [19,20]. Spätere Studien der Phasendiagramme [22-24,26-30] haben auch $\lambda < \infty$ berücksichtigt. Lokale Observable sind dabei in beiden Higgs-Modellen auch von Aachener Gruppen schon ausführlich analysiert worden [24,29,30]. Hier sollen knapp einige allgemeine Charakteristika zusammengefaßt werden. Für weitere Ergebnisse und Details, auch bezüglich der Algorithmen, möchte ich besonders auf die Arbeiten von Karl Jansen [88] und Thomas Neuhaus [94] verweisen.

In der vorliegenden Arbeit wurde zur Berechnung von Erwartungswerten das Pfadintegral

$$\langle O \rangle = \int D\Phi DU \quad O \quad e^{-S} \quad (2.50)$$

mittels des Metropolis-Algorithmus [9] (meist mit je 1 Versuch ("Hit") pro Kante und Gitterpunkt) in Monte-Carlo-Rechnungen simuliert. Die Gruppe SU(2) wurde durch ihre Ikosaeder-Untergruppe, die U(1) durch Z(60) approximiert. Die Rechnungen für diese Arbeit wurden auf den Computern Cyber 205 der Rechenzentren der Universitäten in Bochum, Karlsruhe, Athens (Georgia) und Tallahassee (Florida) durchgeführt. Die geringe Größe des Hauptspeichers der Bochumer Maschine beschränkte die dortigen Rechnungen

auf Gitter bis zur Größe $8^3 \cdot 16$. In Karlsruhe und Athens wurden auch 16^4 -Gitter verwendet, für welche die benötigte Rechenzeit die wesentliche Einschränkung darstellte. (Die vorliegende Arbeit stützt sich auf Daten aus insgesamt etwa 1000 CP-Stunden Rechenzeit).

Die wichtigsten lokalen Observablen sind die in der Wirkung auftretenden Größen $\text{tr}(\Phi^\dagger U \Phi)$, $\text{tr}(\Phi^\dagger \Phi)$, $\text{tr}(|\Phi|^4)$ und die Plakette $\text{tr}(U_p)$ (bzw. im U(1)-Higgs-Modell die Realteile von $\Phi^* U \Phi$, $\Phi^* \Phi$, $|\Phi|^4$ und U_p). Im folgenden werde ich oft die entsprechenden Erwartungswerte in beiden Modellen *generisch* mit $\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle$, $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$, $\langle |\Phi|^4 \rangle$ und $\langle U_p \rangle$ bezeichnen.

Am empfindlichsten reagieren auf den Higgs-Phasenübergang die in der Wirkung mit κ gekoppelte Kantenobservable $\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle$ und Funktionen hiervon. $\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle$ hat (generell) unterhalb des Übergangs einen relativ kleinen positiven, schwach mit κ ansteigenden Wert. Im Higgs-Gebiet wächst es schon kurz oberhalb des Übergangs mit κ annähernd linear stark an, wie in Abb. 2.2 an einem Beispiel dargestellt ist. Für das Higgs-Gebiet sind große Fluktuationen von $\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle$ charakteristisch. Die anderen lokalen Observablen ($\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$, $\langle |\Phi|^4 \rangle$ sowie im SU(2)-Higgs-Modell auch $\langle U_p \rangle$) zeigen ebenfalls das in Abb. 2.2 dargestellte Verhalten, ändern sich am PÜ aber weniger. $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$ folgt bei großen κ der asymptotischen Form Gl.(2.48).

Bei sehr kleinen skalaren Selbstkopplungen λ , also sehr aktivem radialen Teil ρ des skalaren Feldes, ist der Higgs-PÜ von starker 1. Ordnung, mit einem sehr großen Sprung in $\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle$. Dieser schwächt sich mit größer werdendem λ und größer werdendem β ab [24,29]. Bei $\lambda = O(0.1)$ ist auf nicht genügend großen Gittern (bis ca. $8^3 \cdot 16$) kein Sprung mehr erkennbar. Es treten allerdings noch anscheinend metastabile Zustände auf. (Vgl. auch die λ -Abhängigkeit in der Landau-Ginzburg-Theorie [21,87].)

Wahl der Kopplungsparameter. Für die hier beschriebenen Untersuchungen wurde im SU(2)-Higgs-Modell die Kopplung $\lambda = 0.5$ und bei U(1)-Higgs der Wert $\lambda = 3$ gewählt, da mit solchen Werten -bei noch aktivem radialen Teil ρ - die für einen Kontinuumslikes nötige zweite Ordnung des PÜs gewährleistet schien. Neuere Erkenntnisse hierzu behandelt der nächste Abschnitt. Für die Eichkopplung β wurden Werte zwischen 2.1 und 2.5 gewählt (in Kap. 5 auch $\beta = 4$). Das Bestreben nach möglichst großen β

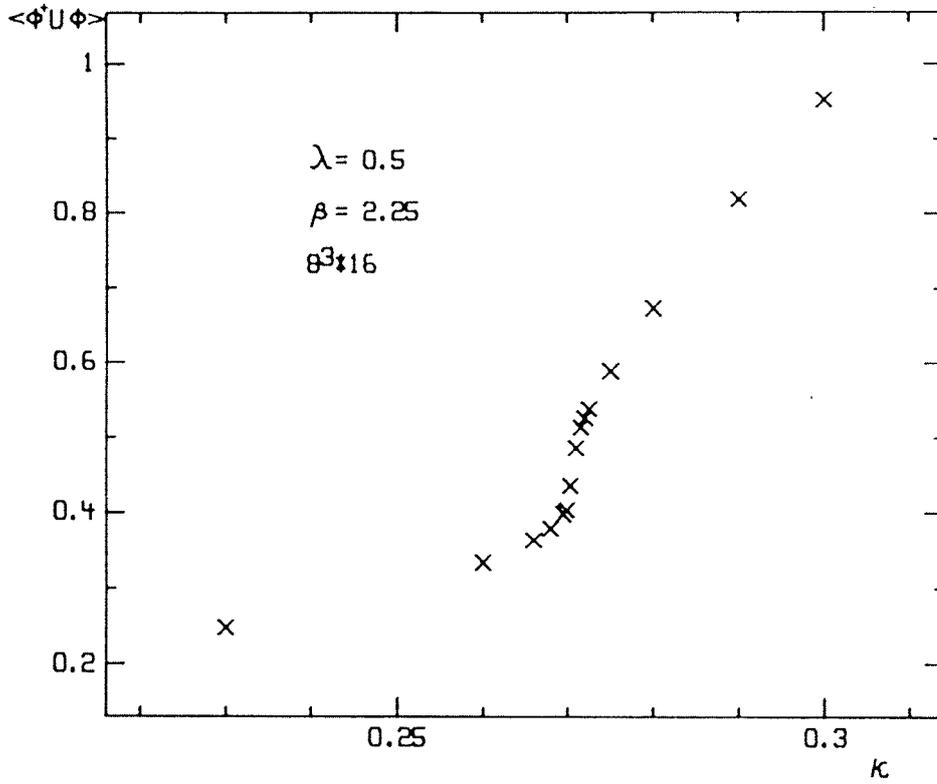


Abb. 2.2: Charakteristisches Verhalten lokaler Observabler wie $\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle$, $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$, $\langle |\Phi|^4 \rangle$ und (im SU(2)-Fall) $\langle U_p \rangle$, am Higgs-Phasenübergang. Abgebildet ist $\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle$ bei $\lambda = 0.5$, $\beta = 2.25$, im SU(2)-Higgs-Modell auf einem $8^3 \cdot 16$ -Gitter.

(um dort vermutlich der Kontinuumsphysik näher zu kommen) konkurierte bei dieser Wahl mit der Erfordernis eines noch "aktiven" Eichfeldes U_μ , um die MC-Rechnungen praktikabel zu halten. Die Eichfeld-Higgs-Kopplung κ wurde, jeweils bei festen λ und β , in der Umgebung des Higgs-PÜs variiert.

2.6 Rechnungen zur Ordnung des Higgs-Phasenübergangs

Die Linie der Higgs-PÜe bei konstantem großem λ (Abb. 2.1) wird bei $\beta = \infty$ durch den Übergang der ϕ^4 -Theorie und bei kleinem β durch einen Endpunkt beschränkt. Vom ϕ^4 -Übergang wird vermutet, daß er von 2. Ordnung ist [77]. Auch für den Endpunkt ist dies zu erwarten. Der einen Übergang 1. Ordnung kennzeichnende Sprung eines Erwartungswertes ($\langle \Phi^+ U \Phi \rangle$) muß an diesen Punkten also verschwinden. Wie weiter unten beschrieben wird, gibt es andererseits β -Werte mit endlichem Sprung in $\langle \Phi^+ U \Phi \rangle$. Es sind nun mehrere Szenarien möglich.

Wenn der Sprung in $\langle \Phi^+ U \Phi \rangle$ in einem endlichen β -Intervall von Null verschieden ist, aber schon bei $\beta = \beta_{tc} < \infty$ zu Null wird, so liegt bei β_{tc} ein trikritischer Punkt vor (vgl. [89]). Oberhalb von β_{tc} würde es dann divergierende Korrelationslängen geben und ein Kontinuumslikes wäre möglich. Die in Kap. 2.1 beschriebenen perturbativen Ergebnisse im Kontinuum (bei kleinem λ_k) nach Coleman und Weinberg [80] weisen andererseits auf die Möglichkeit hin, daß ein Übergang 1. Ordnung bei allen $\beta < \infty$ existieren könnte. Der zugehörige Sprung wäre aber nach solchen Rechnungen exponentiell verschwindend in β (siehe Gl.(2.26); dieser Sprung überträgt sich mit $\mu := 1/a$ auch auf die Gitterobservable $\langle \Phi^+ \Phi \rangle$). Er würde daher einen Kontinuumslikes vermutlich erst bei gigantischen Impulsskalen behindern, wäre also wahrscheinlich irrelevant.

Im SU(2)-Higgs-Modell zeigten sich nun in den MC-Rechnungen, auch bei dem gewählten "großen" Wert von $\lambda = 0.5$, auf einem 16^4 -Gitter deutliche Indizien für Übergänge 1. Ordnung [30]. Abb. 2.3 stellt den Verlauf von jeweils über ca. 14000 Iterationen gemittelten Werten von $\langle \Phi^+ U \Phi \rangle$ gegenüber κ bei 3 verschiedenen Eichkopplungen β dar. (Eine "Iteration" umfaßt 1 Aufdatieren aller Variablen auf dem Gitter mittels des Metropolis-Algorithmus.)

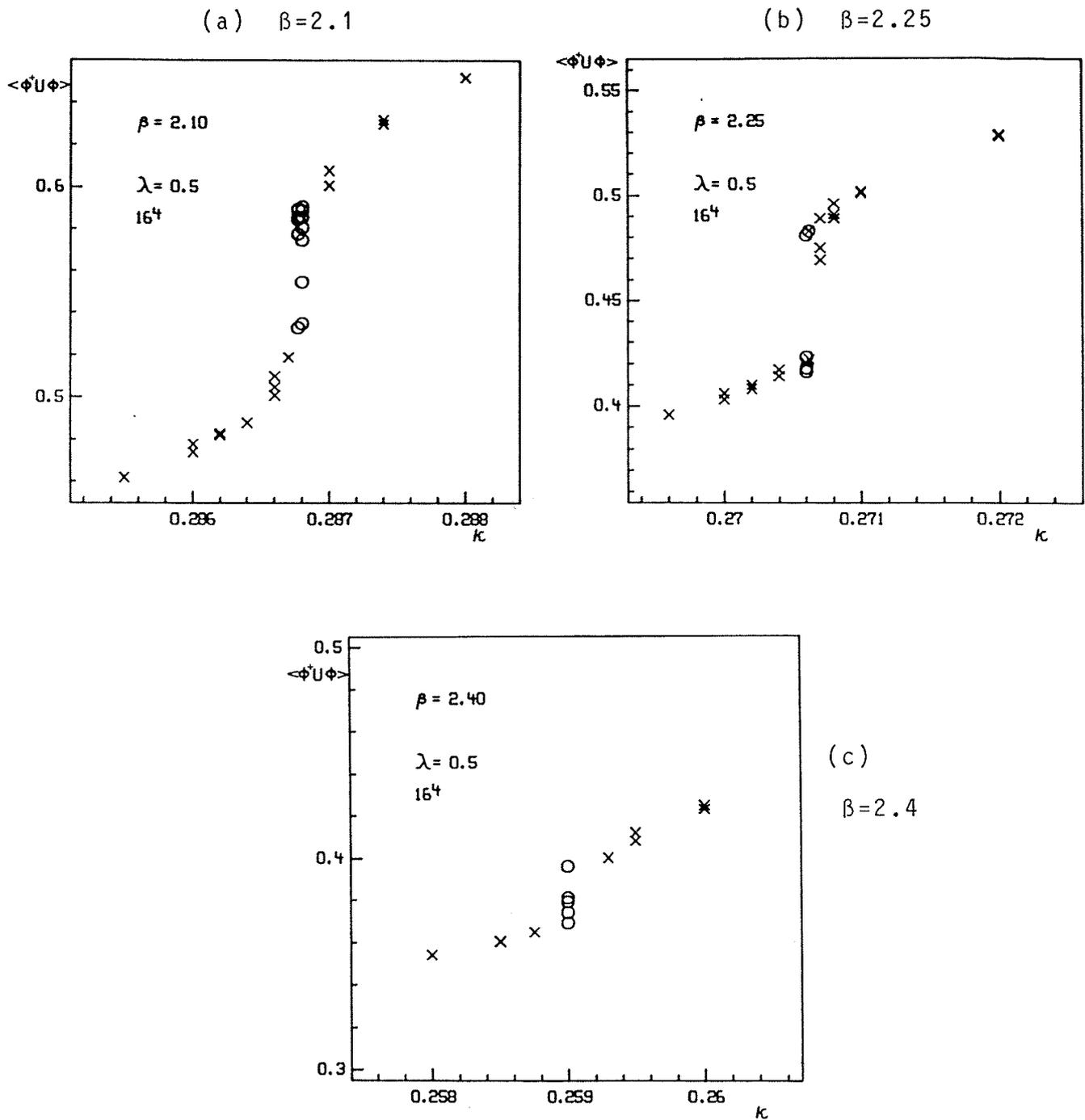


Abb. 2.3: Entwicklung der Werte von $\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle$ mit κ am Higgs-PÜ des SU(2)-Higgs-Modells auf einem 16^4 -Gitter, bei $\beta = 2.1, 2.25$ und 2.4 . Jeder Eintrag repräsentiert ca. 14000 MC-Iterationen. Die Bilder haben gleichen Maßstab. Zu den mit Kreisen gekennzeichneten Daten gibt Abb. 2.4 Histogramme.

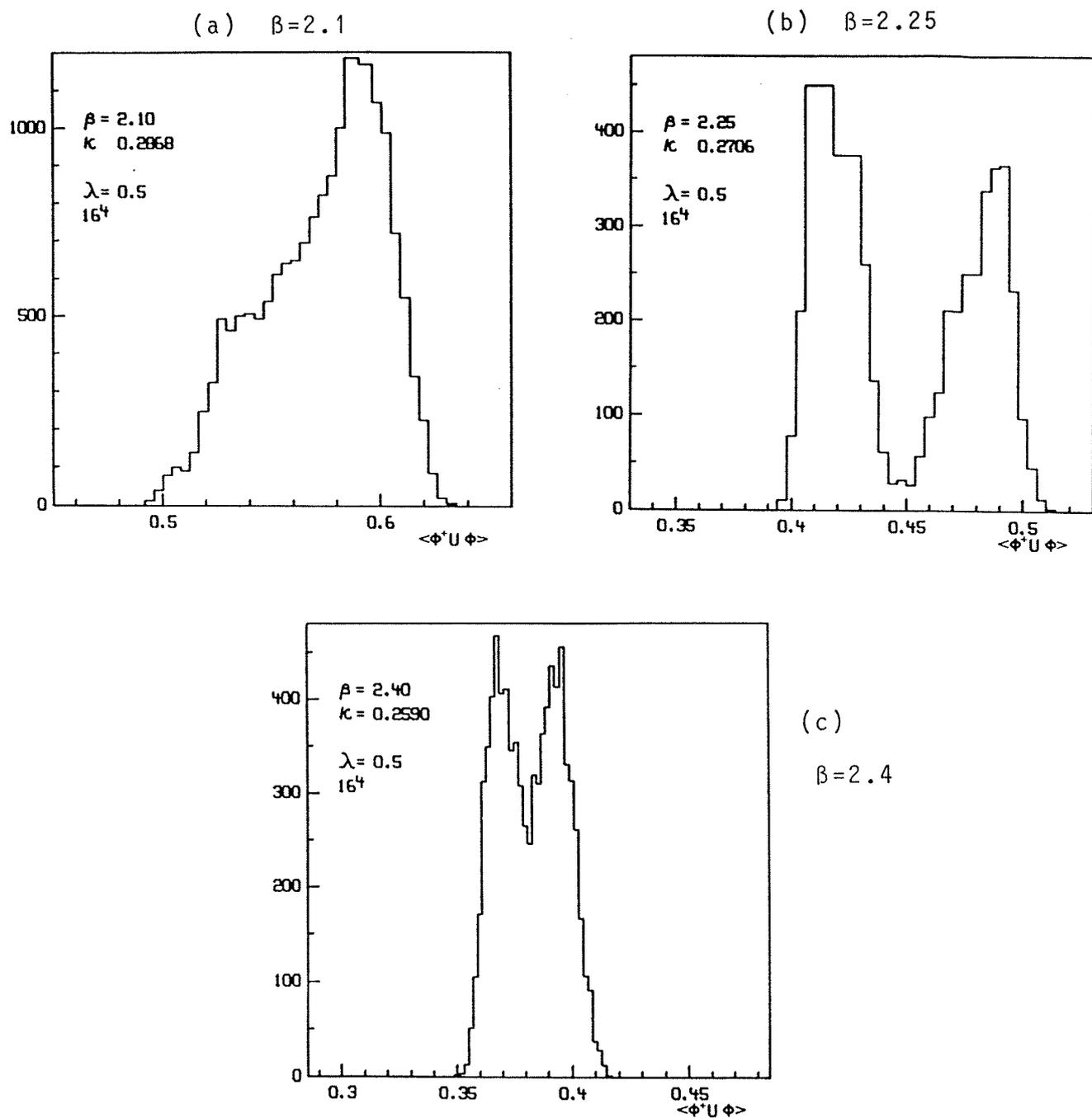


Abb. 2.4: Histogramme der Verteilungen von $\text{tr}(\Phi^\dagger U \Phi)$ für die in Abb. 2.3 mit Kreisen gekennzeichneten MC-Daten. Die Abszissen der drei Bilder haben gleichen Maßstab.

Bei $\beta = 2.25$ sind am Übergang deutlich zwei sehr langlebige Zustände zu erkennen, die durch einen Sprung in $\langle \Phi^+ U \Phi \rangle$ von etwa 0.06 voneinander getrennt sind¹⁾. Das entsprechende Histogramm der Verteilung der Werte von $\text{tr}(\Phi^+ U \Phi)$ ist in Abb. 2.4b dargestellt. Hier kann man bei $\beta = 2.25$ deutlich zwei getrennte Maxima sehen. Der Sprung in $\langle \Phi^+ U \Phi \rangle$ ist erst auf dem 16^4 -Gitter klar sichtbar. Die unterschiedlichen Zustände sind hier wesentlich langlebiger als auf einem $8^3 \cdot 16$ -Gitter; dort waren sie nicht einzeln zu isolieren (vgl. Abb. 2.2). Der Übergang bei $\beta = 2.25$ ist, aufgrund der Daten in Abb. 2.3 und 2.4, höchstwahrscheinlich von 1. Ordnung. Eine endgültige Aussage über die Ordnung des PÜs kann allerdings nur durch ein Studium der Abhängigkeit des Sprungs von der Gittergröße bei sehr großen Gittern gewonnen werden²⁾.

Ähnliches gilt bei $\beta = 2.4$ (Abb. 2.3c, 2.4c). Auch dort gibt es zwei sehr langlebige metastabile Zustände, die auf dem $8^3 \cdot 16$ -Gitter noch nicht deutlich erkennbar waren. Auch dort ist der Übergang vermutlich von 1. Ordnung, mit einem allerdings deutlich kleineren Sprung in $\langle \Phi^+ U \Phi \rangle$ von nur noch etwa 0.025.

Aufgrund der Langlebigkeit der Zustände ist die erreichte Anzahl von Iterationen sowohl bei $\beta = 2.25$ als auch bei $\beta = 2.4$ vermutlich nicht ausreichend, um Gleichgewichtsgrößen wie etwa die spezifische Wärme genau zu bestimmen. Sie genügt aber zur Identifikation der beiden Zustände am Übergang.

Weniger klar ist die Situation bei $\beta = 2.1$. Obwohl dort die Kurve in Abb. 2.3a am Übergangspunkt ebenfalls sehr steil verläuft, können (bei der gegebenen nicht allzu großen Statistik) keine zwei Zustände klar voneinander unterschieden werden, wie aus Abb. 2.4a hervorgeht. Dies entspricht auch dem Verhalten der (hier nicht gezeigten) Entwicklung von $\text{tr}(\Phi^+ U \Phi)$ mit den MC-Iterationen: während darin bei $\beta = 2.25$ deutlich zwei langlebige Zustände erkennbar sind, und Zwischenwerte von $\text{tr}(\Phi^+ U \Phi)$ nur kurzzeitig angenommen werden, "wandert" $\text{tr}(\Phi^+ U \Phi)$ bei $\beta = 2.1$ über seinen ganzen Wertebereich, mit

1) Auch in den Massen der W-Bosonen könnte es einen Sprung geben; vgl. Kap. 4.

2) Frühere Erfahrungen zeigen [52,89], daß eine solche Untersuchung sehr schwierig sein kann.

Fluktuationen auf vielen "Zeit"-Skalen. Dieses Verhalten, und die sich daraus ergebende Form von Abb. 2.4a sprechen dafür, daß der Übergang bei $\beta = 2.1$ von 2. Ordnung ist, oder einer 2. Ordnung nahekommt. Dies würde bedeuten, daß $\beta = 2.1$ in der Nähe des Endpunktes der Higgs-PÜ-Linie liegt. Es bleiben aber Zweifel bestehen. (Es wäre z.B. vorstellbar, daß ein sehr scharfer Übergang 1. Ordnung etwas unterhalb von $\kappa = 0.2868$ vorliegt.) In das Bild eines Überganges 2. Ordnung paßt auch nicht ohne weiteres die Beobachtung, daß auf einem 12^4 -Gitter bei $\kappa = 0.28677$ zwei deutliche Maxima im Histogramm von $\text{tr}(\Phi^+U\Phi)$ auftraten (bei Werten von etwa 0.51 und 0.59).

Die Schlußfolgerung aus den gezeigten Daten ist, daß bei $\lambda = 0.5$ im SU(2)-Higgs-Modell *Phasenübergänge 1. Ordnung* auftreten, die erst auf großen Gittern erkennbar werden. Bei $\beta = 2.25$ gibt es am Übergang einen recht großen Sprung in $\langle \Phi^+U\Phi \rangle$, der sich bei $\beta = 2.4$ schon mehr als halbiert hat. Der Übergang bei $\beta = 2.1$ dagegen könnte in der Nähe des Endpunktes der Higgs-PÜ-Linie liegen.

Es ist wünschenswert, die Entwicklung des Sprungs in $\langle \Phi^+U\Phi \rangle$ noch weiter zu größeren β hin zu verfolgen, um abschätzen zu können, ob er entweder (i) nur noch langsam kleiner oder (ii) sehr schnell mit Null verträglich wird. Rechnungen hierzu werden zur Zeit (Frühjahr 1987) durchgeführt [30].

Im ersten Fall müßten Untersuchungen zum Kontinuumslikes der Theorie unbedingt bei sehr großen Werten von β durchgeführt werden, wo der Sprung dann (evtl.) klein genug wäre (s.o.). Solche Rechnungen wären wegen des dann nahezu eingefrorenen Eichfeldes technisch sehr aufwendig. Im zweiten Fall könnte schon bei moderaten Werten von β ein trikritischer Punkt vorliegen. Zumindest wäre dann schon bei nicht allzu großem β der Übergang so schwach 1. Ordnung, daß Anhaltspunkte zu einem "Kontinuums"-Limes gewonnen werden könnten.

Im U(1)-Higgs-Modell ist das Verhalten lokaler Observabler wie $\text{Re}(\Phi^*U\Phi)$ am PÜ deutlich anders als im SU(2)-Higgs-Fall. Zwar konnten hier schon auf dem $8^3 \cdot 16$ -Gitter sehr langlebige Zustände beobachtet werden (Abb. 2.5),

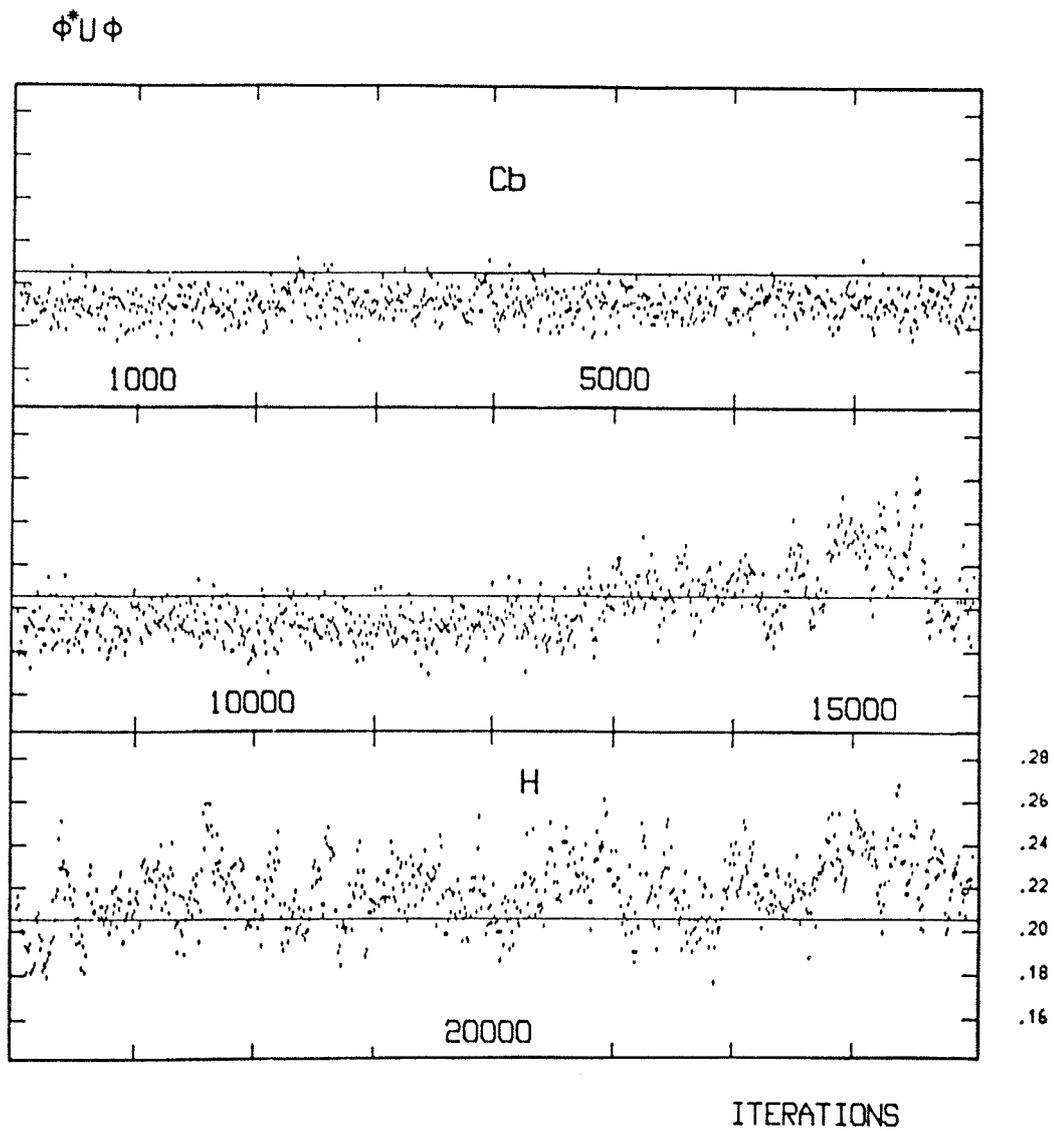


Abb. 2.5: Monte-Carlo-Evolution des Kantenoperators $\Phi^* U \Phi$ im U(1)-Higgs-Modell über 24000 MC-Iterationen, auf einem $8^3 \cdot 16$ -Gitter bei $\lambda = 3$, $\beta = 2.5$, $\kappa = 0.179$.

aber es gibt keinen zugehörigen Sprung in $\text{Re}(\Phi^*U\Phi)$ oder irgendeiner anderen untersuchten lokalen Observablen. Die beiden Phasen (Coulomb-Phase und Higgs-Gebiet) unterscheiden sich in Abb. 2.5 durch den Grad der Fluktuationen, kaum aber durch die Werte von $\text{Re}(\Phi^*U\Phi)$. Die beobachtete Langlebigkeit muß von einem anderen Parameter mit entsprechendem Sprung verursacht sein. Ein solcher Parameter wurde mit Hilfe von nichtlokalen Observablen gefunden, die erst in Kap. 3 diskutiert werden. Als ein Ergebnis von Kap. 3.5 sei hier vorweggenommen, daß dieser Parameter, die Abschirmenergie μ aus dem exponentiellen Abfall von eichinvarianten Zweipunktfunktionen bestimmt werden konnte¹⁾ (vgl. Abb. 3.8). Ich werde die Diskontinuität von μ ausführlich am Ende von Kap. 3.5 behandeln.

Als Schlußfolgerung aus dem in μ beobachteten Sprung ist der Übergang im U(1)-Higgs-Modell bei $\beta = 2.5$ wahrscheinlich von 1. Ordnung. Es könnte allerdings sein (s. Kap. 3.5), daß der Sprung in μ auf größerem Gitter wieder kleiner wird. Eine definitive Aussage über die Ordnung des Higgs-PÜs im U(1)-Higgs-Modell bei $\lambda = 3$ kann daher zur Zeit noch nicht gemacht werden.

1) Im SU(2)-Higgs-Modell scheinen μ und $\langle \Phi^+U\Phi \rangle$ auf den Übergang etwa gleich empfindlich zu sein.

Die Untersuchung der Zweipunktfunktionen $G(T,R)$ liefert Informationen über die *Abschirmung* der äußeren Quelle q durch die Materiefelder. Diese Abschirmung kann entweder durch die Bindung eines einzelnen (mit dem Materiefeld Φ assoziierten) geladenen Teilchens c zustande kommen, oder sie kann analog zu Debye-Abschirmung in einem Plasma solcher Teilchen ablaufen. Die Anwesenheit einer abgeschirmten äußeren Quelle verursacht eine Erhöhung der Energie des Systems dynamischer Materiefelder um die "Abschirmenergie" μ , $\mu \geq 0$. Diese Energie wird im exponentiellen Zerfall von $G(T,R)$ bei großen Abständen $T = |x-y|$ sichtbar :

$$G(T,R) \xrightarrow[\substack{T \text{ groß} \\ R \text{ fest}}]{} f_G(R) e^{-\mu T} . \quad (3.2)$$

Der exponentielle Zerfall von $G(T,R)$ wird in Kapitel 3.4 untersucht.

Von Fredenhagen und Marcu wurde gezeigt, daß man $G(T,R)$ benutzen kann, um ein Kriterium für die Existenz freier geladener Zustände in Eichtheorien mit dynamischen Materiefeldern zu konstruieren [36]. In diesem Zusammenhang müssen sowohl T als auch R groß sein. Ein weiterer Vorschlag für ein Confinement-Kriterium [46], bei dem R in $G(T,R)$ Null sein kann, wird durch die Betrachtungen zur Abschirmenergie μ motiviert. Confinement-Kriterien und zugehörige Observable bespreche ich ausführlich in Kap. 3.6.

Die benutzten Modelle, das $U(1)$ -Higgs- und das $SU(2)$ -Higgs-Modell, eignen sich sehr gut für die angesprochenen Untersuchungen: Innerhalb des $U(1)$ -Higgs-Modells gibt es sowohl die Coulomb-Phase, als auch die Confinement-Higgs-Phase mit einem Confinement- und einem Higgs-Gebiet, die jeweils deutlich verschiedene Eigenschaften aufweisen: In der Coulomb-Phase *erwartet* man freie Ladungen, sowie ein masseloses Photon (s. Kap. 4). Hierzu gibt es, soweit mir bekannt ist, keine exakten Beweise. Im Higgs-Gebiet kann man aufgrund des Ansteigens von $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$ ein Verhalten erwarten, das analog zu demjenigen eines Kondensats in Form eines Plasmas von leichten Teilchen ist (entsprechend der Landau-Ginzburg-Theorie). Im Confinement-Gebiet kann man statt eines "Plasmas" eher schwere (aber dynamische) Konstituenten erwarten. Diese Vorstellungen werden von den Ergebnissen dieses Kapitels stark unterstützt. Gleichzeitig kann man hoffen, im $U(1)$ -Higgs-Modell etwas über die nichtperturbativen Auswirkungen des Higgs-Mechanismus zu lernen.

Im SU(2)-Higgs-Modell gibt es nur 1 Phase. Am Higgs-PÜ stoßen das Higgs-Gebiet und das Confinement-Gebiet aufeinander. Auch hier wird das Bild eines leichten Plasmas bzw. schwerer Konstituenten durch die Monte-Carlo-Untersuchungen der Zweipunktfunktionen gestützt (s. Kap. 3.5).

Exakte analytische Ergebnisse zum Kriterium von Fredenhagen und Marcu gibt es im U(1)-Higgs-Modell nur in Form von Entwicklungen in bestimmten Gebieten des Phasendiagramms [36,37], nicht aber für das ganze Phasendiagramm. Zum SU(2)-Higgs-Modell liegen meines Wissens hierzu keine analytischen Ergebnisse vor. Ziel und Motivation für die Untersuchung der Confinement-Kriterien mit Monte-Carlo-Methoden sind daher die Fragen nach ihrer Richtigkeit auch für nichtabelsche Modelle, nach dem Gültigkeitsbereich innerhalb der Phasendiagramme, speziell in der Nähe des Higgs-PÜs, nach der praktischen Verwertbarkeit auf endlichen Gittern, sowie nach einer möglichst detaillierten (heuristischen) physikalischen Interpretation der Situation am Higgs-PÜ.

Technische Bemerkungen zu den MC-Rechnungen. In den in diesem Kapitel behandelten MC-Untersuchungen [45,46] wurde aufgrund der beschriebenen Motivationen vor allem der Higgs-PÜ untersucht. Bei festen Kopplungen (β, λ) ($\beta = 2.5$, $\lambda = 3$ im U(1)-Fall und $\beta = 2.4$, $\lambda = 0.5$ für SU(2)) wurde κ variiert. Die Wahl dieser Werte von (β, λ) habe ich in Kap. 2.5 erläutert.

Für das U(1)-Higgs-Modell wurden $8^3 \cdot 16^-$, 12^4^- und 16^4^- -Gitter benutzt. Der PÜ auf dem meist verwendeten $8^3 \cdot 16^-$ -Gitter liegt bei

$$\kappa = \kappa_{\text{PT}} = 0.179 \pm 0.001 \quad . \quad (3.3)$$

Typischerweise wurden pro κ -Wert ca. 150000 Iterationen auf dem $8^3 \cdot 16^-$ Gitter durchgeführt und etwa 40000 Iterationen auf den anderen Gittern.

Für die Analyse des SU(2)-Higgs-Modells finden die gleichen MC-Rechnungen Verwendung, die ich schon in Kapitel 2.6 vorgestellt habe. Der PÜ liegt bei

$$\kappa = \kappa_{\text{PT}} = 0.259 \pm 0.001 \quad . \quad (3.4)$$

Auf dem 16^4^- -Gitter wurden pro κ -Wert zwischen 15000 und 28000 Iterationen durchgeführt.

3.2 Das Confinement-Problem (Potentiale)

Das exponentielle Abfallen der Wegner-Wilson-Schleifen [6,90]

$$\langle W(T,R) \rangle \equiv \langle \tau \square_R \rangle \sim e^{-V(R) \cdot T} \quad (R, T \text{ groß}; T \gg R) \quad (3.5)$$

ist durch das Potential $V(R)$ zwischen zwei äußeren statischen Quellen im Abstand R bestimmt.

In reinen Eichtheorien verhalten sich die Wegner-Wilson-Schleifen in starker-Kopplungs-Entwicklung nach einem Flächengesetz [6,90]

$$\langle W(T,R) \rangle \sim e^{-c_1 R \cdot T} \quad (R, T \text{ groß}) \quad (3.6)$$

Korrespondierend dazu enthält das Potential

$$V(R) = -\frac{\alpha}{R} + \sigma R + \text{const.} \quad (3.7)$$

einen linear ansteigenden Term. (Der Coulomb-Term entsteht erst durch Korrekturen zu Gl.(3.6).) Die Energie der beiden statischen Quellen wächst mit ihrem Abstand unbeschränkt an; es herrscht Confinement. Das Confinement-Kriterium entspricht hier also der Frage, ob die Saitenspannung verschwindet :

$$\begin{aligned} \sigma > 0 & : \text{ Confinement,} \\ \sigma = 0 & : \text{ freie Ladungen.} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Bei Anwesenheit dynamischer Materiefelder dagegen setzt bei genügend großer Energie des Systems äußerer Ladungen Paarerzeugung ein [12,13,73]. Dies führt zur Abschirmung der äußeren Quellen; die Kraft zwischen den beiden resultierenden neutralen Systemen verschwindet; das Potential wird konstant. (In der Coulombphase findet keine Erzeugung *reeller* Paare statt; das Potential ist monoton steigend, aber nach oben beschränkt). Für die Wegner-Wilson-Schleifen äußert sich das in einem Umfangsverhalten

$$W(T,R) \sim e^{-E_q 2(T+R)} \quad (T, R \text{ groß}) \quad (3.9)$$

das man etwa in der "Hoppingparameter"-Entwicklung (kleine κ) sieht (s.a. [37]). Wie im nächsten Kapitel näher erläutert wird, kann das

Umfangsverhalten der Wegner-Wilson-Schleifen für abelsche und nichtabelsche Theorien allgemein bewiesen werden [96].

Die Entwicklung nach kleinen κ legt es nahe, den Term $\log 1/\kappa$ mit der (nackten) Masse der dynamischen Teilchen zu verbinden. Im Confinement-Gebiet sind diese also schwer. Es findet dann bei der Trennung der äußeren Quellen Paarerzeugung einzelner Teilchen-Antiteilchen-Paare statt, gefolgt von der Bildung neutraler Meson-ähnlicher Zustände ("Hadronisierung"). Im Higgs-Gebiet kann man das Ansteigen von $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$ (Gl.(2.48)) als Analogon zur Kondensation eines Plasmas *leichter* dynamischer Teilchen verstehen. Daher ist das bessere physikalische Bild hier dasjenige von Debye-Hückel-Abschirmung [97] der äußeren Quellen. In der Coulomb-Phase dagegen sind (zunächst nur als Analogie zur reinen Eichtheorie bei $\kappa = 0!$) freie Ladungen zu erwarten. Hier tritt bei der Trennung der Quellen nur die (Selbst-)Energie in deren Feldern auf, die bei Gitterregularisierung endlich ist. Die in Abb. 3.1 gezeigte Skizze soll der Veranschaulichung des eben Gesagten dienen.

Man kann also erwarten, daß das Potential im Higgs-Gebiet wegen der dort leichten dynamischen Teilchen eher konstant wird als im Confinement-Gebiet.

Der Wert $V(\infty)$ des Potentials im Unendlichen entspricht der Energie eines solchen Systems aus zwei äußeren Ladungen. Es folgt:

$$E_q = V(\infty)/2 \text{ ist die niedrigste Energie in den Feldern um eine äußere Quelle herum.} \quad (3.10)$$

(Die unendliche nackte Masse der äußeren Quelle ist in $V(\infty)$ natürlich nicht enthalten.) *In der Coulomb-Phase ist E_q einfach die Coulomb-Selbstenergie der äußeren Ladung; in der Confinement/Higgs-Phase ist es die Summe der Energien der abschirmenden Felder und dynamischen Ladungen.*

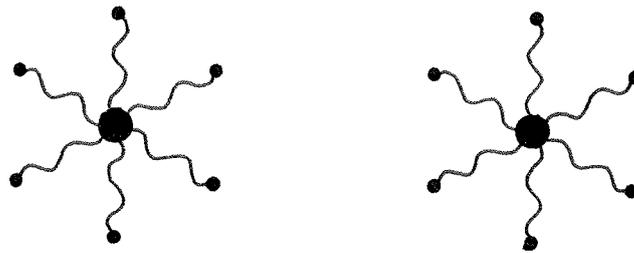
Aus dem Umfangsverhalten der Wegner-Wilson-Schleifen folgt das identische Verschwinden der (bei großen T und R bestimmten) Saitenspannung :

$$\sigma = 0 ; \quad (3.11)$$

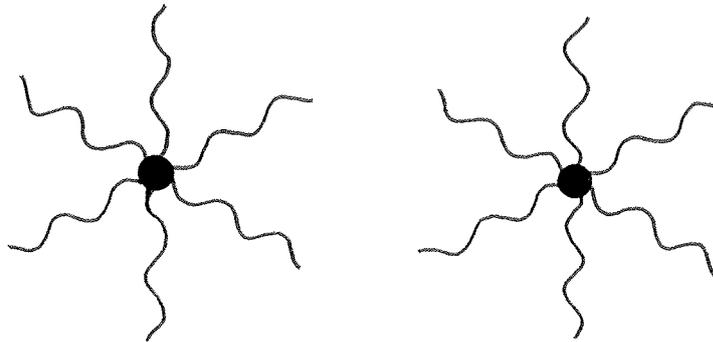
die Wegner-Wilson-Schleifen liefern nun kein Confinement-Kriterium mehr.



(a) Confinement-Gebiet: Hadronisierung



(b) Higgs-Gebiet: "Plasma"-Abschirmung



(c) Coulomb-Phase: Freie Ladungen

Abb. 3.1: Skizze des mit den Wegner-Wilson-Schleifen untersuchten Systems zweier äußerer Ladungen in den verschiedenen Gebieten der Phasendiagramme, bei unendlichem Abstand der äußeren Ladungen. Im Grundzustand des Systems sind diese dann im Confinement- und im Higgs-Gebiet abgeschirmt; in der Coulomb-Phase bleiben sie frei.

Potentiale im U(1)-Higgs-Modell. Die Erwartungen an das Verhalten der Wegner-Wilson-Schleifen bestätigen sich hier. Diese wurden in den MC-Rechnungen bei $T=1, \dots, N_T/2$ und $R=1, \dots, N_R/2$ berechnet und für $T \geq 4$ wurden Fits durchgeführt. In der Higgs-Region ist wegen der Debye-artigen Abschirmung ein Yukawa-Potential

$$V(R) = -\frac{\alpha}{R} e^{-m_\gamma R} + V(\infty) \quad (3.12)$$

zu erwarten. Die Yukawa-Masse sollte mit der Photon-Masse übereinstimmen. In der Coulomb-Phase ist das Photon masselos (s. Kap. 4) und es ist ein Coulomb-Potential zu erwarten. In Abb. 3.2 sind die Potentiale $V(R)$ sowie Fits mit dem Yukawa-Potential dargestellt.

Bei $\kappa = 0.64$, tief in der Higgs-Phase, ist das Potential bei großen R schon sehr flach. (Fits mit zusätzlichem Summanden $\sigma \cdot R$ ergeben überall eine mit Null verträgliche Saitenspannung.)

In der Coulomb-Phase sind die Werte von m_γ in den Fits nach Gl.(3.12) konsistent mit Null; sie steigen langsam an, wenn κ über κ_{PT} wächst. Die Feinstrukturkonstante α ist in der Coulomb-Phase nahezu unabhängig von κ und ihr Wert von

$$\alpha = 0.0385(15) \quad (3.13)$$

liegt nahe bei dem Wert von $\alpha = 0.036$ in der reinen U(1)-Eichtheorie (bei $\beta = 2.5$) [98,99]. Man sieht also, daß die Materiefelder im U(1)-Higgs-Modell die renormierte Ladung in der ganzen Coulomb-Phase nicht merklich beeinflussen. Solange α konstant ist, ist auch der asymptotische Wert E_q des Potentials κ -unabhängig. (Auch ist überall in der Coulombphase die Photonmasse konstant Null, s. Kap. 4.) Die Eigenschaften der Coulombphase des U(1)-Higgs Systems sind also nahezu κ -unabhängig und gleichen der reinen U(1)-Eichtheorie.

Der Effekt des Higgs-Phasenüberganges auf E_q entspricht physikalisch dem Einbringen einer Ladung in ein dünnes Plasma. Die Energien des Coulomb- bzw. Yukawa-Feldes einer äußeren Ladung sind nahezu gleich, wenn die Yukawa-Masse klein ist.

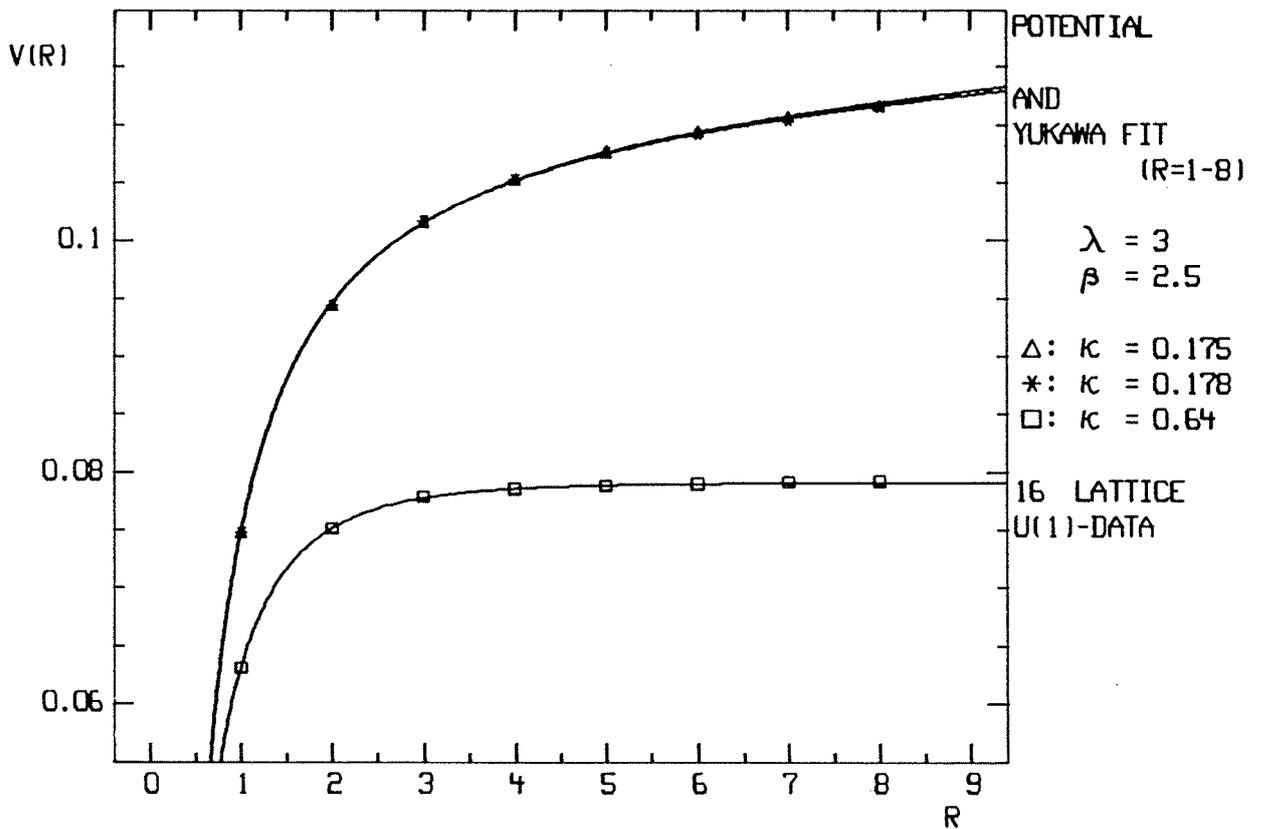


Abb. 3.2: Potentiale im U(1)-Higgs-Modell auf einem 16^4 -Gitter bei $\kappa = 0.175$ kurz unterhalb und $\kappa = 0.178$ kurz oberhalb des Higgs-PÜs (die beiden Kurven fallen nahezu zusammen), sowie bei $\kappa = 0.64$ tief im Higgs-Gebiet. Die durchgezogenen Linien entsprechen Fits gemäß Gl.(3.12).

Da die Photonmasse in den MC-Ergebnissen des 4. Kapitels auch kurz oberhalb des Übergangs noch mit Null verträglich ist, ist keine große Änderung von E_q am PÜ zu erwarten. Abb. 3.2 zeigt, daß sogar das ganze Potential $V(R)$ ($R=1-8$) auf den Higgs-PÜ völlig unempfindlich ist.

Tief im Higgs-Gebiet ist α etwas kleiner als bei $\kappa < \kappa_{PT}$. Das dort stark kondensierte Φ -Feld beeinflußt also das Potential auch schon bei kleinen Abständen.

Potentiale im SU(2)-Higgs-Modell. Abb. 3.3 zeigt die Potentiale, mit Fits gemäß Gl.(3.7). Bei $\kappa = .280$, tief in der Higgs-Region, flacht das Potential (wie in einem Plasma-artigen Gebiet erwartet) sehr schnell ab: die Abschirmung der äußeren Ladungen ist also schon bei kurzen Abständen sichtbar.

Dagegen ist bei $\kappa = .261$, knapp oberhalb des PÜs, und bei $\kappa = .255$ im Confinement-Gebiet kein deutliches Abflachen zu sehen. Dementsprechend ist die in Abb. 3.4 wiedergegebene Saitenspannung dort recht groß, sie reicht schon nahe an die Saitenspannung der reinen Eichtheorie bei $\kappa = 0$ heran. (Bei der Interpretation von Abb. 3.3 muß man beachten, daß periodische Randbedingungen benutzt wurden, wodurch die Daten bei großen R von der linearen Form $\sigma \cdot R$ abweichen müssen.)

Weil das Umfungsverhalten der Wegner-Wilson-Schleifen (und somit $\sigma \equiv 0$) für alle κ bewiesen ist (siehe Kap. 3.3 und [96]), folgt aus Abb. 3.3 und 3.4, daß das mit dem skalaren Feld assoziierte Teilchen in der Confinement-Phase (bei $\kappa = .255$) wie vermutet sehr schwer ist. Der maximal mögliche Abstand von $R = 8$ reicht dann nicht aus, um Paarerzeugung zu verursachen: im Confinement-Gebiet findet bei dem Abstand $R = 8$ noch keine Hadronisierung statt. Das ähnliche Verhalten kurz oberhalb des Übergangs könnte darauf beruhen, daß das skalare Feld auch hier noch recht schwer ist, die Wegner-Wilson-Schleifen also noch nicht ihr asymptotisches Verhalten zeigen.

Das Potential erreicht also auf dem 16^4 -Gitter noch nicht seinen asymptotischen Wert (außer tief im Higgs-Gebiet). Deshalb muß der höchste noch gut meßbare Wert, nämlich $V(R=7)/2$, als Ersatz für $E_q = V(\infty)/2$ dienen.

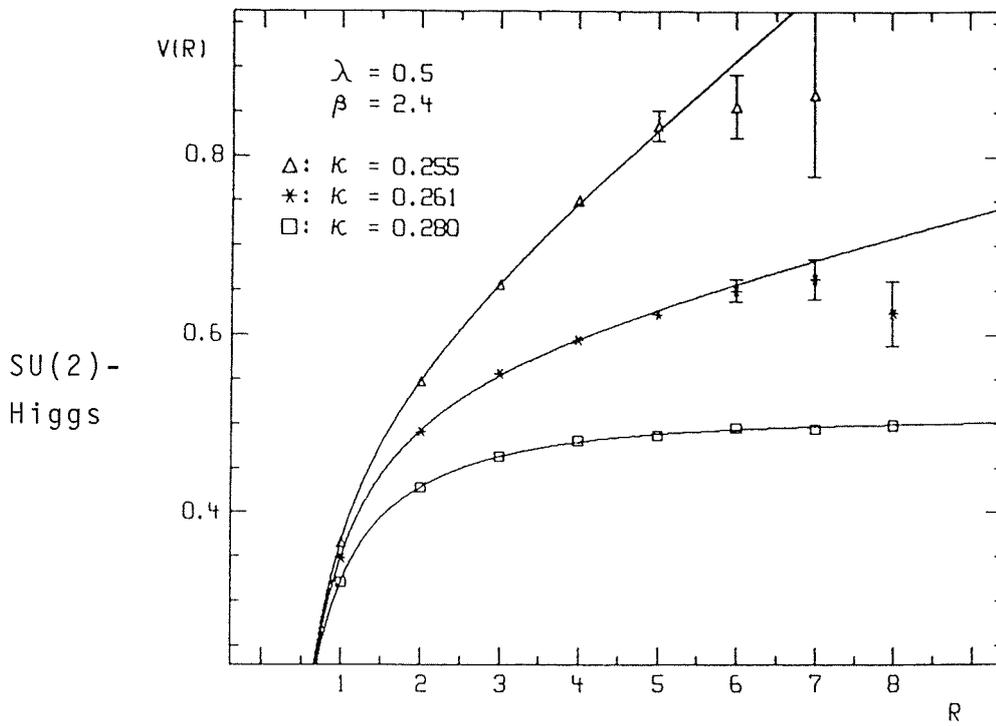


Abb. 3.3: Potentiale im SU(2)-Higgs-Modell auf einem 16^4 -Gitter bei $\kappa = 0.255$ unterhalb und $\kappa = .261$ kurz oberhalb des Higgs-PÜs, sowie bei $\kappa = 0.280$ tief im Higgs-Gebiet. Die durchgezogenen Linien sind Fits gemäß Gl.(3.7).

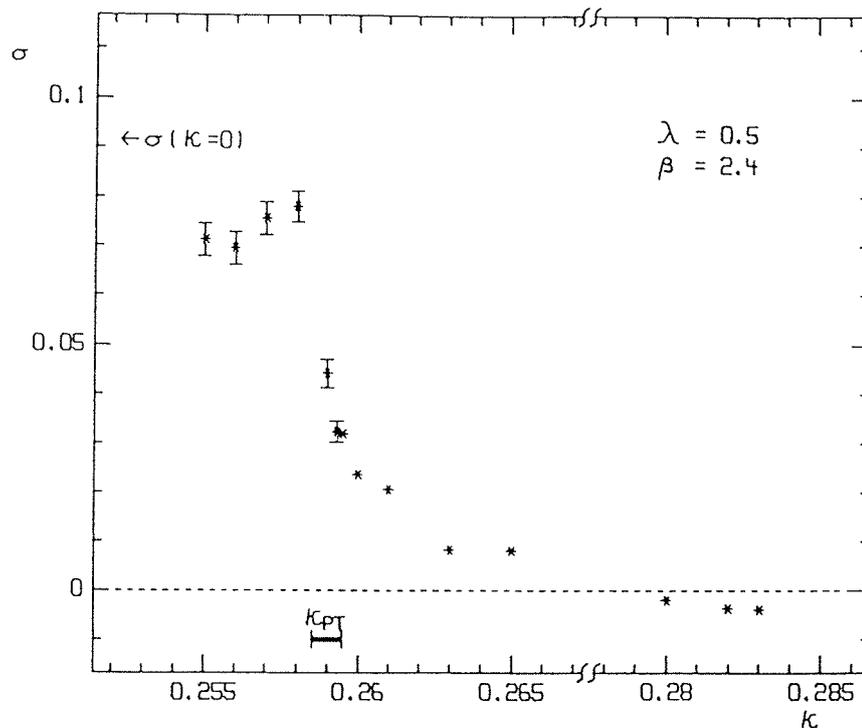


Abb. 3.4: Saitenspannungen σ aus Fits an die Potentiale gemäß Gl.(3.7). Der Pfeil gibt den Wert von σ bei $\beta = 2.4$ und $\kappa = 0$ an [100]. Leicht negative Werte von σ zeigen an, daß bei größeren κ die Parametrisierung Gl.(3.7) unzuweckmäßig wird.

(Dieser Wert ist in Abb. 3.9 in Kap. 3.5 eingetragen. Aufgrund dieser Abbildung kann man auch spekulieren, welcher Gitterabstand nötig wäre, um Hadronisierung zu sehen: wie in Kap. 3.5 erläutert, sollte $\mu = V(\infty)/2$ gelten. Lineare Extrapolation von $V(R)/2$ führt für $\kappa = .255$ erst bei etwa $R = 16$ auf den Wert von μ . Um Hadronisierung zu sehen, müßten also wohl -völlig irrealistische- Gitter deutlich größer als 32^4 verwendet werden.)

Kap. 3.3 Beweis zum Umfangsverhalten der Wegner-Wilson-Schleifen

Für den Spezialfall abelscher Eichsymmetrie und quadratischer Wegner-Wilson-Schleifen wird nun gezeigt, daß diese bei Anwesenheit dynamischer skalarer Materiefelder nach unten durch ein Umfangsverhalten

$$\langle W(R,T) \rangle \geq c_1 e^{-c_2 \cdot (R+T)} \quad (3.14)$$

beschränkt sind [46,96]. Bei Annahme beschränkter Norm $|\Phi|$ des skalaren Feldes folgt aus einer Arbeit von Simon und Yaffe [101] auch eine gleichartige Beschränkung nach oben (siehe [96]), so daß die Wegner-Wilson-Schleifen insgesamt Umfangsverhalten zeigen. Die Erweiterung des Beweises [96] auf nichtabelsche Eichgruppen wird am Ende dieses Abschnittes kurz angesprochen.

Das wesentlich Hilfsmittel des zu führenden Beweises ist Reflektionspositivität bezüglich der 3-dimensionalen diagonalen Hyperebenen $\Pi_y^\pm = \{x \in \mathbb{Z}^4, (x^4 - y^4 = \pm (x^1 - y^1))\}$ durch den Punkt y .

Normalerweise wird Reflektionspositivität -die die Existenz eines Hilbertraumes sichert- für Gittereichtheorien bezüglich der Hyperebene $x^4 = 1/2$ bewiesen [13], welche die Gitterkanten zwischen den Punkten in den Ebenen $x^4 = 0$ und 1 schneidet. Die Ebenen Π_y^\pm schneiden keine Kanten, sondern verlaufen durch Gitterpunkte. Reflektionspositivität des U(1)-Higgs-Modells bezüglich dieser Ebenen folgt als Verallgemeinerung der entsprechenden Untersuchungen von Systemen in der statistischen Mechanik [102], wie im folgenden gezeigt wird.

Jede der Ebenen Π_{ij}^ε , $\varepsilon = \pm 1$, teilt das hyperkubische Gitter Λ , das hier aus Punkten und Kanten bestehen soll, in drei disjunkte Mengen Λ_0 , Λ_+ , Λ_- , wobei Λ_0 aus den Punkten und Kanten besteht, die innerhalb der Hyperebene liegen, Λ_+ die Punkte und Kanten "oberhalb" und Λ_- diejenigen "unterhalb" der Hyperebene enthält. Die Reflektionen r_ε bezüglich der Ebenen Π_{ij}^ε bilden Λ_+ auf Λ_- ab (und umgekehrt) und lassen die Elemente von Λ_0 invariant. Die Aufteilung $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ des Gitters zerlegt die Feldalgebra A in drei entsprechende Subalgebren A_0 , A_+ und A_- , mit Trägern in Λ_0 , Λ_+ bzw. Λ_- . Die Reflektionen r_ε sind mit den folgenden Abbildungen der von den Feldvariablen Φ_x und $U_{x,\mu}$ erzeugten Algebren A_0 , A_+ , A_- verbunden :

$$\theta_\varepsilon \Phi_x = \Phi_{r_\varepsilon(x)}^* \quad , \quad \theta_\varepsilon U_{x,\mu} = U_{r_\varepsilon(x,\mu)}^* \quad . \quad (3.15)$$

θ_ε bildet A_+ auf A_- ab (und umgekehrt) und A_0 auf sich selbst. Die Wirkung S in Gl.(2.43) ist unter den Reflektionen θ_ε invariant. Diese Wirkung kann in die folgenden Teile aufgespalten werden :

- S_0 : alle Terme mit Variablen, deren Träger nur in Λ_0 liegt,
- S_+ : Terme mit Träger in $\Lambda_+ \cup \Lambda_0$, außer denjenigen in S_0 ,
- S_- : Terme mit Träger in $\Lambda_- \cup \Lambda_0$, außer denjenigen in S_0 ,
- S_c : Summe über die von Π_{ij}^ε geschnittenen Plaketten,

$$S = S_0 + S_+ + S_- + S_c \quad . \quad (3.16)$$

Der Anteil S_c hat die Form $-\sum G_+ \theta_\varepsilon G_+$, wobei G_+ Produkte von Kantenvariablen auf der Λ_+ -Seite der geschnittenen Plaketten sind. Somit ist auch die Reihenentwicklung von $\exp(-S_c)$ von der gleichen Form:

$$e^{-S_c} = \sum_j H_+^j \theta_\varepsilon H_+^j \quad . \quad (3.17)$$

Als nächstes wird nun die Positivität des Erwartungswertes $\langle F \theta_\varepsilon F \rangle$ gezeigt, wobei $F \in A_0 \cup A_+$. Das Integrationsmaß ist in Gl.(2.39,2.42) angegeben. Die Idee ist hier, die Integration über Λ_0 abzutrennen, und auszunutzen, daß die Integrationen über Λ_+ und Λ_- für jedes j in Gl.(3.17) faktorisieren :

$$\begin{aligned}
\langle F \theta_\varepsilon F \rangle &= \int \prod_{\Lambda} d\Phi dU e^{-S} F \theta_\varepsilon F \\
&= \int \prod_{\Lambda_0} d\Phi dU e^{-S_0} \prod_{\Lambda_+} d\Phi dU e^{-S_+} \prod_{\Lambda_-} d\Phi dU e^{-S_-} \cdot \\
&\quad \cdot F \theta_\varepsilon F \cdot \sum_j H_+^j \theta_\varepsilon H_+^j \\
&= \int \prod_{\Lambda_0} d\Phi dU e^{-S_0} \sum_j \left| \int \prod_{\Lambda_+} d\Phi dU e^{-S_+} H_+^j F \right|^2 .
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Da der Integrand in dem Integral über Λ_0 offensichtlich positiv ist, ergibt sich die Reflektionspositivität

$$\langle F \theta_\varepsilon F \rangle \geq 0 . \tag{3.19}$$

Hieraus folgt die Existenz eines Skalarproduktes, und für Funktionen $F_1, F_2 \in A_0 \cup A_+$ gilt somit die Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle F_1 \theta_\varepsilon F_2 \rangle| \leq \langle F_1 \theta_\varepsilon F_1 \rangle^{1/2} \langle F_2 \theta_\varepsilon F_2 \rangle^{1/2} . \tag{3.20}$$

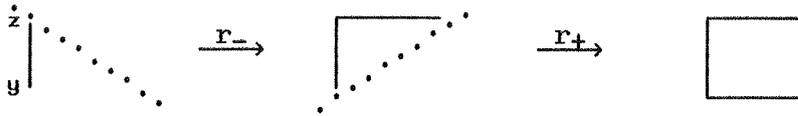
Dieses letzte Ergebnis sei nun auf die Zweipunktfunktion

$$G(T,0) = \langle \rho_z \sigma_z^* \prod_{\ell \in \Gamma} U_\ell \rho_y \sigma_y \rangle , \quad T = z^4 - y^4, \quad \vec{z} = \vec{y} \tag{3.21}$$

angewandt. Die Ebenen Π^\pm verlaufen hier durch die Punkte y bzw. z . Mittels dreimaliger Anwendung der Ungleichung (3.20) ergibt sich

$$\begin{aligned}
G(T,0) &\leq \langle \rho_z^2 \rangle^{1/2} \langle \rho_y \sigma_y \prod_{\Gamma} U \theta_-(\rho_y \sigma_y \prod_{\Gamma} U) \rangle^{1/2} \\
&= \langle \rho_z^2 \rangle^{1/2} \langle \rho_y \sigma_y \theta_-(\rho_y \sigma_y) \prod_{\Gamma} U \theta_-(\prod_{\Gamma} U) \rangle^{1/2} \\
&\leq \langle \rho_z^2 \rangle^{1/2} \langle (\rho_y \theta_- \rho_y)^2 \rangle^{1/4} \langle \prod_{\Gamma} U \prod_{r_-(\Gamma)} \theta_- U \theta_+(\prod_{\Gamma} U \prod_{r_-(\Gamma)} \theta_- U) \rangle^{1/4} \\
&= \langle \rho_z^2 \rangle^{1/2} \langle \rho_y^2 \theta_- \rho_y^2 \rangle^{1/4} W(T,T)^{1/4} \\
&\leq \langle \rho_z^2 \rangle^{1/2} \langle \rho_y^4 \rangle^{1/4} W(T,T)^{1/4} .
\end{aligned} \tag{3.22}$$

In bildlicher Form sind dabei die ersten beiden Reflektionen :



Der letzte Schritt in Gl.(3.22) benutzt wieder die Reflektion r_+ . Da $\langle \rho_z^2 \rangle$ und $\langle \rho_y^4 \rangle$ von z bzw. y unabhängig sind, ergibt sich schließlich das Resultat

$$G(T,0) \leq c W(T,T)^{1/4} \quad , \quad c = \langle \rho^2 \rangle^{1/2} \cdot \langle \rho^4 \rangle^{1/4} > 0 \quad . \quad (3.23)$$

Es fehlt nun noch eine untere Schranke e^{-cT} für $G(T,0)$, um den Beweis zu beenden. Zu ihrer Gewinnung muß man Reflektionspositivität [13] bezüglich Ebenen senkrecht zu $G(T,0)$ (durch Gitterpunkte und in der Mitte zwischen Gitterebenen) ausnutzen. Eine Möglichkeit ist dann, beginnend mit

$$\begin{aligned} G(1,0) &\leq \langle \rho_x^2 \rangle^{1/2} G(2,0)^{1/2} \\ &\leq \langle \rho_x^2 \rangle^{1/2} G(1,0)^{1/4} G(3,0)^{1/4} \\ &\leq \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

iterativ vorzugehen. Ein wesentlich eleganteres Verfahren [96] geht von der Darstellung

$$G(t,0) = (\Phi(y)\Omega, \underline{T}^t \Phi(y)\Omega) \quad , \quad t \in \mathbb{N} \quad (3.25)$$

aus, wobei \underline{T} die Transfermatrix ist, deren Existenz (in der temporären Eichung) durch die Reflexionspositivität gesichert ist. Da die Eigenwerte von \underline{T} zwischen 0 und 1 liegen, gibt es eine Spektraldarstellung

$$(\Phi(y)\Omega, \underline{T}^t \Phi(y)\Omega) = \int d\underline{\mu}(\lambda) \lambda^t \quad , \quad (3.26)$$

wobei $\underline{\mu}$ hier ein positives beschränktes Maß mit Träger in $[0,1]$ ist. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt dann

$$\int d\underline{\mu}(\lambda) \lambda \leq \left[\int d\underline{\mu}(\lambda) \lambda^t \right]^{\frac{1}{t}} \left[\int d\underline{\mu}(\lambda) \right]^{\frac{t-1}{t}} \quad (3.27)$$

und daher

$$G(t,0) \geq G(0,0) \left[\frac{G(1,0)}{G(0,0)} \right]^t \quad . \quad (3.28)$$

Aus Gl.(3.26) folgt $G(1,0) \leq G(0,0)$. Für $\kappa \neq 0$ gilt $G(1,0) \neq 0$. Damit ist das Verhalten

$$G(T,0) \geq \text{const. } e^{-\mu T} \quad (3.29)$$

gezeigt. Zusammen mit Gl.(3.23) folgt das Umfungsverhalten Gl.(3.14) der Wegner-Wilson-Schleifen. (In diesem Beweis wurde stillschweigend Translationsinvarianz vorausgesetzt. Strikt ist dies vermutlich nur in geeigneten thermodynamischen Limites gültig [96].)

Der obige Beweis kann auch auf nichtabelsche Gruppen (also speziell auch auf das SU(2)-Higgs-Modell) ausgedehnt werden, indem die nichtabelschen Matrizen einfach elementweise behandelt werden [96]. Die Form (3.17) der auftretenden Terme bleibt dabei unverändert. In Ref. [96] wird der Beweis auch auf rechteckige Wegner-Wilson-Schleifen verallgemeinert.

3.4 Exponentieller Zerfall der Zweipunktfunktionen.

Die in Gl.(3.1) definierten Zweipunktfunktionen $G(T,R)$ kann man als eichinvariante Verallgemeinerung von Spin-Spin Korrelationsfunktionen auffassen. Letztere dienen dazu, langreichweitige Ordnung in statistisch mechanischen Systemen mit globalen Symmetrien zu charakterisieren. $G(T,R)$ ist aber als Funktion von T nach oben durch exponentiell fallende Funktionen beschränkt [40]. Daher kann $G(T,R)$ keine langreichweitige Ordnung zeigen, in Übereinstimmung mit der Erwartung, daß Fluktuationen der Eichfreiheitsgrade jede langreichweitige Korrelation zerstören [40]. Dies ist auch die Grundlage für den in Kap. 2.2 erwähnten Beweis ([40],s.a.[43]) des Verschwindens nicht-eichinvarianter Erwartungswerte. Der exponentielle Zerfall von $G(T,R)$ liegt also an seiner Eichinvarianz und nicht an einer ungünstigen Wahl der Korrelationsfunktion.

Gemäß Ungl.(3.29) ist $G(T,R)$ auch nach unten beschränkt. Es gilt also

$$c_1 e^{-\mu_1 T} \leq G(T,R) \leq c_2 e^{-\mu_2 T} \quad , \quad (3.30)$$

was das exponentielle Verhalten Gl.(3.2) nahelegt (s.a. Kondo [37]).

Die Untersuchung von $G(T,R)$ kann also Einsicht in die Dynamik von wechselwirkenden Eich- und Materiefeldern geben. Besonders interessant ist die genaue Form seiner funktionalen Abhängigkeit von T und R sowie die physikalische Interpretation des Energie-Parameters μ aus Gl.(3.2), der das Verhalten von $G(T,R)$ bei großen Abständen bestimmt. Der Rest dieses Kapitels ist solchen Fragen gewidmet.

In diesem Abschnitt soll nun zunächst das exponentielle Verhalten Gl.(3.2) anhand der MC-Daten überprüft werden. In Übereinstimmung mit der Interpretation von $G(T,R)$ als Korrelationsfunktion (vgl. Kap. 3.5) wird der Abstand T als "Zeit" aufgefaßt. Der Abstand R charakterisiert die Abhängigkeit von G bezüglich unterschiedlicher Wahl des Pfades Γ zwischen den Punkten x und y in Gl.(3.1).

U(1)-Higgs-Modell. Bei *allen* untersuchten κ -Werten zerfällt hier $G(T,R)$ exponentiell:

$$G(T,R) \sim f_G(R) e^{-\mu T} \quad , \quad 4 \leq T \leq 8 \quad , \quad R \text{ fest} \quad . \quad (3.31)$$

Bei kleineren Abständen, $T < 4$, gibt es Abweichungen von diesem asymptotischen Verhalten. Wie Abb. 3.5 zeigt, ist $\underline{\mu}$ (= Steigung der Geraden in Abb. 3.5) in hohem Maße von R unabhängig.

Das asymptotische Verhalten von $G(T,R)$ sollte in der Coulomb- bzw. der Confinement-Higgs-Phase unterschiedlich sein (vgl. Kap. 3.5). Aufgrund von analytischen Resultaten von Fredenhagen und Marcu [36] erwartet man

$$G(T,R) \sim e^{-(m_c - E_b)T - E_q(T+2R)} \quad (\text{Coulomb-Phase}) \quad (3.32)$$

und

$$G(T,R) \sim e^{-\mu(T+2R)} \quad (\text{Confinement-Higgs-Phase}). \quad (3.33)$$

In der Arbeit [46] ist auch eine Analyse von $G(T,R)$ mit Hilfe der "Hopping-Parameter"-Entwicklung wiedergegeben. Das Resultat reproduziert die obigen Gleichungen.

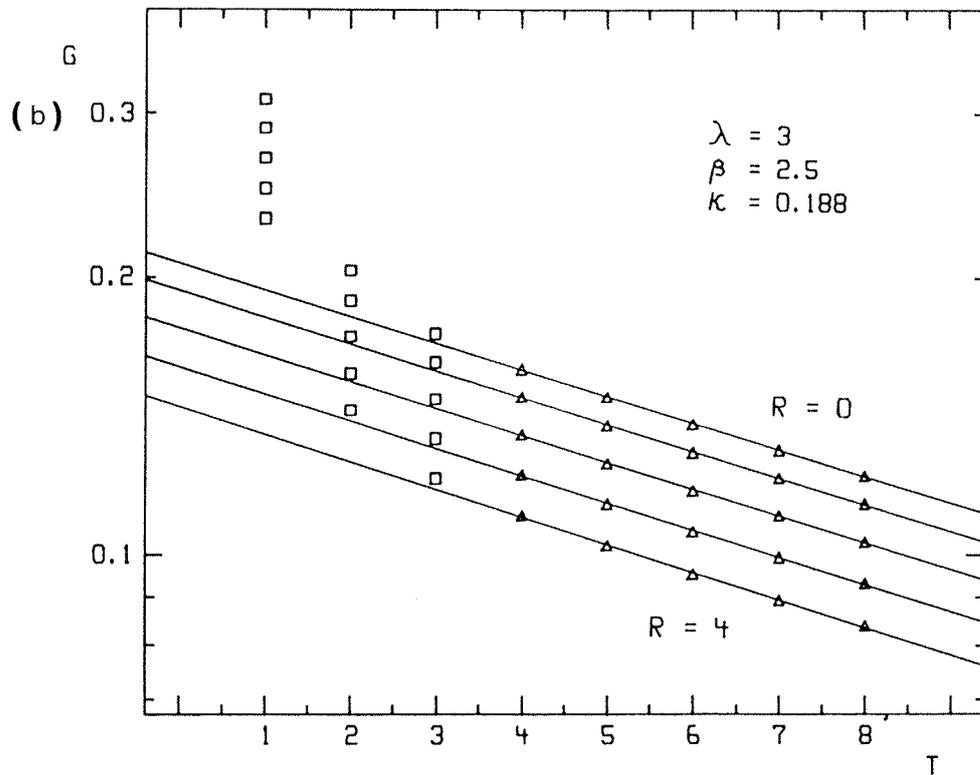
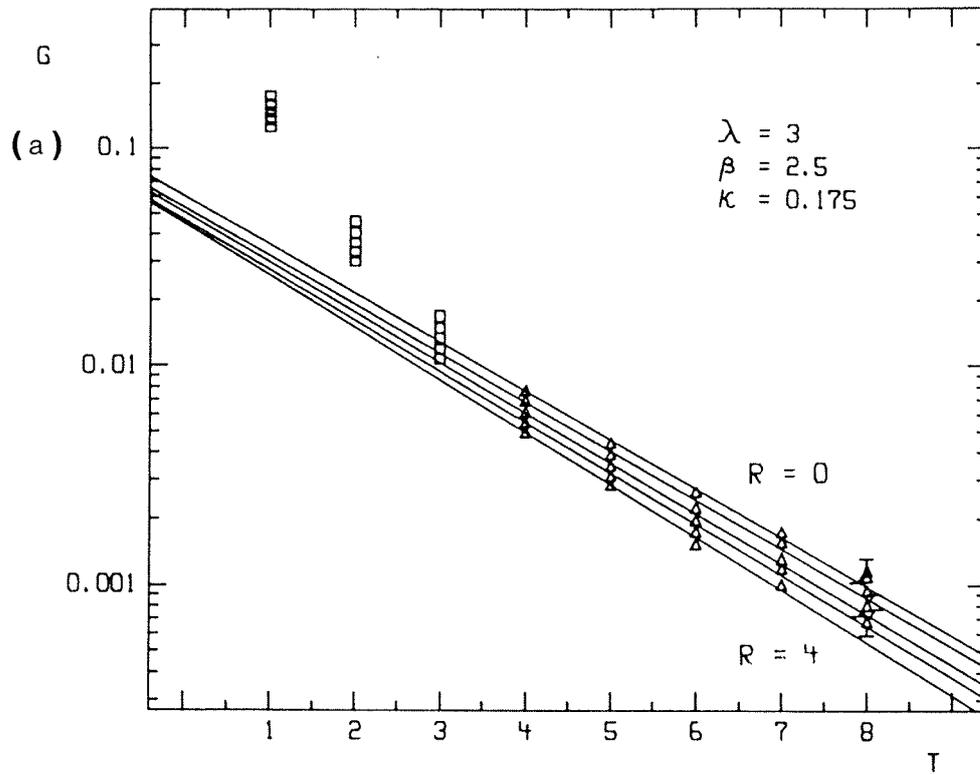


Abb. 3.5: Zweipunktfunktionen $G(T,R)$ im U(1)-Higgs-Modell als Funktion von T , bei (a) $\kappa = 0.175$ und (b) $\kappa = 0.188$, auf einem $8^3 \cdot 16$ -Gitter. R liegt zwischen 0 (jeweils obere Kurve) und 4 (untere Kurve).

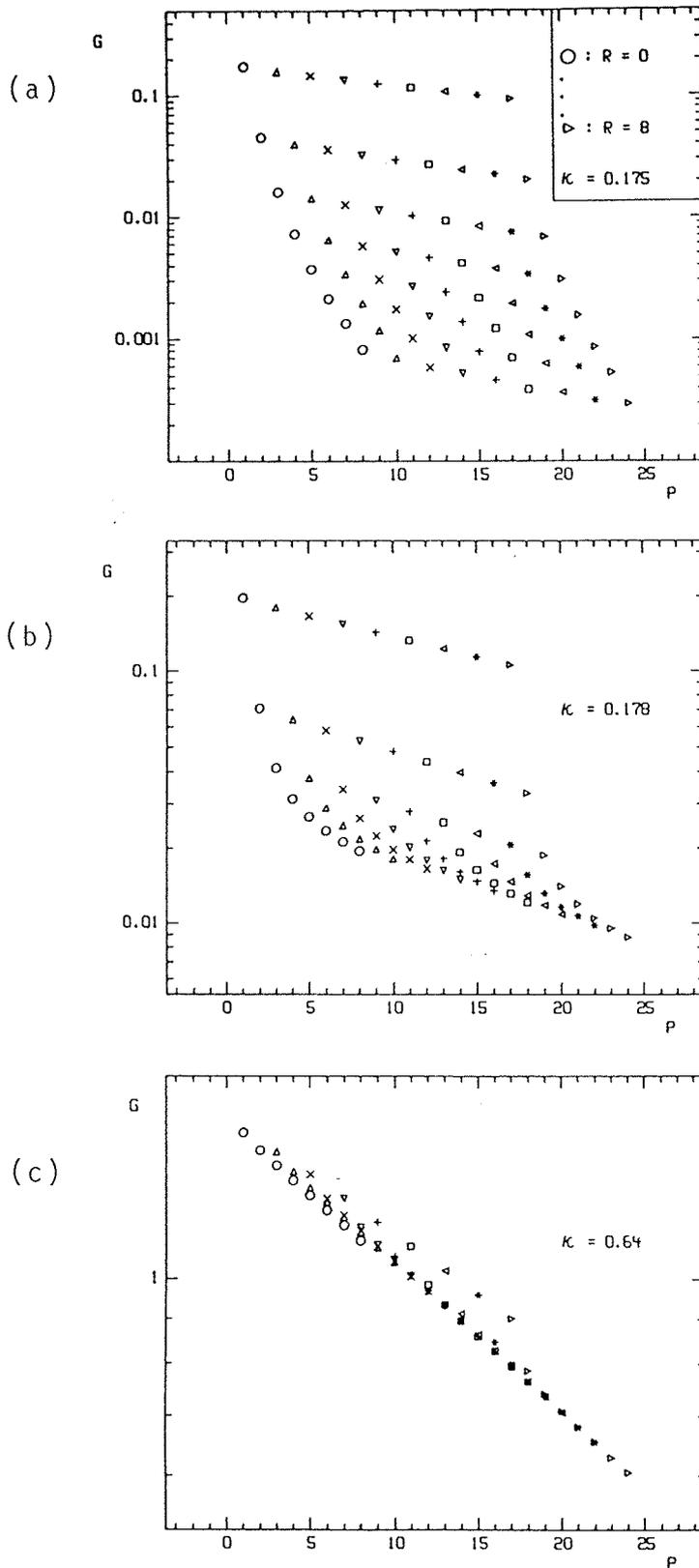


Abb. 3.6: Zweipunktfunktionen $G(T,R)$ im $U(1)$ -Higgs-Modell, auf einem 16^4 -Gitter, als Funktion des "Umfangs" $P = T + 2R$, für festes R zwischen 0 und 8. Verschiedene Symbole stehen für verschiedenes R . Für jedes R liegt der Abstand T zwischen 0 (oben in den Abbildungen) und 8 (unten). Die Daten sind bei $\lambda = 3$, $\beta = 2.5$ und (a) $\kappa = 0.175$ in der Coulomb-Phase, (b) $\kappa = 0.178$ knapp oberhalb des Higgs-PÜs, und (c) bei $\kappa = 0.64$ tief im Higgs-Gebiet gewonnen. Bei den gleichen κ -Werten zeigt Abb. 3.2 die Potentiale.

Die Unterscheidung eines Verhaltens nach Gl.(3.32) bzw. (3.33) ist leicht in der Abb. 3.6 möglich, wo $G(T,R)$ als Funktion des "Umfangs" $P = T + 2R$ dargestellt ist. Das Umfungsverhalten Gl.(3.33) impliziert, daß alle Punkte einer derartigen Abbildung (asymptotisch) auf einer einzigen Geraden liegen. Abb. 3.6c zeigt solches Verhalten tief in der Higgs-Phase. Knapp oberhalb des PÜs, in Abb. 3.6b, erscheint das Umfungsverhalten erst bei sehr großen R und T . Ganz verschieden hiervon ist das Verhalten in der Coulomb-Phase, Abb. 3.6a: in R - bzw. T -Richtung gibt es zwei verschiedene exponentielle Zerfallsraten, in Übereinstimmung mit Gl.(3.32).

Die asymptotische Steigung von $\log G(T,R)$ bei festem R (d.h. feste Symbole in Abb. 3.7) gibt μ . Die Steigung bei festem $T \geq 4$ führt auf die Funktion $f_G(R)$ aus Gl.(3.31). Diese Steigung hat einen Wert von etwa $C \approx 0.1$, nahezu unabhängig von κ . Wenn Gl.(3.32) und (3.33) exakt gültig sind, so ist $C = 2E_q$; seine Konstanz entspricht der im vorigen Abschnitt erwähnten Konstanz von E_q .

SU(2)-Higgs-Modell. Hier gibt es nur die Confinement-Higgs-Phase. Asymptotisch sollte also immer das Umfungsverhalten Gl.(3.33) gelten. Bei der Untersuchung der Wegner-Wilson-Schleifen in Kap. 3.2 wurde aber schon klar, daß auf dem 16^4 -Gitter in der Confinement-Phase keine Hadronisierung stattfindet, also auch kein asymptotisches Verhalten erwartet werden kann. In Abb. 3.7 sind die Zweipunktfunktionen $G(T,R)$ gegen den "Umfang" $P = T + 2R$ aufgetragen, für die gleichen Kopplungen wie beim Potential in Abb. 3.3.

Tief im Higgs-Gebiet, in Abb. 3.7c, und auch kurz oberhalb des Übergangs, in Abb. 3.7b, ist das Verhalten sehr ähnlich zum U(1)-Higgs-Modell: Bei $T \geq 2$ und $R \geq 0$ ist μ unabhängig von R , und $G(T,R)$ zeigt Umfungsverhalten. Dagegen wird in Abb. 3.7a, im Confinement-Gebiet, das nicht-asymptotische Verhalten des Modells offensichtlich.

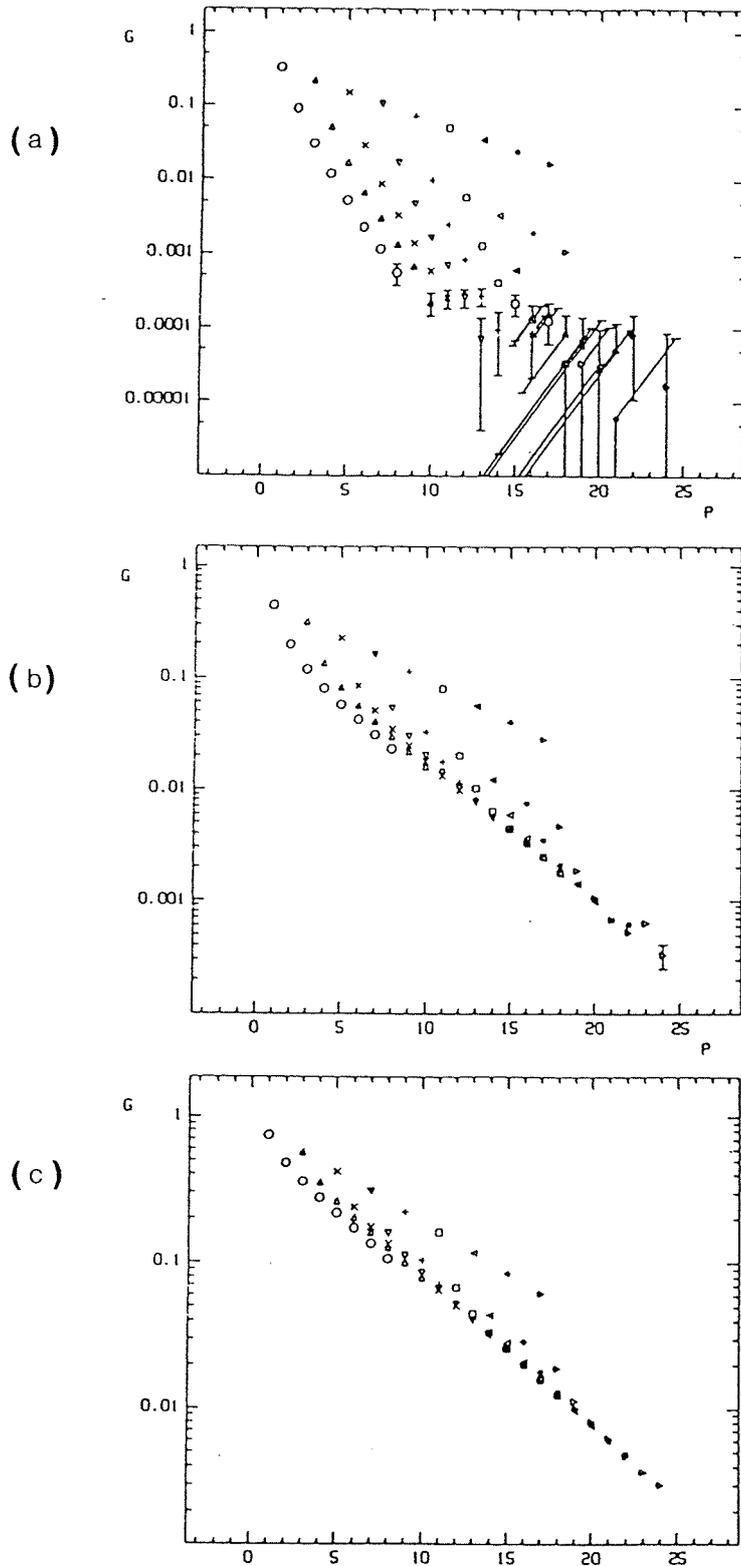


Abb. 3.7: Zu Abb. 3.6 analoge Darstellung der Zweipunktfunktionen $G(T,R)$, hier im $SU(2)$ -Higgs-Modell auf einem 16^4 -Gitter. Die κ -Werte sind die gleichen wie in Abb. 3.3. : (a) $\kappa = 0.255$ im Confinement-Gebiet, (b) $\kappa = 0.261$ kurz oberhalb des Higgs-PÜs, und (c) $\kappa = 0.28$ tief im Higgs-Gebiet.

3.5 Interpretation der Abschirmenergie μ .

In diesem Abschnitt gebe ich zunächst eine physikalische Interpretation des Parameters μ . Anschließend werden daraus für die verschiedenen Phasen der Modelle Schlußfolgerungen gezogen und anhand der Monte-Carlo-Daten überprüft. Einige Bemerkungen zu einer heuristischen Interpretation des Higgs-Mechanismus schließen diesen Abschnitt ab.

Die physikalische Bedeutung von μ kann man in der temporären Eichung [13,95] sehen. Der Paralleltransporter in Zeitrichtung auf dem Pfad Γ ist dann 1 und $G(R,T)$ reduziert sich, wie in Kap. 3.1 schon angedeutet, auf eine Korrelationsfunktion in Zeitrichtung zwischen zwei Feldprodukten der Form

$$D(\vec{x}, \vec{x} + \vec{R}) = \prod_{\ell} U_{\ell} \Phi_{\vec{x}, t}^{\vec{x}}, \quad \ell \in \text{Linie } (t, \vec{x} \rightarrow t, \vec{x} + \vec{R}) \quad (3.34)$$

für $t = 0$ und $t = T$. Diese Produkte sind nicht eichinvariant. Analog zu Wegner-Wilson-Schleifen werden die zur Korrelationsfunktion beitragenden Zustände üblicherweise so interpretiert, daß es am Raumpunkt $\vec{x} + \vec{R}$ eine äußere Quelle gibt, die zusammen mit den durch D erzeugten Zuständen ein ladungsneutrales System bildet. Das Verhalten von $G(T,R)$ für große T projiziert aus diesem System die Zustände niedrigster Energie heraus. Hieraus folgt:

$$\mu \text{ ist die niedrigste Energie in den Feldern, die eine äußere punktförmige Ladung } q \text{ abschirmen.} \quad (3.35)$$

Heuristisch ist μ also in der Coulomb-Phase die Energie eines dem Grundzustand von Wasserstoff vergleichbaren Systems (Feldenergie + "Elektron"-Masse). Das Analogon in der Confinement-Region ist z.B. ein B-Meson. In der Higgs Region ist μ die Energie in den Feldern um eine, nun wie durch ein Plasma abgeschirmte, äußere Ladung herum.

Die äußeren Quellen in der obigen, nicht eichinvarianten, Beschreibung kann man zum Zwecke einer völlig eichinvarianten Argumentation auch durch ein zusätzlich in die Theorie eingeführtes schweres Feld ersetzen [46], was zur gleichen physikalischen Interpretation führt.

Die R-Unabhängigkeit von μ wird nun klar: Für alle R trägt derselbe Zustand niedrigster Energie bei. Sein Beitrag ist lediglich mit $f_G(R)$ gewichtet. Gäbe es in Gl.(3.1) keinen Paralleltransporter zwischen den beiden Ladungen, so würde $f_G(R)$ in der Coulomb-Phase die Dichte der dynamischen geladenen Teilchen messen. Die Anwesenheit eines Paralleltransporters macht eine solche Interpretation schwierig. Ignoriert man dieses Problem, so gibt das exponentielle Abfallen $f_G(R) \sim e^{-CR}$, $C \approx 0.1$ ein grobes Maß für die Größe des "Wasserstoffatoms" in der Coulomb-Phase. Der sehr niedrige Wert von C impliziert einen sehr ausgedehnten Zustand, wie für schwache Coulomb-Kräfte (Gl.(3.13)) zu erwarten. Aus $C \approx 0.1$ folgt ein Bohr-Radius von etwa $20a$.

Confinement-Higgs-Phase. Hier sind äußere Ladungen *immer* abgeschirmt. Daher stimmen die Interpretation (3.10) von E_q und diejenige (Gl.(3.35)) von μ überein, und man kann

$$\mu = E_q \tag{3.36}$$

erwarten. Da μ und E_q aus konzeptionell unterschiedlichen Größen, nämlich den Zweipunktfunktionen $G(T,R)$ bzw. den Wegner-Wilson-Schleifen bestimmt werden, ist Gl.(3.36) ein Test für die Gültigkeit der physikalischen Interpretation beider Größen. Aus den Gl.((3.36) und (3.32), (3.33) sieht man auch, daß die Zweipunktfunktionen $G(T,R)$ in R-Richtung immer, wie die Wegner-Wilson-Schleifen, mit E_q abfallen. Die Monte-Carlo-Ergebnisse zu μ und E_q sind in den Abbildungen 3.8 und 3.9 dargestellt.

Im Higgs-Gebiet stehen die Daten in beiden Modellen in guter Übereinstimmung mit Gl.(3.36). Im SU(2)-Fall sind μ und E_q dort nahezu identisch.

Im U(1)-Fall (Abb. 3.8) nähert sich μ für $\kappa > \kappa_{PT}$ schnell an E_q an und Gleichung (3.36) ist bei $\kappa \gtrsim 0.188$ gut erfüllt. Der (vermutliche) Grund für die Abweichungen bei $\kappa = 0.179$ und 0.180 ist aus Abb. 3.6b ersichtlich: Die asymptotische Steigung der Zweipunktfunktionen wird erst bei sehr großen T (und anscheinend auch erst bei großen R) erreicht. Zur Bestimmung von μ wurden aber Fits ab $T = 4$ (bei festem $R = 1$) durchgeführt. Der resultierende Wert für μ ist also kurz oberhalb des PÜs nicht-asymptotisch und zu hoch. Die Steigung der Zweipunktfunktionen in R-Richtung ist in allen drei Bildern der Abb. 3.6 nahezu konstant, nämlich gleich E_q (wie aus $\mu = E_q$ in Abb. 3.6c folgt). Aufgrund von Abb. 3.6b kann man also vermuten,

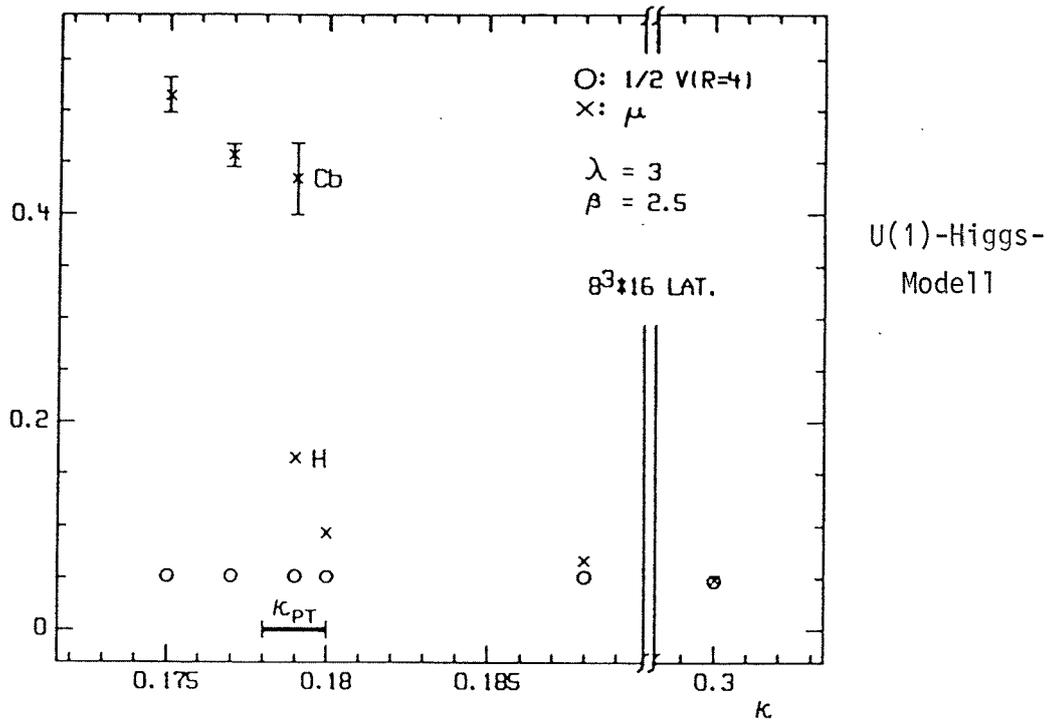


Abb. 3.8: Vergleich des Potentials bei großen Abständen $E_q = V(\infty)/2$, angenähert durch $V(4)/2$ (Kreise), mit der Abschirmenergie μ (Kreuze), im U(1)-Higgs-Modell auf einem $8^3 \cdot 16$ -Gitter. μ wurde aus dem exponentiellen Zerfall der Zweipunktfunktionen $G(T, R=1)$ bestimmt. Bei $\kappa = 0.179$ gab es zwei langlebige Zustände (s. Kap.2.6), einen in der Coulomb-Phase (Cb), und einen im Higgs-Gebiet (H).

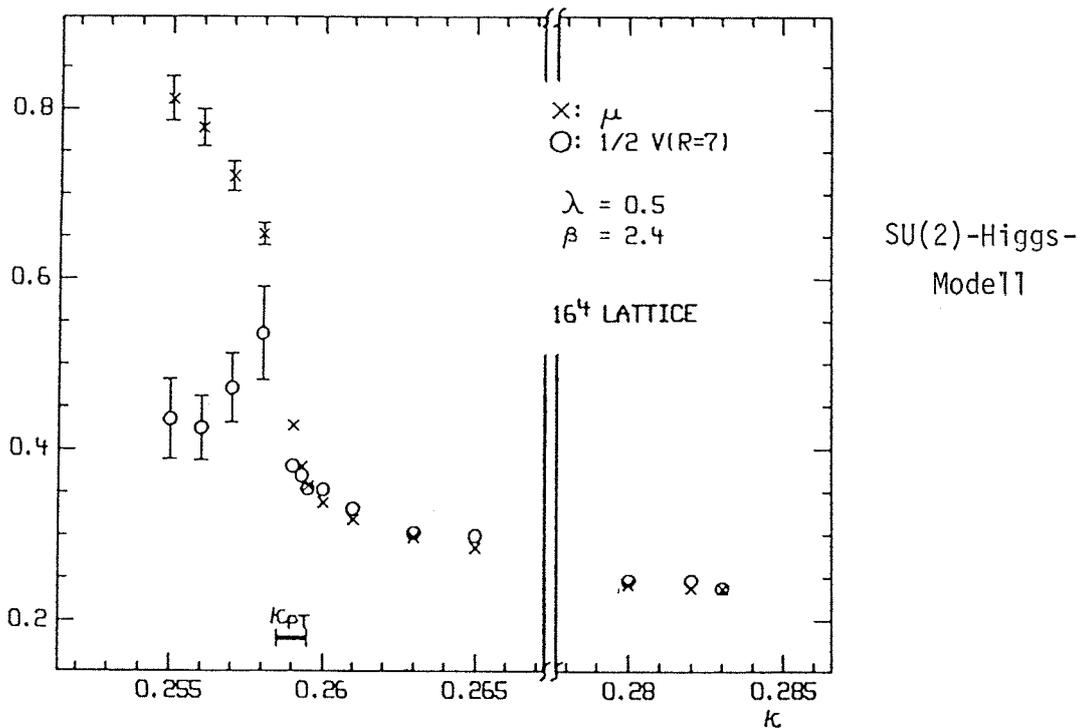


Abb. 3.9: Vergleich von μ und $E_q \approx V(7)/2$, analog zu Abb. 3.8, im SU(2)-Higgs-Modell auf einem 16^4 -Gitter.

daß auch dort die asymptotische Steigung in T-Richtung gleich derjenigen in R-Richtung ist, daß also $\mu = E_q$ gilt. Ein weiterer möglicher Grund für die Abweichung wären (bei einem Übergang 1. Ordnung) die auf endlichem Gitter noch möglichen kurzzeitigen "Ausflüge" in die Coulomb-Phase.

Im Confinement-Gebiet des SU(2)-Higgs-Modells hat noch keine Hadronisierung eingesetzt. Die äußeren Ladungen sind nicht abgeschirmt; E_q mißt nur Feldenergie. Dagegen ist in μ zusätzlich die Masse eines schweren geladenen "Konstituenten"-Teilchens enthalten. Deshalb ist es plausibel, daß das aus den (nicht-asymptotischen!) Fits bestimmte μ in Abb. 3.9 größer ist als E_q .

Coulomb-Phase. In dieser Phase sind eichinvariante Zustände endlicher Energie zu erwarten, die mit dem dynamischen Feld Φ assoziiert sind und im Sinne des Gaußschen Gesetzes geladen sind. Der Zustand mit der niedrigsten Energie wird im folgenden als geladenes Teilchen c , mit Masse m_c , bezeichnet. Es ist wichtig zu beachten, daß geladene Zustände nicht durch die Wirkung des lokalen Feldes Φ_x auf das Vakuum erzeugt werden. Ein solcher Zustand wäre nicht eichinvariant. Geladene Zustände können nicht durch lokale Operatoren erzeugt werden [103-105]. Ihre Konstruktion ist eine große Herausforderung in der Quantenfeldtheorie.

Ein bequemer Weg, die Eigenschaften eines geladenen Teilchens im eichinvarianten Formalismus zu studieren, ist seine Untersuchung bei Anwesenheit einer äußeren Quelle q . Das Gesamtsystem ist dann neutral (wie das erwähnte Wasserstoffatom), kann also durch einen lokalisierten Zustand beschrieben werden. Als Instrument zum Studium eines solchen Systems bietet sich $G(T,R)$ an. Die Abschirmenergie ist dann die niedrigste Energie des "Wasserstoffatoms"; es gilt

$$\mu = E_q + m_c - E_b(cq) \quad \text{in der Coulomb Phase.} \quad (3.37)$$

$E_b(cq) \geq 0$ ist hier die größte Bindungsenergie des c - q -Systems und eine Funktion von m_c . Sie ist analog zur Bindungsenergie eines Wasserstoffatoms im Kontinuum, wo gilt

$$E_b(cq) = \frac{1}{2} m_c \alpha^2 . \quad (3.38)$$

Auf dem Gitter kann die Energie $E_b(cq)$ als Funktion von m_c im Prinzip auch aus dem Potential $V(R)$ berechnet werden, indem man die entsprechende Schrödingergleichung löst. Wenn also μ , $V(R)$ und E_q in MC-Rechnungen bekannt sind, ist m_c eine aus Gl.(3.37) berechenbare Größe.

Die Daten in der Abbildung 3.8 zeigen deutlich, daß in der Coulomb-Phase $\mu > E_q$ gilt. Die Masse m_c ist also bei $\lambda = 3$ und $\beta = 2.5$ bis unmittelbar zum Higgs-Übergang von Null verschieden. Eine einfache Abschätzung für die Bindungsenergie aus der Kontinuumsformel (3.38) und dem Wert Gl.(3.13) für α ergibt etwa $0.06 \cdot m_c$; sie ist also bei $\beta = 2.5$ in Gl.(3.37) vernachlässigbar. Die Masse m_c des geladenen Teilchens stimmt daher praktisch mit $\mu - E_q$ überein. Aus der Abb. 3.8 kann man für das $8^3 \cdot 16$ -Gitter bei $\kappa = 0.179, 0.177$ und 0.175 die Werte $m_c \approx \mu - E_q = 0.35, 0.40$ und 0.46 mit Fehlern ± 0.05 entnehmen. Auf dem 16^4 -Gitter ist bei $\kappa = 0.175$ der Wert von m_c etwa 0.54 . Im Grenzfall $\kappa \rightarrow 0$ steigt die nackte Masse $\log(1/\kappa)$ des Φ -Feldes gegen Unendlich. Es ist zu erwarten, daß bei $\kappa \rightarrow 0$ auch μ und m_c unendlich werden.

Nach einem Vorschlag von Fredenhagen und Marcu [36] kann die Masse m_c des geladenen Teilchens auch aus einem geeigneten Quotienten von Zweipunktfunktionen und Wegner-Wilson-Schleifen bestimmt werden. Bei festem Abstand R , der so groß sein muß, daß der Zustand cq nicht mehr gebunden ist, sagen Fredenhagen und Marcu in der Coulomb-Phase

$$\rho_{FM}(T,R) = \frac{G(T,R)}{\sqrt{W(T,2R)}} \sim \frac{e^{-m_c T - E_q(2R+T)}}{e^{-E_q(2R+T)}} = e^{-m_c T} \quad (3.39)$$

voraus (bis auf Potenzkorrekturen). Hier muß keine Bindungsenergie berücksichtigt werden. Andererseits ist der betrachtete Limes numerisch schwieriger realisierbar als derjenige für die Berechnung von μ , weil jetzt sowohl R als auch T groß sein müssen. Auf dem 16^4 -Gitter wurde ρ_{FM} bei $\kappa = 0.175$ gemäß Gl.(3.39) bestimmt. Der resultierende Wert $m_c = 0.50(5)$ stimmt mit dem oben zitierten $\mu - E_q \approx 0.54$ überein. Aufgrund der geringen Bindungsenergie ist dies nicht sehr überraschend.

Diskontinuität von μ am Higgs-PÜ. Wie man in Abb. 3.8 sieht, weist die Abschirmenergie μ am Higgs-PÜ bei $\lambda = 3$ und $\beta = 2.5$ eine deutliche Diskontinuität auf. Der Wert $\lambda = 3$ war ursprünglich gewählt worden, weil es hier, im Gegensatz zur Situation bei kleineren λ , in der Observablen $\langle \Phi^* U \Phi \rangle$ keinen bemerkbaren Sprung gibt (vgl. Kap. 2.5). Hier war daher ein PÜ 2. Ordnung erwartet worden.

In langen MC-Läufen bei $\kappa \approx \kappa_{PT}$ traten dann allerdings zwei verschiedene Verhalten von $\Phi^* U \Phi$ auf, die sich durch den Grad der Fluktuationen unterscheiden, wobei aber der Mittelwert $\langle \Phi^* U \Phi \rangle$ nahezu derselbe ist. Jedes dieser Fluktuationenmuster blieb zum Teil über sehr lange MC-Zeit hin erhalten. Die Abb. 2.5 in Kap. 2.6 zeigt ein Beispiel hierfür.

Dieses Verhalten deutet auf das Vorliegen zweier sehr langlebiger metastabiler Zustände hin. Sie unterscheiden sich aber weder in $\langle \Phi^* U \Phi \rangle$, noch in einer anderen untersuchten lokalen Observablen, wodurch ihre Langlebigkeit sehr erstaunlich zu sein schien. Erst die Berechnung der nichtlokalen Observablen μ , getrennt bei jedem der beiden Zustände in Abb. 2.5, ergab einen Sprung, nämlich zwischen den beiden in Abb. 3.8 bei $\kappa = 0.179$ gezeigten Werten. Der Zustand mit geringeren Fluktuationen in Abb. 2.5 hat einen kleineren Wert von μ und gehört zur Higgs-Phase, wohingegen der Zustand mit größeren Fluktuationen ein großes μ hat und zur Coulomb-Phase gehört.

Die Abschirmenergie μ ist also ein auf den Higgs-PÜ sehr empfindlicher Parameter, der geeignet ist, zwischen der Coulomb-Phase und dem Higgs-Gebiet der Confinement-Higgs-Phase zu unterscheiden. Der große Sprung in μ deutet für $\lambda = 3$, $\beta = 2.5$ auf einen PÜ 1. Ordnung hin, trotz des kontinuierlichen Verhaltens der lokalen Observablen. Die Abb. 3.10 zeigt, daß dieser Sprung auch auf Gittern der Größe 12^4 und 16^4 auftritt. Die vorhandenen Daten reichen aber nicht aus, die Abhängigkeit des Sprungs von der Gittergröße zu bestimmen. Es ist nicht auszuschließen, daß Daten in der einen Phase durch kurze "Ausflüge" des Systems in die andere Phase beeinflusst sind. Es könnte sein (s. Abb. 3.10), daß der Sprung in μ mit zunehmender Gittergröße kleiner wird. Eine endgültige Aussage über die Ordnung des PÜs kann deshalb noch nicht gemacht werden.

U(1)-Higgs

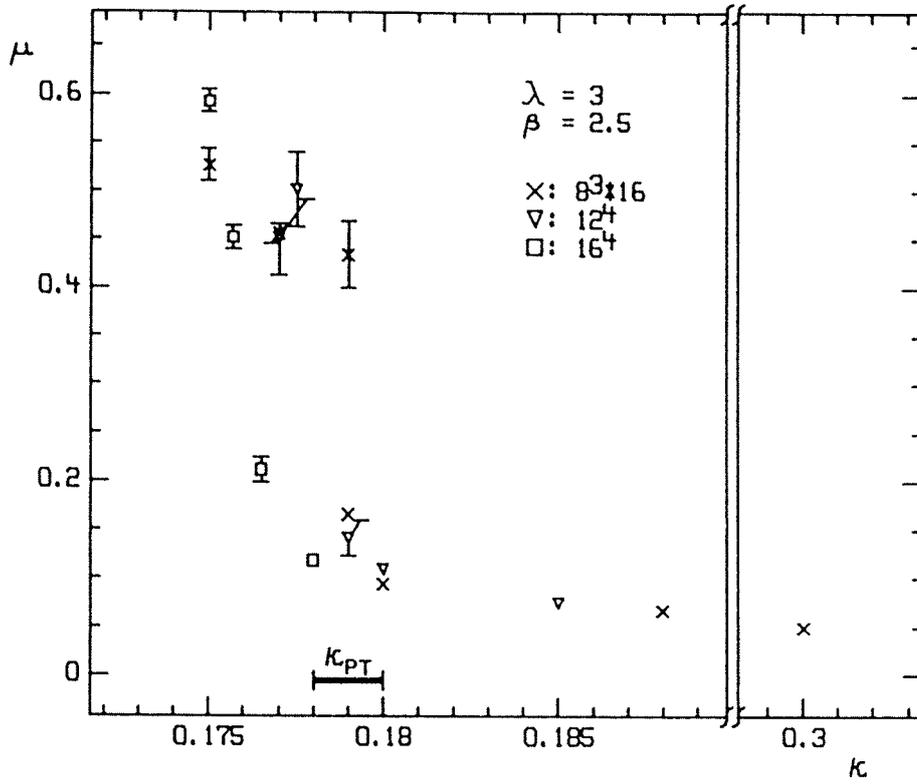


Abb. 3.10: Vergleich der Werte von μ auf Gittern der Größe 16^4 (Quadrate), 12^4 (Dreiecke) und $8^3 \cdot 16$ (Kreuze). Bei $\kappa = 0.179$ sind für das $8^3 \cdot 16$ -Gitter zwei Werte angegeben, die zwei metastabilen Zuständen entsprechen.

Zum Higgs-Mechanismus im U(1)-Higgs-Modell. Da E_q sich am PÜ praktisch nicht ändert, wird der Sprung in μ durch eine plötzliche Verringerung von $m_c - E_b$ verursacht. Weil E_b sehr klein ist (s.o.), ist es also die Masse m_c des geladenen Teilchens, die sich am Higgs-PÜ drastisch ändert. Das folgende Bild der Situation in den verschiedenen Gebieten liegt nahe :

In der *Coulomb-Phase* ist die Differenz $\mu - E_q = m_c - E_b$ groß: das geladene Teilchen c ist schwer. Im *Confinement-Gebiet* kann man von einer schweren Konstituentenmasse des dynamischen Teilchens sprechen (korrespondierend zu hoher nackter Masse $\log(1/\kappa)$ des skalaren Feldes in der Hopping-Parameter-Entwicklung). In beiden Fällen kostet Paarerzeugung viel Energie. Der niedrigste Energiezustand eines Paares weit voneinander entfernter äußerer Quellen enthält in der Coulomb-Phase keine Paare dynamischer Ladungen und im Confinement-Gebiet nur ein einziges Paar.

Am *Higgs-Übergang* dagegen fällt im U(1)-Higgs-Modell die Differenz $\mu - E_q$ auf Null. Es kostet im Higgs-Gebiet nun beliebig wenig Energie, Paare geladener Teilchen zu erzeugen. Es gibt dort schon im Vakuum ein *Kondensat* geladener Teilchen (vgl. Gl.(2.13,2.48)). In diesem Kondensat geladener Teilchen findet nunmehr Debye-Hückel Plasma-Abschirmung statt. In dem Maße, wie das Kondensat dichter wird (und $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$ wächst), steigt auch die Photonmasse langsam über Null hinaus (s. Kap. 4) : der Higgs-Mechanismus erfüllt seinen Zweck.

3.6 Ordnungsparameter.

Wie in Kap. 3.2 dargestellt wurde, versagt für $\kappa > 0$ das Wilson-Kriterium bei der Unterscheidung der Coulomb- von der Confinement-Higgs-Phase. Die Konstruktion einer statt dessen als Ordnungsparameter tauglichen Größe stellt eine Herausforderung dar [35,36,38].

Abschirmenergie-Parameter ρ_{Ac}^m . Die abrupte Änderung von $\mu - E_q$ am Higgs-PÜ legt seine Verwendung für einen Ordnungsparameter nahe. In der Confinement-Higgs-Phase ist die physikalische Interpretation von μ und E_q

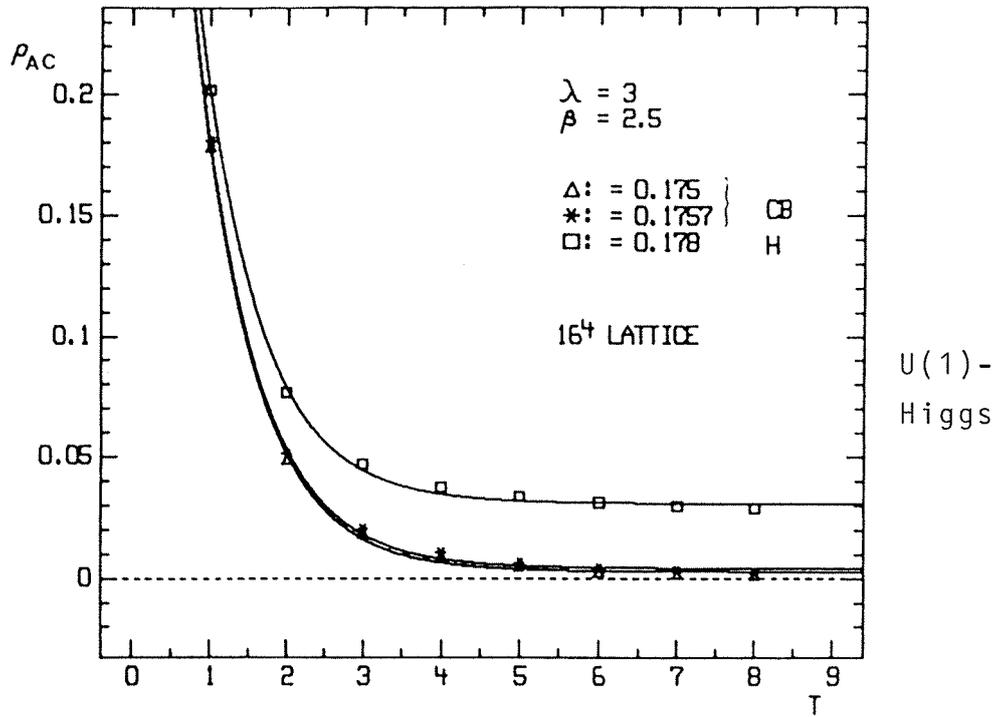


Abb. 3.11: Das Verhältnis $\rho_{AC}(T)$, Gl.(3.40), auf einem 16^4 -Gitter bei 3 Werten von κ : $\kappa = 0.175$ und 0.1757 in der Coulomb-Phase, und $\kappa = 0.178$ im Higgs-Gebiet. Die durchgezogenen Linien stehen für Fits gemäß Gl.(3.44). Die Daten konvergieren sehr schnell zu ihren asymptotischen Werten.

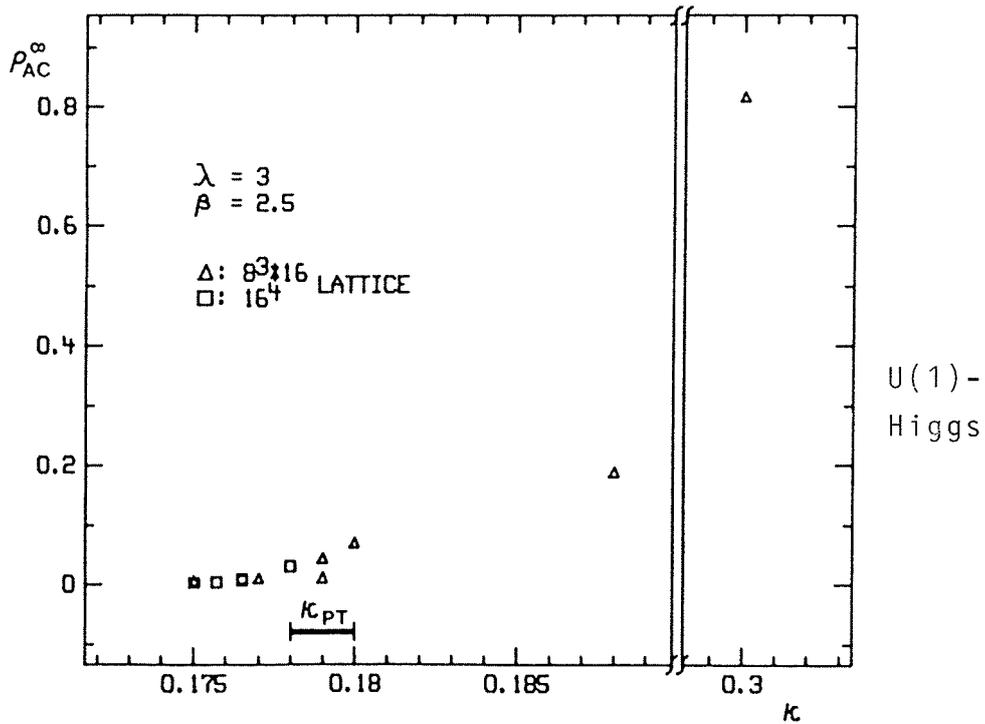


Abb. 3.12: Asymptotische Werte ρ_{AC}^∞ von $\rho_{AC}(T)$ im U(1)-Higgs-Modell, aus Fits gemäß Gl.(3.44). Die Werte fallen mit denjenigen von ρ_{FM}^∞ zusammen (s.u.).

identisch: der Zustand niedrigster Energie, der eine äußere Ladung enthält, ist identisch mit der abgeschirmten äußeren Ladung. Daher verschwindet hier $\mu - E_q$ (Gl.(3.36)). In einer Phase mit freien Ladungen dagegen kann die äußere Ladung sowohl frei als auch abgeschirmt existieren, mit im allgemeinen verschiedenen Energien μ und E_q .

Die Größen μ und E_q sind über das asymptotische Verhalten von Zweipunktfunktionen (Gl.(3.2)) bzw. Wegner-Wilson-Schleifen (Gl.(3.9)) definiert. Die Angemessenheit der dort angesetzten funktionalen Formen wurde in Kap. 3.3 (Gl.(3.14)) und Kap. 3.4 (Gl.(3.30)) gezeigt. Die Differenz $\mu - E_q$ taucht daher asymptotisch in dem Quotienten

$$\rho_{AC}(T) := \frac{G(T,0)}{W(T,T)^{1/4}} = \frac{\langle \overset{x}{\downarrow} T \rangle}{\langle \underset{\square}{\uparrow} T \rangle^{1/4}} \quad (3.40)$$

auf:

$$\rho_{AC}(T) \sim e^{-(\mu - E_q)T} \quad (3.41)$$

Deshalb kann man erwarten, daß

$$\rho_{AC}^{\infty} := \lim_{T \rightarrow \infty} \rho_{AC}(T) \begin{cases} \neq 0 & \text{(Confinement)} \\ = 0 & \text{(freie Ladungen)} \end{cases} \quad (3.42)$$

gilt; ρ_{AC}^{∞} ist also ein (nichtlokaler) Ordnungsparameter, der in einer Phase mit freien Ladungen verschwindet.

Bei dem Beweis des Umfungsverhaltens der Wegner-Wilson-Schleifen wurde auch bewiesen (Gl.(3.23)), daß $\rho_{AC}(T)$ allgemein durch eine T-unabhängige Konstante nach oben beschränkt ist. Aus

$$W(T,T)^{1/4} \geq c G(T,0) \quad .$$

folgt mit Gl.(3.41) :

$$\underline{\mu - E_q} \geq 0 \quad . \quad (3.43)$$

Die niedrigste Energie einer *abgeschirmten* äußeren Ladung ist also nie kleiner als diejenige einer freien äußeren Ladung. Wenn die Terminologie von Gl.(3.37) anwendbar ist (also in der Coulomb-Phase) bedeutet dies, daß die Bindungsenergie $E_b(cq)$ nie größer sein kann als die Masse des geladenen Teilchens.

Für das U(1)-Higgs-Modell sind in Abb. 3.11 die MC-Ergebnisse zu $\rho_{AC}(T)$ auf dem 16^4 -Gitter dargestellt. Die Daten stehen mit der Vorhersage Gl.(3.42) im Einklang. Dies korrespondiert mit dem Verhalten von $\mu - E_q$, das man aus Abb. 3.8 ablesen kann. Es ist bemerkenswert, daß $\rho_{AC}(T)$ sich in beiden Phasengebieten schon bei kleinen T an seinen asymptotischen Wert annähert. Um diesen asymptotischen Wert ρ_{AC}^0 zu bestimmen, wurden Fits gemäß

$$\rho_{AC}(T) = A_{AC} + B_{AC} \cdot e^{-C_{AC}T} \quad (3.44)$$

durchgeführt. Sie sind ebenfalls in Abb. 3.11 dargestellt. Die resultierenden Werte für ρ_{AC}^0 zeigt die Abb. 3.12. Sie stimmen sehr gut mit der Vorhersage Gl.(3.42) überein. (*Anmerkung:* Der obere Wert $\rho_{AC}^0 > 0$ bei $\kappa = 0.179$ korrespondiert zum unteren Wert von μ in Abb. 3.8. Da dort der Fit $\mu - E_q > 0$ ergab, woraus eigentlich $\rho_{AC}^0 = 0$ folgen sollte, ist die Abweichung von Null in Abb. 3.12 ein Anhaltspunkt für die Größe der systematischen Fehler in den durchgeführten Fits. Siehe hierzu auch die Bemerkungen bei Abb. 3.8.)

Auch für das SU(2)-Higgs-Modell wurde $\rho_{AC}(T)$ berechnet. Die Ergebnisse, bei den auch in früheren Abbildungen schon verwendeten κ -Werten, sind in Abb. 3.13 dargestellt. Bei $\kappa = 0.261$ und 0.28 erreicht $\rho_{AC}(T)$ schnell einen anscheinend asymptotischen Wert, der größer als Null ist. Bei $\kappa = 0.255$ im Confinement-Gebiet verhält sich das SU(2)-Higgs-Modell auf dem 16^4 -Gitter noch nicht asymptotisch. Tatsächlich fällt ρ_{AC} bei $\kappa = 0.255$ im Confinement-Gebiet auf Werte ab, die mit Null verträglich sind. Die beiden auseinanderggezogenen schweren dynamischen Ladungen benehmen sich bei den niedrigen erreichten Abständen noch wie statische Ladungen in der reinen Eichtheorie. Erst wenn bei viel größeren Abständen Hadronisierung einsetzt, ist ein *Wiederanstieg* von ρ_{AC} zu erwarten [36]. Als Näherung für ρ_{AC}^0 sind in Abb. 3.15 (s.u.) die Werte A_{AC} aus Fits gemäß Gl.(3.44) angegeben.

SU(2)-Higgs

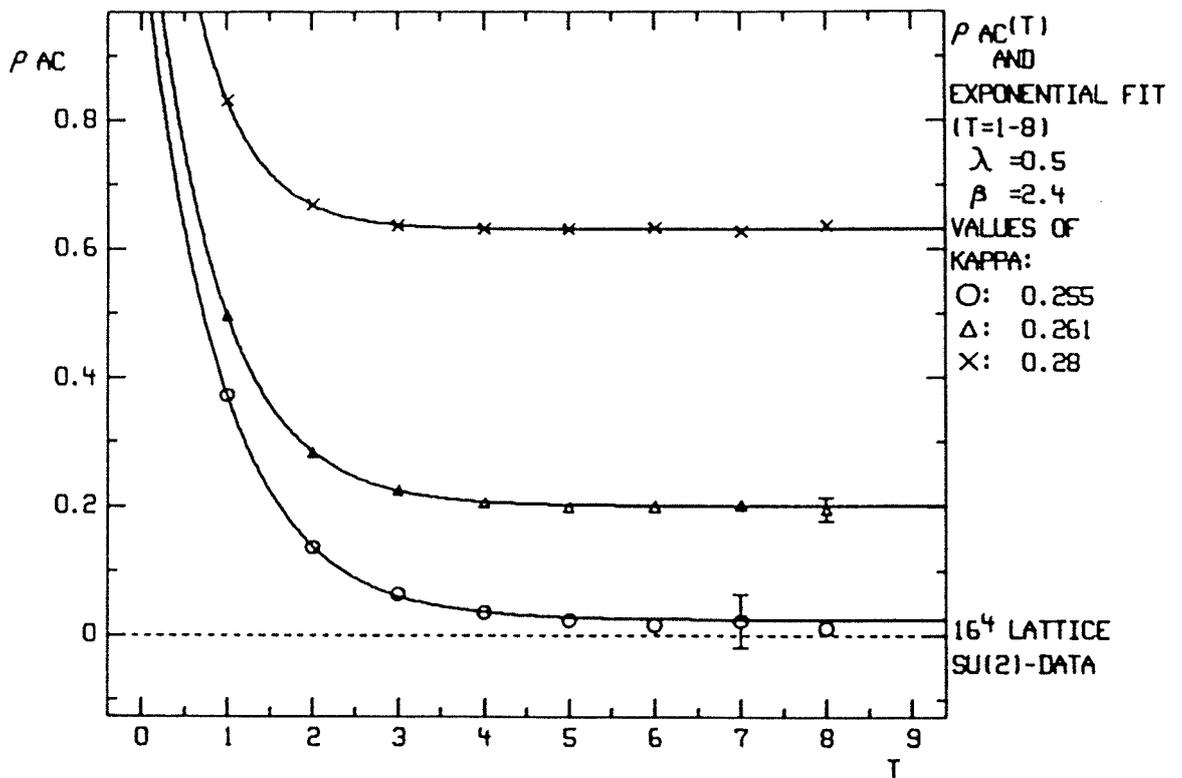


Abb. 3.13: Das Verhältnis $\rho_{AC}(T)$ im SU(2)-Higgs-Modell, analog zu Abb. 3.11. Die κ -Werte sind die gleichen wie bei Abb. 2.3 und Abb. 3.7: $\kappa = 0.255$ im Confinement-Gebiet, $\kappa = 0.261$ kurz oberhalb des Higgs-PÜs, und $\kappa = 0.28$ tief im Higgs-Gebiet.

Fredenhagen-Marcu-Parameter ρ_{FM}^∞ . Fredenhagen und Marcu haben ein anderes Kriterium zur Unterscheidung von Phasen mit Confinement bzw. freien Ladungen vorgeschlagen. Seine Gültigkeit wurde durch konvergente Reihenentwicklungen in verschiedenen Gebieten der Phasendiagramme der Z(2)- und U(1)-Gitter-Higgs-Modelle exakt gezeigt [36,37] und auch durch andere analytische Methoden bestätigt [39]. Außerdem unterstützen MC-Untersuchungen des Z(2)-Modells und des U(1)-Modells mit Materiefeldern der Ladung 2 [44] die analytischen Vorhersagen. Der Gültigkeitsbereich der Vorhersagen, der analytisch auf Ränder der Phasendiagramme beschränkt ist und nur asymptotisches Verhalten umfaßt, wird durch die nun vorgestellten numerischen Ergebnisse auf die Coulomb-Phase des U(1)-Higgs-Modells und auf die Higgs-Gebiete der beiden hier untersuchten Modelle ausgedehnt. Besonders interessant ist dabei natürlich die analytisch bisher unzugängliche Umgebung des Higgs-Phasenübergangs.

Das Kriterium wird mittels des Verhältnisses

$$\rho_{FM}(R,T) := \frac{G(R,T)}{W(R,T)^{1/2}} = \frac{\langle \overset{R}{\square} T \rangle}{\langle \overset{R}{\square} 2T \rangle^{1/2}} \quad (3.45)$$

formuliert. Man beachte, daß der Abstand zwischen den Endpunkten des Pfades Γ jetzt mit R bezeichnet ist, da dieser Abstand für die physikalische Interpretation des Kriteriums raumartig sein muß. Es wird nun ein Grenzwert betrachtet, bei dem T und R gleichzeitig proportional zueinander wachsen. Dieser Grenzwert ist numerisch schwieriger zu erreichen als derjenige bei $\rho_{AC}(T)$.

Das erwartete asymptotische Verhalten ist das gleiche wie bei ρ_{AC}^∞ , Gl.(3.40):

$$\rho_{FM}(R,T) \xrightarrow[\substack{R \rightarrow \infty \\ T = \frac{1}{2}R}]{\quad} \begin{cases} \rho_{FM}^\infty \neq 0 & (\text{Confinement}) \\ 0 & (\text{Freie Ladungen}). \end{cases} \quad (3.46)$$

Somit ist ρ_{FM}^∞ ein (nichtlokaler) Ordnungsparameter (von Fredenhagen und Marcu "Vacuum Overlap Order Parameter" genannt), der ebenfalls zwischen Phasen mit Confinement und solchen mit freien Ladungen unterscheidet.

Zur physikalischen Motivation dieses Kriteriums [36] werden die eichinvarianten Zweipunktfunktionen anders interpretiert als bisher. Der Abstand zwischen den beiden dynamischen Ladungen ist nun raumartig. Das physikalische Bild ist dasjenige zweier entgegengesetzter Ladungen im Abstand R . Durch den Paralleltransporter, der die beiden Ladungen verbindet, wird der Zustand eichinvariant gemacht.

Wenn nun eine der Ladungen zu $R \rightarrow \infty$ entfernt wird, kann der zurückbleibende Zustand entweder geladen oder abgeschirmt sein. Im ersten Fall verschwindet der Überlapp mit dem (neutralen) Vakuum, also der (Vakuum-)Erwartungswert, im zweiten Fall ist er ungleich Null. Das gleichzeitige Verschieben des Paralleltransporters auf die "zeitartige" Entfernung T projiziert auf die Zustände niedrigster Energie.

Die Division durch $W(R,2T)^{1/2}$ entfernt den Faktor $\exp(-E_q(R+2T))$ des Umfangsverhaltens von $G(R,T)$ in dem Limes von Gl.(3.46). In der Phase mit freien Ladungen fällt der Zähler in Gl.(3.39) um den Faktor $\exp(-m_c R)$ schneller ab als der Nenner [36]. Daher verschwindet auch ρ_{FM}^o in der Phase mit freien Ladungen, ebenso wie ρ_{AC}^o . Die Energie m_c , die das exponentielle Abfallen bestimmt, spielt hier die gleiche Rolle wie die Energiedifferenz $\mu - E_q = m_c - E_b(cq)$ beim Ordnungsparameter ρ_{AC}^o . Die Grundlagen der beiden Kriterien, nämlich Eigenschaften des Energie-Spektrums, sind also nahe verwandt. Aufgrund der Resultate in Ref. [36] ist sogar

$$\rho_{AC}^o = \rho_{FM}^o \quad (3.47)$$

zu erwarten.

Im U(1)-Higgs-Modell stimmen darüber hinaus für alle κ -Werte in beiden Phasen schon $\rho_{FM}(R,R/2)$ und $\rho_{AC}(T)$ bei $T = R$ sehr gut überein! (Eine kleine Abweichung gibt es lediglich bei $\kappa = 0.3$, $T = 1,2$.) Ich zeige $\rho_{FM}(T)$ daher hier nicht explizit. Gleichung (3.47) ist sehr gut erfüllt. Die Werte von ρ_{FM}^o können deshalb aus der Abb. 3.12 entnommen werden.

Mit $\rho_{AC}^o = \rho_{FM}^o = 0$ in der Coulomb-Phase ist also nunmehr die Existenz freier Ladungen in dieser Phase bis hin zum Higgs-PÜ gezeigt.

Zusammen mit der Masselosigkeit des Photons in der Coulomb-Phase (Kap. 4) bestätigt dies, zumindest numerisch, daß für die skalare QED das Theorem von Swieca [106,103] auch auf dem euklidischen Gitter gilt : freie abelsche Ladungen sind nur mit einer verschwindenden Masse des Eich-Vektorfeldes, das an die Ladungen koppelt, verträglich.

Im SU(2)-Higgs-Modell zeigen sich im Confinement-Gebiet noch nicht die asymptotischen Eigenschaften. Man kann daher nur im Higgs-Gebiet das korrekte Verhalten $\rho_{AC}^{\circ} = \rho_{FM}^{\circ} \neq 0$ erwarten. Abb. 3.14 zeigt $\rho_{FM}(R, \lfloor R/2 \rfloor)$, mit Fits analog zu Gl.(3.44), für $R \geq 1$. Das Verhalten von ρ_{FM} ist qualitativ gleich dem oben besprochenen Verhalten von ρ_{AC} . Auch die numerischen Werte sind, schon bei kleinen Abständen, sehr ähnlich. Für die asymptotischen Werte ρ_{AC}° und ρ_{FM}° sind in Abb. 3.15 die Resultate A_{AC} und A_{FM} aus Fits gemäß Gl.(3.44) angegeben. Wegen des im Confinement-Gebiet nichtasymptotischen Verhaltens des SU(2)-Higgs-Modells liegen sie dort nahe bei Null. *Die Confinement-Kriterien Gl.(3.42) und Gl.(3.46) konnten also leider im einzigen untersuchten Confinement-Gebiet, demjenigen des SU(2)-Higgs-Modells, wegen zu geringer Gittergröße nicht verifiziert werden.*

Dagegen sind die Werte von ρ_{AC}° und ρ_{FM}° oberhalb des PÜs deutlich von Null verschieden und erfüllen annähernd die Gl.(3.47).

Bricmont-Fröhlich-Parameter. Von Bricmont und Fröhlich wurde der Parameter

$$\rho_{BF}(T) = G(T,0) / G(2T,0) \quad (3.48)$$

vorgeschlagen ([35], s.a.[36]). Er unterscheidet zwischen dem Fall, daß der Grundzustand eines geladenen Teilchens ein Bindungszustand ist (oder daß Confinement herrscht), und dem Fall, daß dieser Grundzustand ein freies Teilchen ist. Im ersten Fall gilt $\rho_{BF}^{\circ} \neq 0$. Im zweiten Fall tritt zu dem exponentiellen Zerfall von $G(T,R)$, Gl.(3.2), noch ein Faktor $T^{-(d-1)/2}$ als (Ornstein-Zernike-)Korrektur hinzu und ρ_{BF}° ist Null.

In der Confinement-Higgs-Phase sollte

$$\rho_{BF}^{\circ} = \rho_{FM}^{\circ} = \rho_{AC}^{\circ} \neq 0 \quad (3.49)$$

gelten [36]. Im U(1)-Higgs-Modell sind in der Coulomb-Phase

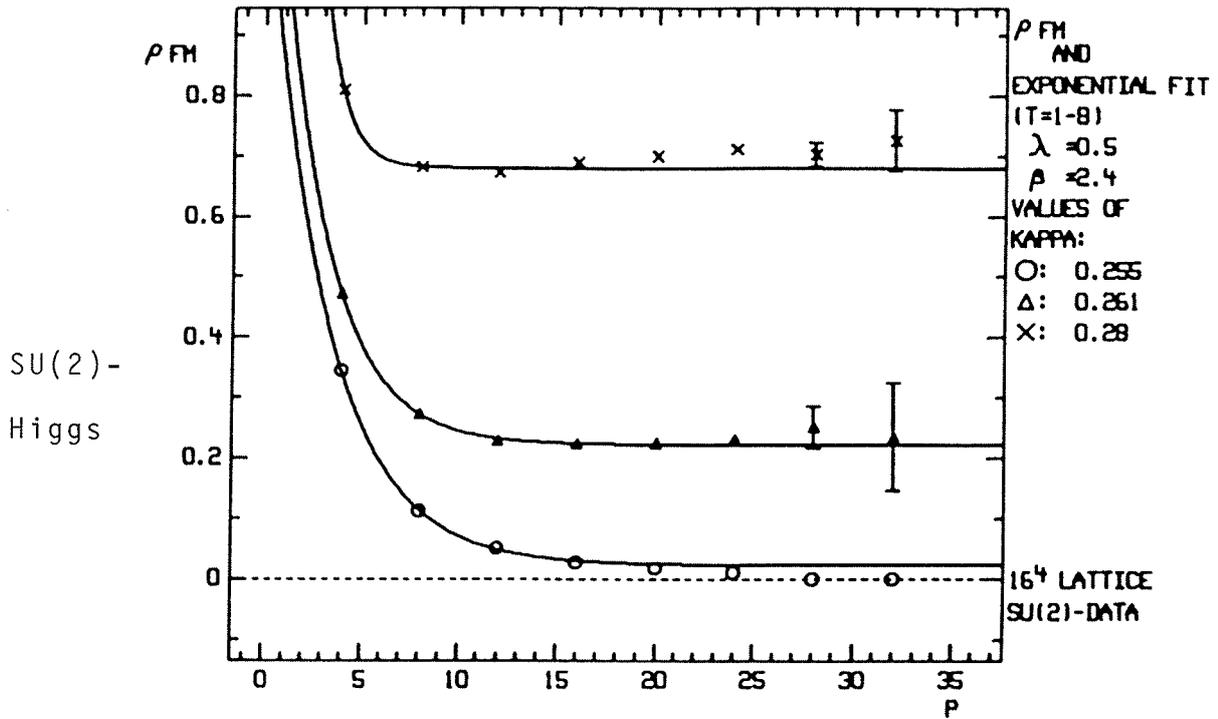


Abb. 3.14: Die Werte von $\rho_{FM}(R, \lfloor R/2 \rfloor)$, Gl.(3.45), aufgetragen gegen den Umfang P der entsprechenden Wilson-Wegner-Schleife, $P = 4R$. Die Kurven sind Fits analog zu Gl.(3.44).

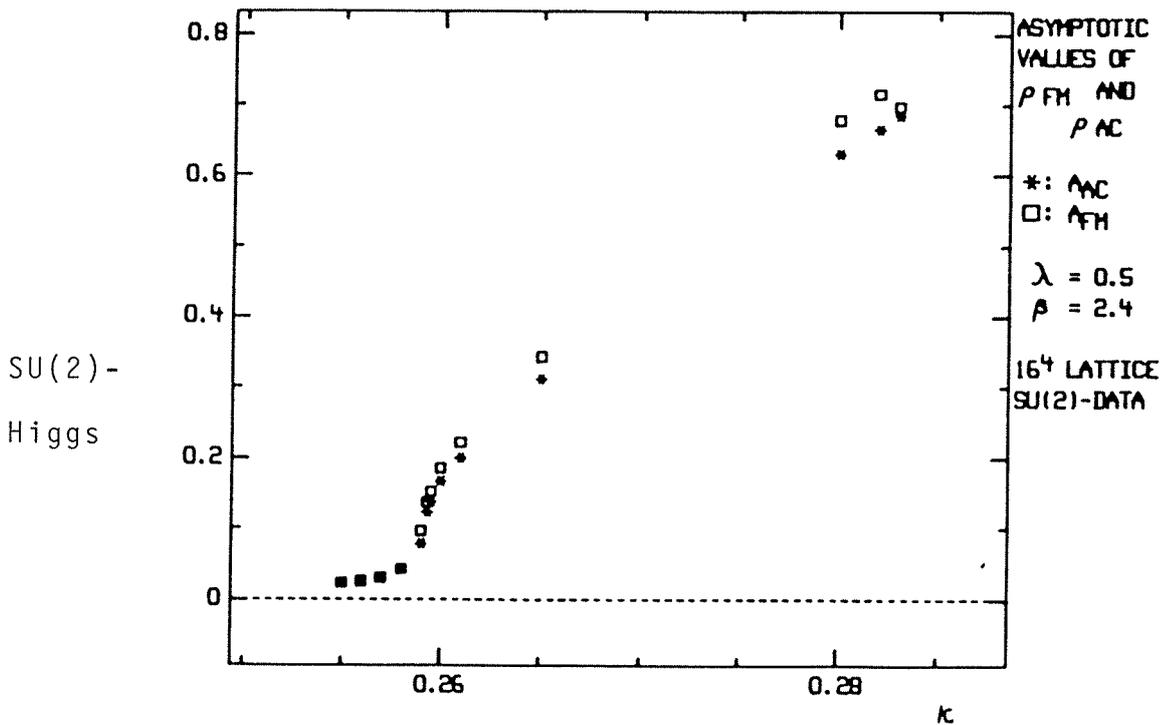


Abb. 3.15: Werte von ρ_{AC}° und ρ_{FM}° , bestimmt als A_{FM} (Quadrate) und A_{AC} (Sterne) aus Fits gemäß Gl.(3.44).

Bindungszustände cq zu erwarten. In beiden untersuchten Modellen sollte daher in allen Gebieten ρ_{BF}^{∞} ungleich Null sein.

In den MC-Resultaten konvergiert $\rho_{BF}(T)$ in der Coulomb-Phase des U(1)-Higgs-Modells und im Confinement-Gebiet des SU(2)-Higgs-Modells leider nur sehr langsam und erreicht keinen asymptotischen Wert. In den Higgs-Gebieten der beiden Modelle bestätigen die MC-Daten die Gl.(3.49) mit guter Genauigkeit.

3.7 Zusammenfassung.

In Eichtheorien mit Materiefeldern in der fundamentalen Darstellung gibt es Abschirmung äußerer Ladungen. Die Wegner-Wilson-Schleifen zeigen dann immer Umfungsverhalten [96], wie für das U(1)-Higgs-Modell in Kap. 3.3 bewiesen wurde. Das Umfungsverhalten ist in den Higgs-Gebieten beider untersuchter Modelle deutlich sichtbar.

In der Coulomb-Phase des U(1)-Higgs-Modells ist das aus den Wegner-Wilson-Schleifen folgende Potential $V(R)$ (bei $\beta = 2.5$, $\lambda = 3$) unabhängig von κ für alle κ unterhalb von κ_{PT} , und konsistent mit dem Coulomb-Potential. Auch am Higgs-Übergang zeigt es keine plötzliche Änderung, sondern wird für $\kappa > \kappa_{PT}$ allmählich einem Yukawa-Potential ähnlich, wobei die Yukawa-Masse mit der Photon-Masse (Kap. 4) verträglich ist. Dementsprechend ist $E_q \equiv V(\infty)/2$, die niedrigste Energie einer äußeren Quelle, konstant für $\kappa < \kappa_{PT}$; sie zeigt keinen Sprung am Higgs-PÜ. Im Confinement-Gebiet des SU(2)-Higgs-Modells ist noch keine Abschirmung sichtbar; das verwendete 16^4 -Gitter ist dafür zu klein.

Die eichinvarianten Zweipunktfunktionen $G(T,R)$, Gl.(3.1), zerfallen bei großen T und festen R wie $e^{-\mu T}$. Die "Abschirmenergie" μ ist R -unabhängig und hat die physikalische Bedeutung der niedrigsten Energie des Systems dynamischer Eich- und Materiefelder, die eine äußere Ladung abschirmen. In den Higgs-Gebieten der beiden untersuchten Modelle, wo aufgrund des Kondensats geladener Teilchen Debye-Hückel-artige Plasma-Abschirmung stattfindet, ist μ gleich E_q . In der Coulomb-Phase des U(1)-Higgs-Modells

dagegen ist μ wesentlich größer als E_q . Die Differenz wird als Masse m_c des mit dem skalaren Feld assoziierten geladenen Teilchens (minus Bindungsenergie) interpretiert. Im Confinement-Gebiet des SU(2)-Higgs-Modells sollte ebenfalls $\mu = E_q$ gelten. Wegen des nicht-asymptotischen Verhaltens auf dem 16^4 -Gitter konnte dort aber lediglich $\mu \geq E_q$ gezeigt werden.

Die Abschirmenergie μ zeigt im U(1)-Higgs-Modell auf allen untersuchten (großen) Gittern einen bemerkenswerten Sprung am Higgs-Übergang, im Gegensatz zu lokalen Observablen wie $\langle \Phi^* U \Phi \rangle$, die sich glatt verhalten (s. Kap. 2.6). Die Differenz $\mu - E_q$ hat die Eigenschaften eines nichtlokalen Ordnungsparameters, der zwischen Phasen mit freien Ladungen ($\mu - E_q > 0$) und solchen mit Confinement ($\mu - E_q = 0$) unterscheidet. Sowohl der dementsprechend konstruierte Parameter $\rho_{AC}(T)$, Gl.(3.40), als auch der Fredenhagen-Marcu-Parameter $\rho_{FM}(R,T)$, Gl.(3.45), wurden ausführlich untersucht. Beide vergleichen im wesentlichen das asymptotische Zerfallsverhalten von Zweipunktfunktionen und Wegner-Wilson-Schleifen. Nichtverschwindende Grenzwerte $\rho_{AC}^{\infty} = \rho_{FM}^{\infty} \neq 0$ signalisieren Confinement, während $\rho_{AC}^{\infty} = \rho_{FM}^{\infty} = 0$ eine Phase mit freien Ladungen anzeigt. Die numerischen Ergebnisse stehen in der Coulomb-Phase und den Higgs-Gebieten der beiden Modelle in völliger Übereinstimmung mit dieser Vorhersage. Damit ist die Existenz freier Ladungen in der Coulomb-Phase gezeigt. Ich möchte hervorheben, daß die numerischen Ergebnisse mit den theoretischen Erwartungen sogar in der Nähe des Higgs-Püs übereinstimmen, wo keine analytischen Beweise existieren. Außerdem ist bemerkenswert, daß die Annäherung der Funktionen $\rho_{FM}(R,T)$ und $\rho_{AC}(T)$ an ihre asymptotischen Werte ρ_{FM}^{∞} bzw. ρ_{AC}^{∞} schon auf einem 16^4 -Gitter sehr deutlich sichtbar ist. Für die praktische Verwendbarkeit der untersuchten Ordnungsparameter ist dies von großer Bedeutung.

Kapitel 4: Massen

Zu den wichtigsten Ergebnissen, die Gitterrechnungen für eine Theorie liefern können, gehört die Berechnung des Spektrums im gesamten –also auch nichtperturbativen– Bereich der Kopplungen. Zur Durchführung eines Kontinuumslimits ist die Kenntnis der Massen auf dem Gitter und ihre Abhängigkeit von den Kopplungskonstanten von sehr großer Bedeutung (vor allem in der Nähe des PÜs), da sich aus den Linien konstanten Massenverhältnisses Renormierungsgruppen–Trajektorien ergeben.

In den Higgs–Modellen ist natürlich die Masse m_H des skalaren Higgs–Bosons von ganz besonderem Interesse. Wie dieses Kapitel zeigen wird, ist die inverse Higgs–Masse die für den Higgs–PÜ wichtigste Korrelationslänge.

Zur Untersuchung von Massen bestimmter Teilchen müssen diesen erst über ihre Quantenzahlen geeignete Gitteroperatoren zugeordnet werden. Hiervon handelt Kapitel 4.1. In den darauf folgenden beiden Abschnitten analysiere ich dann die Spektren des U(1)–Higgs–Modells [52] und des SU(2)–Higgs– Modells [53]. Die Ergebnisse sind jeweils am Ende der Abschnitte zusammengefaßt.

4.1 Quantenzahlen und Korrelationsfunktionen

Massen von Teilchen können aus dem exponentiellen Zerfall von Korrelationsfunktionen eichinvarianter¹⁾ Operatoren bestimmt werden. Die so gewonnenen Massen werden mit den Massen physikalischer Teilchen mit Hilfe der Quantenzahlen von Gitteroperatoren identifiziert. Diese Quantenzahlen erhält man über das Transformationsverhalten der Gitteroperatoren unter (diskreten) räumlichen Drehungen und unter Paritäts–, Ladungskonjugations– und Isospin– Transformationen. Die Gitterversionen dieser Transformationen werden im folgenden kurz erläutert. Sie sind im Anhang im Detail behandelt. Das Ergebnis dieser Rechnungen ist die Tabelle 4.1, die eine Liste von Gitteroperatoren zu gegebenen Quantenzahlen enthält.

¹⁾ Wegen der Eichinvarianz können auf diese Weise nur neutrale Teilchen untersucht werden.

Die Wirkungen der Paritätstransformation P und der Ladungskonjugation C auf die Lagrangedichte und auf die Noetherströme der untersuchten Modelle werden im Anhang zunächst im Kontinuum formuliert. Sodann werden geeignete Transformationen der Materie- und Eichfelder angegeben, die zu dem gewünschten Verhalten von Lagrangedichte und Noetherströmen führen, und auf die Gitterformulierung übertragen. Es zeigt sich z.B., daß Ladungskonjugation einer komplexen Konjugation der Gittervariablen entspricht. Die Isospin-Quantenzahl I bezieht sich einfach auf die globale Symmetrie Gl.(2.45).

Die kontinuierliche Rotationssymmetrie des Kontinuums reduziert sich auf dem Gitter zu einer diskreten kubischen Symmetrie unter der Oktaedergruppe O , welche 5 (bei Hinzunahme von Spiegelungen 10) irreduzible Darstellungen R besitzt. Zu diesen irreduziblen Darstellungen (ID) werden die Charaktere der Elemente von O angegeben. Jede der 5 Gitter-ID trägt zu unendlich vielen Spins im Kontinuum bei. Der genaue Spin-Inhalt einer Gitter-ID ist in Tabelle A.3 im Anhang angegeben. Sie enthält die Multiplizitäten der verschiedenen Gitter-IDs in den (auf Gittertransformationen beschränkten) Darstellungen der Kontinuums-Spins.

Es sind dann alle nötigen Informationen gesammelt, um zu einem gegebenen Gitteroperator ψ mit (guten) Quantenzahlen P, C, I die irreduziblen Anteile der Oktaedergruppe zu finden. Hierzu gebe ich im Anhang einen Algorithmus an. Nach Projektion des Operators ψ auf eine dieser IDs können aus Tabelle A.3 die erfaßten Spins abgelesen werden. Unter der (experimentell begründeten) Annahme, daß Teilchen höheren Spins auch größere Masse besitzen, kann dann aus den Korrelationsfunktionen des konstruierten Gitteroperators die (kleinste vorkommende) Masse eines Teilchens mit dem niedrigsten erfaßten Spin extrahiert werden (Näheres dazu weiter unten).

Ergebnis: Quantenzahlen und zugehörige Operatoren. Die Tabelle 4.1 führt zu jedem (relevanten) Satz von Gitter-Quantenzahlen $(I)R^{PC}$ eine Reihe von (möglichst lokalen) eichinvarianten Gitteroperatoren auf, die sich gemäß dieser Gitterquantenzahlen transformieren.

U(1) - Higgs	SU(2) - Higgs
$R^{PC} = A_1^{++} \implies J^{PC} = 0^{++}, 4^{++}, \dots, I = 0:$	
(a) $\sum_{\vec{x}} \rho_{\vec{x}}^n$ (n>0 beliebig)	$\sum_{\vec{x}} \rho_{\vec{x}}^n$ (n>0 beliebig)
(b) $\text{Re} (L_x + L_y + L_z)$	$\text{tr} (L_x + L_y + L_z)$
(c) $\text{Re} L_t$	$\text{tr} L_t$
(d) $\text{Re} (P_{xy} + P_{yz} + P_{zx})$	$\text{tr} (P_{xy} + P_{yz} + P_{zx})$
(e) $\text{Re} (P_{xt} + P_{yt} + P_{zt})$	$\text{tr} (P_{xt} + P_{yt} + P_{zt})$
$R^{PC} = E^{++} \implies J^{PC} = 2^{++}, 4^{++}, \dots, I = 0:$	
(f) $\text{Re} (2L_x - L_y - L_z)$ oder $\text{Re} (L_x - L_y)$ (und Permutationen von xyz)	$\text{tr} (2L_x - L_y - L_z)$ oder $\text{tr} (L_x - L_y)$ (und Permutationen von xyz)
(g) $\text{Re} (2P_{xy} - P_{yz} - P_{zx})$ etc.	$\text{tr} (2P_{xy} - P_{yz} - P_{zx})$ etc.
(h) $\text{Re} (2P_{xt} - P_{yt} - P_{zt})$ etc.	$\text{tr} (2P_{xt} - P_{yt} - P_{zt})$ etc.
$R^{PC} = A_1^{+-} \implies J^{PC} = 0^{+-}, 4^{+-}, \dots :$	
(i) $\text{Im} L_t$	$\text{tr} (L_t \vec{\tau})$ (I = 1 !)
<u>einfache Operatoren mit $J^{PC} = 0^{-+}$ oder 0^{--} ex. nicht</u>	
$R^{PC} = T_1^{+-} \implies J^{PC} = 1^{+-}, 3^{+-}, \dots :$	
(j) $\text{Im} P_{xy}, \text{Im} P_{yz}, \text{Im} P_{zx}$	($\text{tr}(P_{xy} \vec{\tau})$ ist nicht eichinv.)
$R^{PC} = T_1^{--} \implies J^{PC} = 1^{--}, 3^{--}, \dots :$	
(k) $\text{Im} L_x, \text{Im} L_y, \text{Im} L_z$	$\text{tr} (L_x \vec{\tau})$ etc. (I = 1 !)
(l) $\text{Im} P_{xt}, \text{Im} P_{yt}, \text{Im} P_{zt}$	($\text{tr}(P_{xt} \vec{\tau})$ etc.: nicht eichinv.)
$R^{PC} = T_1^{-+} \implies J^{PC} = 1^{-+}, 3^{-+}, \dots :$	
(m) enthalten in: $\text{Re} \begin{pmatrix} x & -0 \\ y & \end{pmatrix}$	und in dazu analogen Plaketten (nicht irreduz.), siehe [107].

Tabelle 4.1: Quantenzahlen und zugehörige Gitteroperatoren

Dabei sind

$$L_\mu := \frac{1}{N_s^3} \sum_{\vec{x}} (\Phi_{\vec{x}}^\dagger U_{\vec{x}\mu} \Phi_{\vec{x}+\mu}) \quad , \quad (4.1)$$

$$P_{\mu\nu} := \frac{1}{N_s^3} \sum_{\vec{x}} (U_{\vec{x},\mu\nu}) \quad (4.2)$$

die räumlich gemittelten Kanten- bzw. Plakettenoperatoren (für U(1) oder SU(2); die Abhängigkeit von der Zeitkoordinate ist unterdrückt). In L_μ können auch die radialen Anteile ρ von Φ weggelassen werden, ohne daß dadurch Quantenzahlen geändert werden. In Tabelle 4.1 ist die Zeitkoordinate beliebig, aber fest; sie wird daher nicht notiert. Plakettenoperatoren zu höheren Spins findet man in [107]. Ausdrücke der Form $\text{tr}(P_{\mu\nu}\vec{\tau})$ sind nicht eichinvariant; deshalb gibt es zu $J^{PC} = 1^{+-}$ keine $I = 1$ Operatoren!

Die wichtigsten Operatoren in Tabelle 4.1 sind für das Higgs-Teilchen die Radialteile (a) und die Kantenoperatoren (b), für Vektorbosonen in der U(1) bzw. W-Bosonen in der SU(2) die Kanten-Operatoren (k), und für das Photon der Plakettenoperator (j) (vgl. Kap. 4.2).

Die Ausdrücke in Tab. 4.1 haben die Form $\sum_{\vec{x}} \psi(\vec{x},t)$. Die Summation über die räumlichen Koordinaten \vec{x} ist nötig, um gute Paritätsquantenzahlen zu erhalten. Sie bewirkt auch, daß alle angegebenen Operatoren auf *Impuls Null* projiziert sind. Höhere Impulse erhält man durch Fouriertransformation (in x_1 -Richtung) :

$$\psi(k,t) := \sum_{\vec{x}} \psi(\vec{x},t) \cos(k_1 x_1) \quad , \quad k_1 = p \cdot 2\pi/N_s \quad , \quad p \in \mathbb{N} \quad , \quad (4.3)$$

$$k_2 = k_3 = 0 \quad .$$

Wenn der Operator $\psi(\vec{x},t)$ in x_1 -Richtung eine Ausdehnung besitzt, so ist $\psi(k,t)$ bei $k > 0$ keine Eigenfunktion des Paritätsoperators P mehr. Dies sieht man zum Beispiel für den Plakettenoperator $\text{Im } U_{(\vec{x},t),12}$ (Eintrag (j) in Tab. 4.1) aus :

$$P \sum_{\vec{x}} \text{Im } U_{(\vec{x},t),12} \cos(k_1 x_1) = \sum_{\vec{x}} \text{Im } U_{(-\vec{x}-\vec{e}_1-\vec{e}_2,t),12} \cos(k_1 x_1)$$

$$= \sum_{\vec{x}} \text{Im } U_{(\vec{x},t)12} \cos(k_1 \cdot (x_1+1)) \quad (4.4)$$

Dies bedeutet, daß die Fouriertransformierten dieses Plakettenoperators mit Impuls $k > 0$ auch Beiträge von Teilchen mit $J^{PC} = 1^{--}$ erhalten, wie dem Photon.

Korrelationsfunktionen. Zu einem geeigneten Operator $\psi(k,t)$, als Funktion der euklidischen Zeit t , können seine Korrelationsfunktionen untersucht werden :

$$\begin{aligned}
 \langle \psi(k,0) \psi(k,t) \rangle &= \langle 0 | \psi(k,0) e^{-Ht} \psi(k,0) e^{+Ht} | 0 \rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0 | \psi(k,0) | n \rangle \langle n | e^{-Ht} \psi(k,0) e^{+Ht} | 0 \rangle \quad (4.5) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n t} |\langle 0 | \psi(k,0) | n \rangle|^2 \quad (E_0 := 0) .
 \end{aligned}$$

Hier wurde $\psi(k,t)$ als quantenmechanischer Operator aufgefaßt, seine Zeitabhängigkeit über den Hamiltonoperator (also über die Transfermatrix) ausgedrückt und eine Summe über Energie-Eigenzustände $|n\rangle$ eingeschoben. Ein Beitrag stammt von einem (evtl. nichtverschwindenden) Vakuum Erwartungswert von ψ . Um diesen Beitrag abzuziehen, verwendet man die subtrahierte Korrelationsfunktion :

$$\begin{aligned}
 C_{\psi}(k,t) &:= \langle \psi(k,0) \psi(k,t) \rangle - \langle \psi(k,0) \rangle \cdot \langle \psi(k,t) \rangle \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-E_n(k) \cdot t} |\langle 0 | \psi(k,0) | n \rangle|^2 \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Es tragen im Prinzip alle diejenigen Zustände bei, die von $\psi(k,0)$ aus dem Vakuum erzeugt werden können, also die Zustände mit den gleichen Quantenzahlen wie ψ . Bei großen euklidischen Abständen t dominiert in der Summe die Energie $E_1(k)$ des leichtesten Zustandes (Teilchens) mit den gleichen Quantenzahlen wie ψ :

$$C_{\psi}(k,t) \approx \text{const.} \cdot e^{-E_1(k) \cdot t} \quad (4.7a)$$

(falls bei festem t nicht das Matrixelement $\langle 0 | \psi(k,0) | n \rangle$ zu klein ist). Mit den in dieser Arbeit benutzten periodischen Randbedingungen des Gitters wird Gl.(4.7a) modifiziert zu

$$C_{\psi}(k,t) \approx \text{const.} \cdot (e^{-E_1(k) \cdot t} + e^{-E_1(k) \cdot (N_t - t)}) , \quad (4.7b)$$

wobei N_t die Gitterausdehnung in "zeitlicher" Richtung ist. (Alle Größen sind hier als dimensionslose Gittergrößen zu verstehen). Die Energie $E_1(k)$ kann nun durch einen Fit an die numerischen Werte von $C_{\psi}(k,t)$ bestimmt werden. Aus $E_1(k)$ erhält man schließlich über die Gitterversion der

Dispersionsrelation $m^2 + k^2 = E^2$, nämlich

$$m^2 + 2 \sum_{\mu=1}^3 (1 - \cos k_{\mu}) = 2 (\cosh E(k) - 1) \quad , \quad (4.8)$$

die Masse m des zugehörigen Teilchens.

4.2 Massen im U(1)-Higgs-Modell

Das Spektrum in der Umgebung des Higgs-PÜs ist im U(1)-Higgs-Modell besonders interessant, denn der Übergang trennt hier zwei verschiedene Phasen, die Coulomb- und die Confinement-Higgs-Phase. Hieraus folgt, daß die Spektren nicht aufeinander abbildbar zu sein brauchen. In der Coulomb-Phase erwartet man ein masseloses Photon. Diese Erwartung beruht auf dem Verhalten der reinen U(1)-Eichtheorie bei $\kappa = 0$. Exakte Resultate hierzu gibt es meines Wissens nicht. Die hier beschriebenen MC-Untersuchungen stellen die erste Bestätigung dieser Vermutung für das U(1)-Higgs-Modell dar (für andere Modelle s.a. [32,51]). Am Higgs-PÜ sollte der Higgs-Mechanismus wirken und das Photon massiv werden lassen. In diesem Modell bietet sich daher die Chance, den Higgs-Mechanismus, aufgefaßt als Vorgang der Erzeugung von Vektorboson-Massen, unmittelbar zu beobachten. Die freien geladenen Teilchen in der Coulomb-Phase können neutrale skalare Bindungszustände bilden. In Analogie zum Positronium in der QED und zum Quarkonium in der QCD werden solche Zustände im folgenden als Bosonium bezeichnet. Auch im Higgs-Gebiet ist ein massives skalares Boson, das Higgs-Boson, zu erwarten. Außerdem können im Prinzip weitere, rein nichtperturbativ verursachte Zustände existieren.

Die Spektren [52] wurden mit Hilfe der gleichen MC-Simulationen berechnet, die auch für die Analyse der Zweipunktfunktionen Verwendung fanden, d.h. bei festem $\beta = 2.5$, $\lambda = 3$ wurde die Abhängigkeit der Massen von κ in der Umgebung des Higgs-PÜs untersucht. Neben diesen Rechnungen auf $8^3 \cdot 16$ und 16^4 -Gittern wurden auch Rechnungen auf 12^4 -Gittern durchgeführt. Der weite Bereich der verwendeten Gittergrößen gestattet, den

Einfluß der Endlichkeit der Gitter auf die Daten zu beurteilen. Zusätzlich zu Punkten in der Umgebung des Higgs-PÜs wurden bei $\kappa = 0$ und $\kappa = 0.1$ zwei Punkte tief in der Coulomb-Phase und bei $\kappa = 0.3$ und 0.64 zwei Punkte im Higgs-Gebiet untersucht. Die beiden letztgenannten Punkte erlauben, das Ansteigen der Photonmasse mit κ zu beobachten.

Operatoren und Messungen. Es wurden die Operatoren

$$\psi_1(\vec{x}, t) = \text{Re} \sum_{\mu} \Phi_x^* U_{x, \mu} \Phi_{x+\mu} \quad , \quad (4.9)$$

$$\psi_2(\vec{x}, t) = \text{Im} \sum_{\mu} \Phi_x^* U_{x, \mu} \Phi_{x+\mu} \quad , \quad (4.10)$$

$$\psi_3(\vec{x}, t) = \text{Im} \sum_{\mu, \nu} U_p \quad , \quad (4.11)$$

$$x = (\vec{x}, t) \quad ; \quad p = x\mu\nu \quad ; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3$$

verwendet und gemäß Gl.(4.3) zu den Größen $\psi_i(p, t)$ fouriertransformiert, mit "Impulsen" $p = 0$ und 1 . Nach Tabelle 4.1 sind die Operatoren $\psi_i(p=0, t)$ mit den Quantenzahlen $J^{PC} = 0^{++}, 1^{--}$ bzw. 1^{+-} assoziiert. Bei $p > 0$ kommen auch die umgekehrten Paritätsquantenzahlen hinzu (s. Kap. 4.1), so daß der Operator $\psi_3(p=1, t)$ zur Untersuchung des Photons (mit $J^{PC} = 1^{--}$) geeignet ist.

Technische Details: Mit diesen Operatoren wurden entsprechend Gl.(4.6) Korrelationsfunktionen

$$C_i(k, \Delta t) = \sum_{\mathcal{E}} \langle (\psi_i(k, t) - \langle \psi_i(k, t) \rangle) \cdot (\psi_i(k, t+\Delta t) - \langle \psi_i(k, t+\Delta t) \rangle) \rangle \quad (4.12)$$

berechnet. Um die statistischen Fehler abzuschätzen, wurden die Korrelationen $\psi_i(k, t) \cdot \psi_i(k, t+\Delta t)$ in Blocks zu je 1000-1500 MC-Iterationen eingeteilt und in jedem Block getrennt gemittelt. Für $\langle \psi_i(t) \rangle$ wurden Gesamt-Mittelwerte benutzt. Mittelwerte und Streuungen der Block-Werte von $C_i(k, \Delta t)$ ergaben den Wert und den statistischen Fehler von $C_i(k, \Delta t)$. Durch Fits gemäß Gl.(4.7b) wurden dann aus den Korrelationsfunktionen die Energien $E_i(k)$ gewonnen und mit Hilfe der Dispersionsrelation Gl.(4.8) die zugehörigen Massen m_i . (Wenn das aus Gl.(4.8) bestimmte m^2 negativ war, so wurde $-|m^2|^{1/2}$ benutzt.) Bei den Fits wurden zur Verringerung systematischer Fehler die Daten bei $\Delta t = 0$ und 1 nicht verwendet.

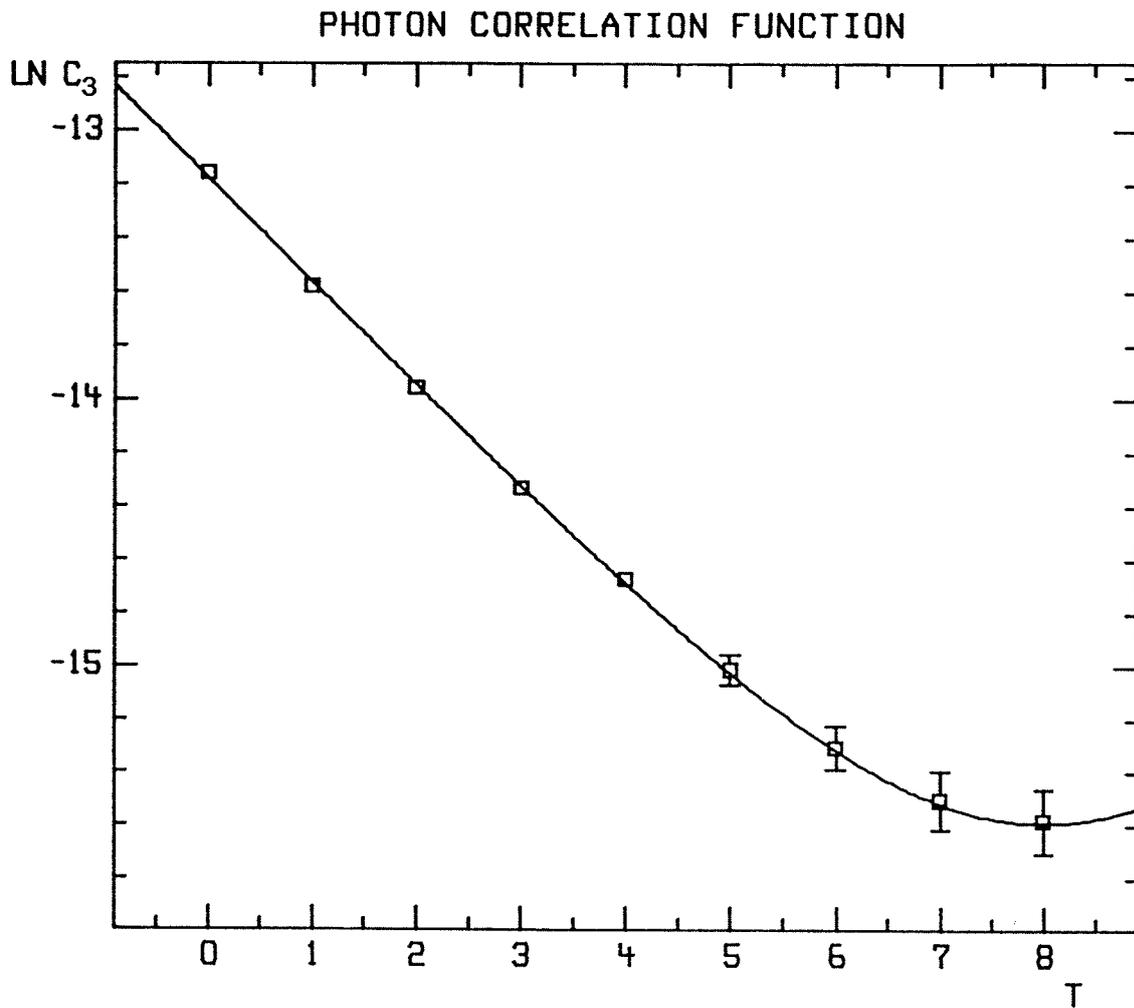


Abb. 4.1: Logarithmus der Korrelationsfunktion des Operators $\psi_3(p=1,t)$, bei $\kappa = 0.1757$ auf einem 16^4 -Gitter. Die durchgezogene Linie entspricht einer Photonmasse von Null (Gl.4.8).

Ergebnisse der Fits. Als Beispiel zu den Korrelationsfunktionen zeigt Abb. 4.1 die Photon-Korrelationsfunktion (Operator ψ_3) bei Impuls $p = 1$, für $\kappa = 0.1757 < \kappa_{PT}$. Die durchgezogene Linie entspricht der Korrelationsfunktion im Falle eines masselosen Photons. Der tatsächliche Fit gemäß Gl.(4.8) ist von dieser Linie fast ununterscheidbar und der im Fit erhaltene Wert von m_γ ist mit Null konsistent. Die Fits für die anderen Korrelationsfunktionen sind ebenfalls von guter Qualität, solange die Energien nicht größer als etwa 1 sind. Die aus den Fits gewonnenen Massen sind in den Abbildungen 4.2 und 4.3 wiedergegeben.

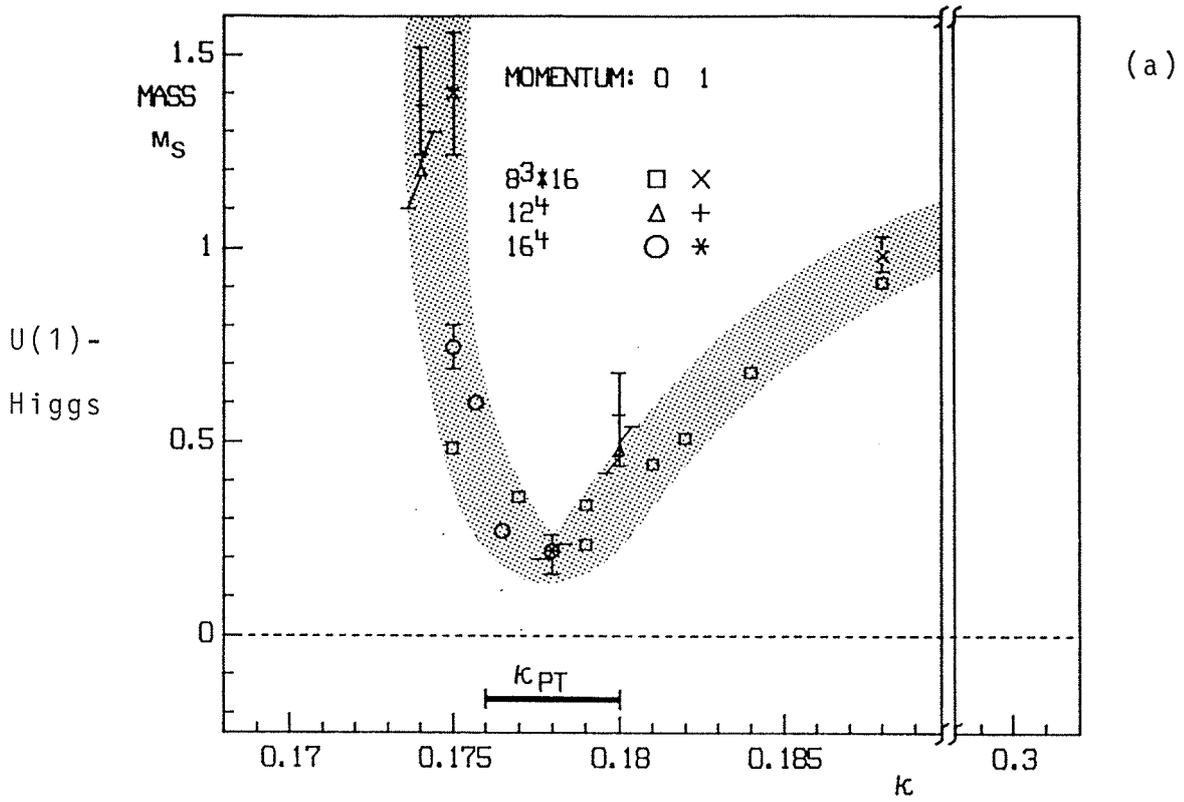
Abb. 4.2a zeigt die mit dem Operator ψ_1 bestimmte Masse m_s des skalaren Bosons in der Nähe des Higgs-PÜs, Abb. 4.2b die Vektorbosonmasse m_V (Operator ψ_2) und Abb. 4.2c die aus den $p = 1$ - Korrelationen des Operators ψ_3 gewonnene Photonmasse m_γ . Abb. 4.3 gibt m_V und m_γ auf einer kontinuierlichen κ -Skala über den ganzen untersuchten Bereich wieder. Wie im folgenden erläutert werden wird, ist die physikalische Interpretation von m_s und m_V in der Coulomb-Phase bzw. dem Higgs-Gebiet sehr unterschiedlich.

Für die Operatoren ψ_1 und ψ_2 sind die Ergebnisse für die Massen bei $p = 0$ und $p = 1$ konsistent. Die statistischen Fehler bei $p = 1$ sind aber viel größer und in den Abbildungen werden deshalb nur wenige Punkte mit $p = 1$ wiedergegeben.

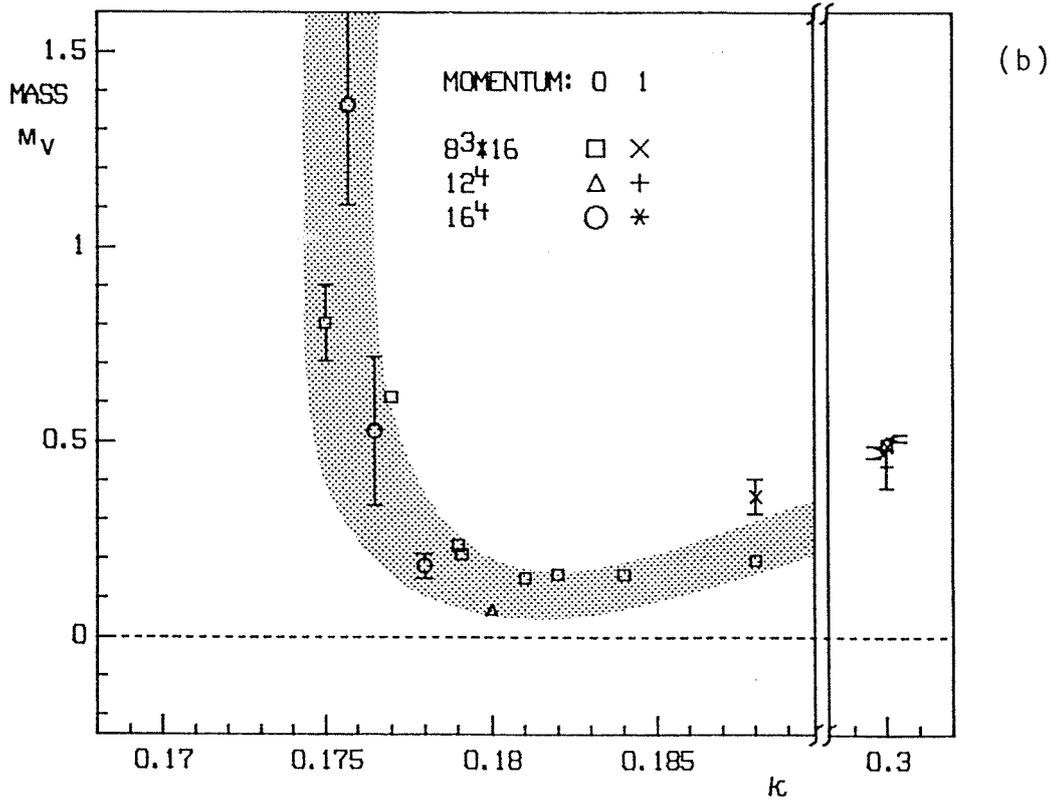
Einzelheiten zu sonstigen Fits. Zu allen Korrelationsfunktionen wurden auch Fits mit 2 unabhängigen Massen durchgeführt. Die niedrigere Masse war jeweils konsistent mit dem Resultat des 1-Massen-Fits, die höhere Masse hatte aber stets große statistische Fehler und führte nicht zu brauchbaren Ergebnissen. Höhere Beiträge zu der Summe Gl.(4.6) scheinen also sehr hohe Massen (oder sehr kleinen Überlapp mit den benutzten Operatoren) zu besitzen.

Bei den MC-Rechnungen wurden zusätzlich zu ψ_1 , ψ_2 und ψ_3 auch weitere Operatoren untersucht, mit zugeordneten Quantenzahlen 2^{++} , 1^{+-} (ψ_3 mit $p = 0$) und 0^{+-} . Die Korrelationsfunktionen aller dieser Operatoren fallen sehr schnell mit Δt ab. Es konnte kein Signal für ein Teilchen in diesen Kanälen gefunden werden.

0^{++} SCALAR BOSON



1^{--} VECTOR BOSON



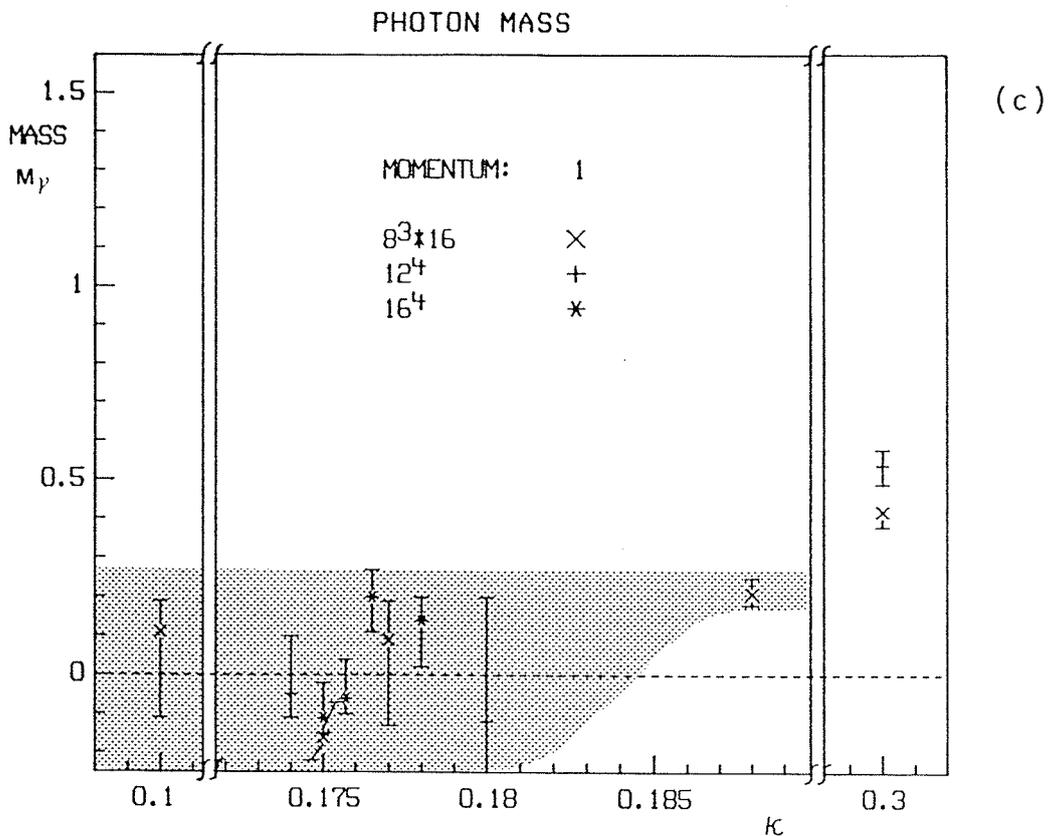


Abb. 4.2: Massen (in Gittereinheiten) für drei verschiedene Gittergrößen und für Impulse $p=0$ und 1 , aus den Korrelationsfunktionen der Operatoren (a) ψ_1 (skalares Boson, m_S), (b) ψ_2 (Vektorboson, m_V), und (c) ψ_3 (Photon, m_γ). Die κ -Achsen sind nicht kontinuierlich.

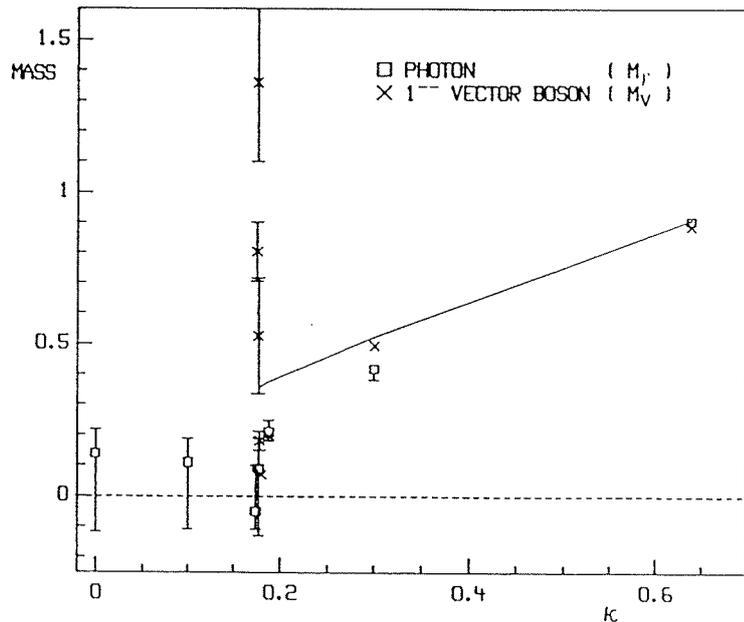


Abb. 4.3: Repräsentative Werte von m_γ und m_V auf einer kontinuierlichen κ -Skala, die den gesamten untersuchten κ -Bereich umfaßt. In der Coulomb-Phase ist das Photon masselos und m_V ist sehr groß. Im Higgs-Gebiet sind die aus beiden Korrelationsfunktionen erhaltenen Massen ununterscheidbar. Die durchgezogene Linie entspricht dem quasiklassischen Resultat Gl.(2.49), wobei die gemessenen Werte von $\langle \Phi^* \Phi \rangle$ benutzt wurden.

Der 0^{++} -Operator $\sum_{\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{x}}^* \phi_{\mathbf{x}}$ (entsprechend Eintrag (a) in Tab. 4.1) wurde ebenfalls untersucht. Er verhält sich ähnlich wie ψ_1 , hat aber ein schlechteres Signal/Rausch-Verhältnis. Die 0^{++} -Plakettenkorrelationsfunktionen ((d) und (e) in Tab. 4.1) sind sehr klein und ergeben kein meßbares Signal. Die Korrelationsfunktionen des 1^{--} Operators im L_t ergeben (aus bisher nicht bekanntem Grund) keinerlei Signal. Ich möchte auch erwähnen, daß die Fluktuationen der Korrelationsfunktionen im Higgs-Gebiet generell niedriger sind als in der Coulomb-Phase (im Unterschied zum Verhalten lokaler Observabler).

Massen in der Coulomb-Phase. In dieser Phase sind in den MC-Ergebnissen drei verschiedene Zustände sichtbar. Die Masse des leichtesten, des Photons, ist in Abb. 4.2c mit Null verträglich. In der Coulomb-Phase der reinen kompakten U(1)-Gittereichtheorie ist die Existenz eines masselosen Zustandes exakt bewiesen [108] und auch MC-Rechnungen zeigen direkt [109] und über die Coulomb-artige Form des Potentials [99] ein masseloses Photon. Innerhalb der Coulomb-Phase des kompakten U(1)-Higgs-Modells gibt es dagegen meines Wissens keine exakten Ergebnisse zur Photonmasse (im Gegensatz zum nichtkompakten Modell [34]), aber es wird allgemein erwartet [12], daß das Photon auch bei $\kappa > 0$ masselos ist. Ein masseloses Photon innerhalb einer Phase mit geladenen dynamischen Ladungen ist von Lee und Shigemitsu auch in MC-Simulationen des SU(2)-Higgs-Modells mit Materie-Tripletts gefunden worden [51]. In der Coulomb-Phase des U(1)-Higgs-Modells mit zusätzlicher globaler SU(2)-Symmetrie ist von den gleichen Autorinnen ebenfalls ein masseloses Vektor-Teilchen gefunden worden [32].

Bei den hier beschriebenen Untersuchungen ist das Photon in den $p = 1$ Korrelationsfunktionen des Operators ψ_3 sichtbar, die ein sehr klares Signal liefern (s. Abb. 4.1). In den $p = 0$ Korrelationsfunktionen (mit der falschen Parität $P = +1$, s. Kap. 4.1) ist dagegen kein Signal sichtbar. Die Existenz eines masselosen Photons in der Coulomb-Phase wird auch durch die im vorigen Kapitel gezeigte Coulomb-artige Form des Potentials in dieser Phase gestützt. Die gleichzeitige Existenz eines masselosen Photons und freier geladener Teilchen (Kap. 3) ist eine (numerische) Bestätigung dafür, daß das Theorem von Swieca [110,103] auch für die U(1)-Higgs-Theorie auf euklidischem Gitter gilt: freie abelsche Eich-Ladungen sind nur mit einer

verschwindenden Masse des an die Ladungen koppelnden Vektorfeldes verträglich.

Bis auf die Photon-Korrelationsfunktion fallen tief in der Coulomb-Phase alle Korrelationsfunktionen sehr schnell ab. Bis auf das Photon scheinen dort also alle Zustände sehr schwer zu sein, mit Massen oberhalb von zwei inversen Gitterabständen. In der Nähe des Higgs-PÜs sind dagegen zwei massive Zustände zu erkennen. Einer dieser Zustände erscheint im 0^{++} -Kanal, hat also die gleichen Quantenzahlen wie das Higgs-Boson. Der andere sichtbare Zustand ist ein 1^{--} Vektorboson. (Es dominiert die Korrelationsfunktionen des Operators ψ_2 sowohl für $p = 0$ als auch für $p = 1$.) Bei kleinen κ ist kein Beitrag eines masselosen Zustandes in diesen Korrelationsfunktionen sichtbar. Nahe am PÜ ist die Masse des 1^{--} -Zustandes so klein, daß ein Beitrag des Photons nicht ausgeschlossen werden kann.

Ich möchte die beiden schweren Zustände in der Coulomb-Phase als skalares bzw. vektoriell *Bosonium* bezeichnen. Der Grund hierfür ist die im vorigen Kapitel gezeigte Existenz freier geladener Teilchen in der Coulomb-Phase. Neutrale Paare solcher Teilchen wechselwirken sowohl durch die Coulomb-Kraft als auch durch die ϕ^4 -Kopplung. A priori ist nicht klar, ob diese Teilchen gebundene Zustände bilden; falls sie dies aber tun, so sollten die gebundenen Zustände in Korrelationsfunktionen solcher Operatoren sichtbar sein, die die Felder Φ^* und Φ enthalten, wie etwa ψ_1 und ψ_2 . In Kap. 3 ist die Masse m_c des freien geladenen Teilchens näherungsweise ermittelt worden (unter Gl.(3.38)). Die Massen sowohl des skalaren wie auch des vektoriellen Bosoniums sind in den MC-Rechnungen, zumindest für $0.175 < \kappa < \kappa_{PT}$, kleiner als $2m_c$ (bei gleichem λ und β). Daher ist ihre Interpretation als gebundene Zustände zweier bosonischer geladener Teilchen plausibel. Aus der Interpretation als Bindungszustände ist auch die Tatsache verständlich, daß das Vektorbosonium (als P-Zustand) schwerer ist als das skalare Bosonium.

Da die Wechselwirkung der geladenen Teilchen über die quartische Selbstkopplung bei den hier benutzten Werten von λ stark ist, gibt es keinen einfachen Weg, die Bindungsenergie der Bosonium-Zustände abzuschätzen. Die MC-Daten zeigen, daß die Bosonium-Massen viel kleiner als $2m_c$ sind, lassen also auf eine große Bindungsenergie schließen.

Massen im Higgs-Gebiet. Am Higgs-PÜ zeigt die Photon-Masse in Abb. 4.2 (innerhalb der hier erreichten Auflösung) keine Diskontinuität. Auch kurz oberhalb des PÜs ist sie noch mit Null verträglich. Dies korrespondiert damit, daß auch das statische Potential am Übergang keine merkliche Änderung aufweist (s. Kap. 3).

Oberhalb des PÜs ist das Spektrum von demjenigen in der Coulomb-Phase recht verschieden. Die Korrelationsfunktionen der beiden Vektoroperatoren ψ_2 und ψ_3 zerfallen etwa gleich schnell. Sie sind daher entweder vom gleichen Vektorzustand dominiert, oder von zwei verschiedenen Vektorzuständen mit etwa gleicher Masse. Die perturbative Analyse des Spektrums im Higgs-Gebiet in der unitären Eichung (Kap. 2.1) legt nahe, daß nur ein einziges Vektorboson vorliegt – das massive Photon. Wenn dies tatsächlich der Fall ist, dann gibt es zu dem in der Coulomb-Phase gefundenen schweren vektoriellen Bosonium kein Gegenstück im Higgs-Gebiet. Mit wachsendem κ gehen dann das massive vektorielle Bosonium und das masselose Photon am Higgs-PÜ in das massive Photon des Higgs-Gebietes über. Diese Interpretation wird im Rest dieses Kapitels verwendet. Die andere Möglichkeit sollte jedoch nicht völlig außer Acht gelassen werden, da nichtperturbative Effekte ein komplizierteres Spektrum verursachen könnten.

Die Photonmasse steigt oberhalb des PÜs sehr langsam an (s. Abb. 4.3). Die bei $\kappa = 0.3$ und 0.64 erreichten Werte sind mit den aus dem Yukawa-Potential bestimmten Werten (Kap. 3.2) (in etwa) konsistent. In der Higgs-Phase, bei $\kappa \gg \kappa_{PT}$, wird das Photon also massiv, wie vom Higgs-Mechanismus erwartet. In Abb. 4.3 ist auch der quasiklassische Wert Gl.(2.49) der Photonmasse eingetragen, für dessen Berechnung hier die *gemessene* Größe von $\langle \Phi^* \Phi \rangle$ benutzt wurde. Schon bald hinter dem Übergang stimmt er –überraschend genau– mit den MC-Resultaten überein. In der Higgs-Phase verhält sich das Photon also auch in den nichtperturbativen Rechnungen ganz so, wie es quasiklassisch erwartet wurde.

Die Higgs-Boson-Masse hat bei $\kappa = 0.178(2)$ ein Minimum. Oberhalb des Übergangs steigt die Higgsmasse viel schneller als die Photonmasse an und bei $\kappa = 0.3$ ist sie schon unmeßbar groß. Ihr Verhalten weicht stark von der quasiklassischen Näherung Gl.(2.48) ab, die in dem untersuchten κ -Intervall Werte zwischen etwa 5 und 8 ergeben würde. Die Position des Minimums der

Higgsmasse stimmt mit der Position des PÜs überein, die durch den Sprung in der Abschirmenergie μ in Kap. 3 bestimmt wurde. Die Higgs-Korrelationslänge wird am PÜ nahezu kritisch. (Dies stimmt mit dem Verhalten der Korrelationslänge des Landau-Ginzburg-Modells überein, welche hier der Higgs-Korrelationslänge entspricht.) Der Higgs-PÜ ist die Fortsetzung des PÜs der bei $\beta = \infty$ liegenden ϕ^4 -Theorie. Dort gibt es nur das skalare Boson, kein Vektorboson. *Das Kritisch-Werden (nur) der Higgs-Korrelationslänge am PÜ verdeutlicht, daß sich der PÜ auch bei endlichem β primär im skalaren Kanal abspielt.*

Die Massen in Abb. 4.2 zeigen keine deutliche Abhängigkeit von der Gittergröße. Im skalaren Kanal kann dies als Signal dafür aufgefaßt werden, daß die Higgs-Korrelationslänge die Gitterausdehnung hier nicht erreicht, daß sie also zwar groß, aber endlich ist. Ebenso wie der in Kap. 3 beschriebene Sprung in μ am PÜ deutet dies auf einen PÜ erster Ordnung hin.

In den Abbildungen 4.2 und 4.3 sind dimensionslose Gittergrößen a^m dargestellt, die direkt von der Gitterkonstanten a abhängen. Erst Quotienten wie m_S/m_V enthalten a nicht mehr unmittelbar. Sie eignen sich zur Definition von Renormierungsgruppen-Linien (mehr dazu in Kap. 4.2). Abb. 4.4 zeigt das Massenverhältnis m_S/m_V . Sein Verhalten ähnelt demjenigen des analogen Verhältnisses m_H/m_W , das in Kap. 4.2 beschrieben werden wird.

Zusammenfassung. Das Spektrum des U(1)-Higgs-Modells wurde in der Nähe des Higgs-PÜs bei starken Kopplungen numerisch untersucht. In diesem Gebiet der Kopplungsparameter gibt es dazu keine zuverlässigen analytischen Aussagen. In der Coulomb-Phase wurde das masselose Photon gefunden. Es ist nur in den Korrelationsfunktionen des Operators $\text{Im } U_p$ bei von Null verschiedenem Impuls sichtbar. Das Photon trägt nicht merklich zu den Korrelationsfunktionen des Kantenoperators $\text{Im } \Phi^* U \Phi$ mit Quantenzahlen 1^{--} bei, welche die Anwesenheit eines massiven Vektorzustandes in der Coulomb-Phase zeigen. Der Zustand, der die skalaren Korrelationsfunktionen dominiert, ist ebenfalls massiv. Diese beiden schweren Zustände werden als Bosonium-Zustände interpretiert, d.h. gebundene Zustände der freien skalaren Ladungen in der Coulomb-Phase. Ihre Massen wachsen mit abnehmendem κ schnell an, analog zur Masse des freien geladenen Teilchens (Kap. 3.5).

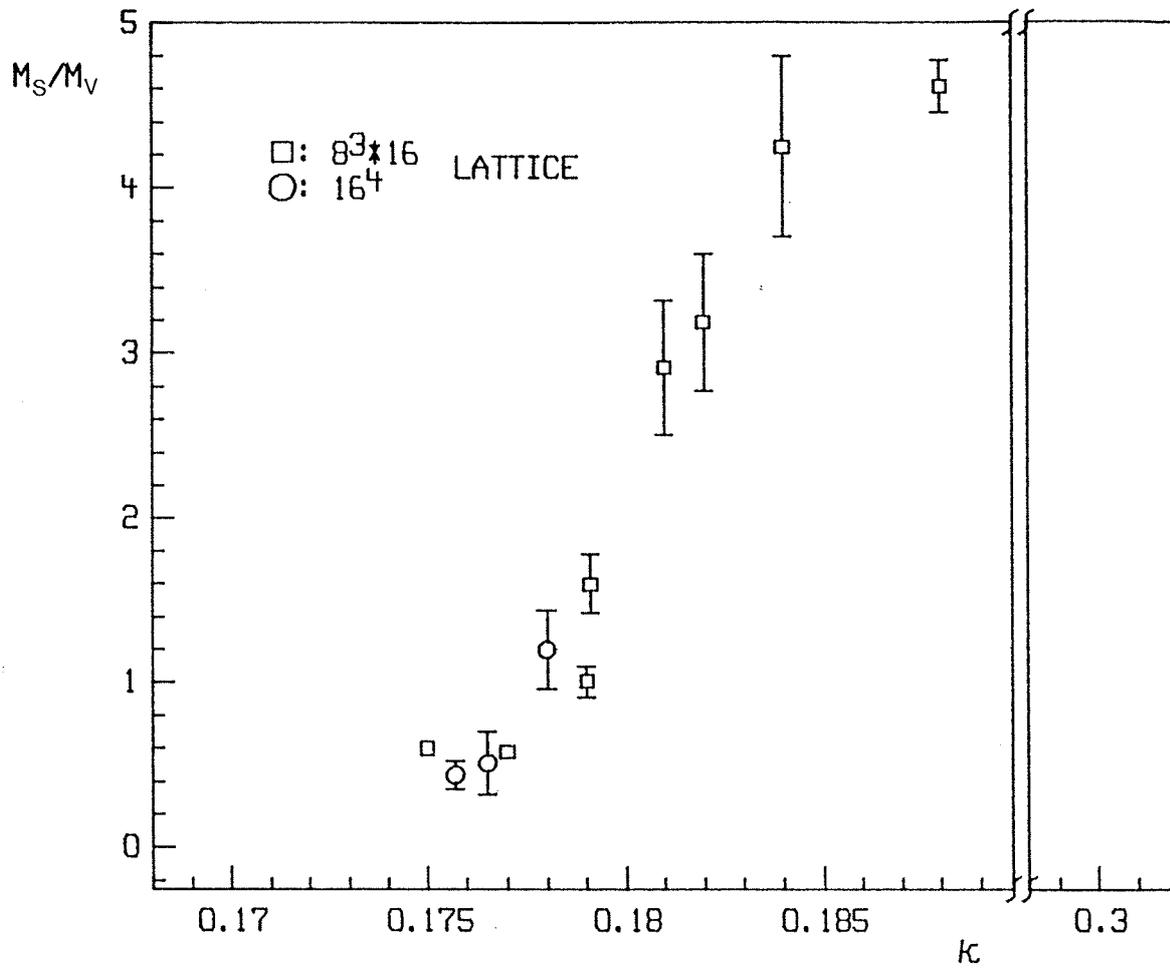


Abb. 4.4: Verhältnis m_s/m_v der Massen des skalaren und des Vektor-Bosons im U(1)-Higgs-Modell.

Oberhalb des Higgs-PÜs, im Higgs-Gebiet der Confinement-Higgs-Phase, gibt es das skalare Higgs-Boson, dessen Masse am PÜ klein ist und dann mit κ schnell anwächst. Beide Vektor-Korrelationsfunktionen werden dort entweder durch einen einzigen Vektorzustand, das massive Photon, dominiert, oder durch ein Paar von Vektorzuständen mit nahezu gleicher Masse. Ihre Masse ist kurz oberhalb des PÜs noch mit Null verträglich und wächst dann mit κ erheblich langsamer an als die Higgs-Masse. Die Masse in den Vektorkanälen ist dabei sehr gut mit dem quasiklassischen Wert verträglich.

Insgesamt zeigten die beschriebenen Untersuchungen im U(1)-Higgs-Modell ein reiches Spektrum von Bindungszuständen. Im Higgs-Gebiet ist die Masse des Photons in erstaunlich guter Übereinstimmung mit den perturbativen Resultaten, in der Coulomb-Phase zeigt das Modell das aus der QED erwartete Spektrum, insbesondere ist dort die Photon-Masse Null.

4.3 Massen im SU(2)-Higgs-Modell

Der Higgs-PÜ trennt im SU(2)-Higgs-Modell zwei Gebiete der gleichen Phase. Er entspricht hier in Bezug auf die Eichgruppe (im wesentlichen) dem Übergang im Standardmodell. Im Higgs-Gebiet ist daher ein (entartetes) Triplet von "W"-Bosonen zu erwarten, sowie ein massives Higgs-Boson. Im Confinement-Gebiet kann man einen wesentlichen Einfluß nichtperturbativer Effekte erwarten.

Die zentrale Frage der Gittereichtheorien ist die Annäherung an die Kontinuumstheorie. Dieser Grenzübergang muß an einem kritischen Punkt vorgenommen werden, wo Korrelationslängen in Einheiten der Gitterkonstanten a divergieren. Um Anhaltspunkte über den Verlauf von Renormierungsgruppentrajektorien und den Kontinuumsimes der Theorie zu erhalten, müssen daher Massen in der Nähe des Higgs-PÜs bestimmt und ihre Entwicklung entlang des PÜs untersucht werden.

Daher wurden die Higgsmasse m_H und die W-Masse m_W mit MC-Rechnungen auf $8^3 \cdot 16^-$ (und z.T. auch 16^4^-) Gittern in der Nähe von drei Punkten der Phasenübergangsfläche im SU(2)-Higgs-Modell bestimmt [53]. Es wurden die drei Kombinationen $(\lambda, \beta) = (0.5, 2.25)$, $(0.5, 2.4)$ und $(3, 2.25)$ gewählt, aus folgenden Gründen:

- (1) Rechnungen an diesen drei Punkten erlauben, die Abhängigkeit der Massen sowohl von λ als auch von β zu beurteilen.
- (2) Der Higgs-PÜ ist bei kleinen λ von 1. Ordnung und schwächt sich zu großen λ hin ab. Bei $\lambda = 0.5$ lagen zu Beginn der Rechnungen Anzeichen für kritisches Verhalten vor (vgl. aber Kap. 2.6).
- (3) Der Wert $\lambda = 3.0$ ist ein Kompromiß zwischen dem Bedürfnis, λ gegenüber $\lambda = 0.5$ deutlich zu erhöhen, und dem Wunsch, den radialen Teil des skalaren Feldes aktiv zu halten (bei $\lambda = \infty$ gilt $|\Phi| = 1$).
- (4) Es wurde erwartet, daß die Größe des Schrittes in β von $\beta = 2.25$ nach $\beta = 2.4$ ausreichen würde, eine wesentliche Änderung des Gitterabstandes zu bewirken. Der Grund für diese Annahme war das Verhalten der reinen SU(2)-Eichtheorie, in der zwischen diesen beiden β -Werten eine Skalenänderung um den Faktor $\sqrt{2}$ auftritt.

Der größte Teil der Rechnungen wurde auf einem $8^3 \cdot 16^-$ -Gitter durchgeführt. Die verlängerte Ausdehnung in "zeitlicher" Richtung wurde gewählt, um ein besseres Zerfallssignal für die Korrelationsfunktionen zu erhalten. Ich werde auch einige erste Ergebnisse zu Massen ansprechen, die aus den in Kap. 2.6 beschriebenen Rechnungen auf 16^4^- -Gittern gewonnen wurden. Pro Datenpunkt wurden zwischen 20000 und 100000 MC-Iterationen ausgeführt. (Näheres in [53].) Ähnliche Untersuchungen auf 8^4^- und 12^4^- -Gittern sind von Montvay, Langguth und Weisz durchgeführt worden [49], mit vergleichbaren Ergebnissen.

Operatoren und Messungen. Für das Higgs-Teilchen wurde vor allem

$$\psi_4(\vec{x}, t) = \sum_{\mu=1}^3 \text{Re tr}(\Phi_{\vec{x}}^\dagger U_{x\mu} \Phi_{x+\mu}) \quad (4.13)$$

als Operator verwendet, und für das Vektorboson

$$\psi_5(\vec{x}, t) = \text{Re tr}(\sigma_x^\dagger U_{x\mu} \sigma_{x+\mu} \vec{\tau}) \quad , \quad \mu = 1, 2, 3 \quad . \quad (4.14)$$

In den hier beschriebenen Rechnungen wurden nur die auf Impuls Null projizierten Operatoren untersucht. Gemäß Tabelle 4.1 entsprechen die Operatoren ψ_4 und ψ_5 den Quantenzahlen $(J)J^{PC} = (0)0^{++}$ bzw. $(1)1^{--}$. Die Korrelationsfunktionen wurde auf die gleiche Art bestimmt, wie in Kap. 4.2 beschrieben. (Die Korrelationen des Operators ψ_5 wurden über die Raumrichtungen $\mu = 1,2,3$ gemittelt.) Die Messungen wurden zur Abschätzung des statistischen Fehlers in Blocks zu je 1000 MC-Iterationen kombiniert. In der Nähe des Higgs-PÜs traten in den MC-Simulationen auf dem $8^3 \cdot 16$ -Gitter langlebige Fluktuationen mit einer Länge bis zu 8000 MC-Iterationen auf. Die angegebenen statistischen Fehler sind daher dort vermutlich unterschätzt. Bei einem Übergang 2. Ordnung wären zur Berechnung zuverlässiger Werte und statistischer Fehler wesentlich längere MC-Läufe nötig gewesen. Die auf dem 16^4 -Gitter gewonnenen Ergebnisse legen aber (bei $\lambda = 0.5$) einen Übergang 1. Ordnung nahe. *Die beiden Phasen können auf dem $8^3 \cdot 16$ -Gitter nicht klar genug voneinander getrennt werden, so daß im Übergangsbereich auf diesem Gitter vermutlich beide Phasen zu den MC-Resultaten beitragen.* Das Schwergewicht der Untersuchungen lag nicht darauf, an einzelnen Punkten möglichst geringe statistische Fehler zu erreichen, sondern es sollte ein allgemeines Bild der Situation am Übergang durch Untersuchung vieler κ -Werte gewonnen werden. Zur Überprüfung der Ergebnisse wurden an einer Reihe von Punkten längere MC-Läufe mit 50000-100000 Iterationen durchgeführt, die die übrigen Ergebnisse bestätigten. (Für weitere Details siehe [53].)

Technische Details zu den Fits. Im Higgs-Gebiet deutlich oberhalb von κ_{PT} zeigen die Korrelationsfunktionen schon ab $\Delta t \approx 1$ asymptotisches Verhalten. Oberhalb von κ_{PT} wurden die Fits dennoch immer erst ab $\Delta t = 2$ ausgeführt, um systematische Fehler möglichst gering zu halten.

Im Confinement-Gebiet sind die Fluktuationen aller Korrelationsfunktionen wesentlich größer als im Higgs-Gebiet. Weit unterhalb von κ_{PT} fallen die Korrelationen sehr schnell mit Δt ab und stabile Fits waren nur möglich, wenn Korrelationen bei $\Delta t = 1$ eingeschlossen wurden. Um einen stetigen Übergang zu den mit $\Delta t = 2$ startenden Fits zu ermöglichen, wurden unterhalb von κ_{PT} die Massenwerte aus Fits mit $\Delta t = 1$ und $\Delta t = 2$ gemittelt. Zu den statistischen Fehlern wurde der systematische Fehler (aus dem Unterschied der Fit-Ergebnisse) addiert.

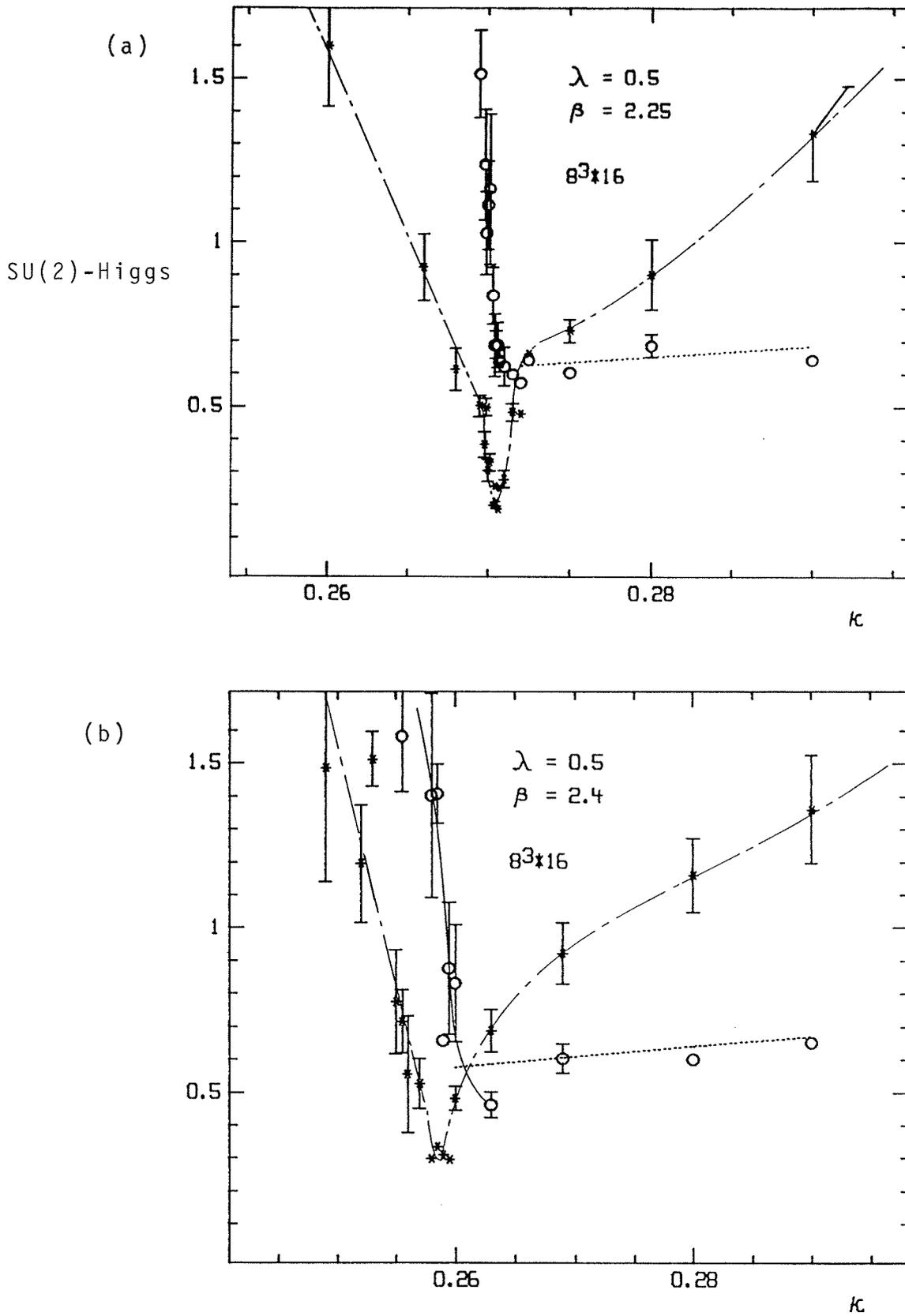
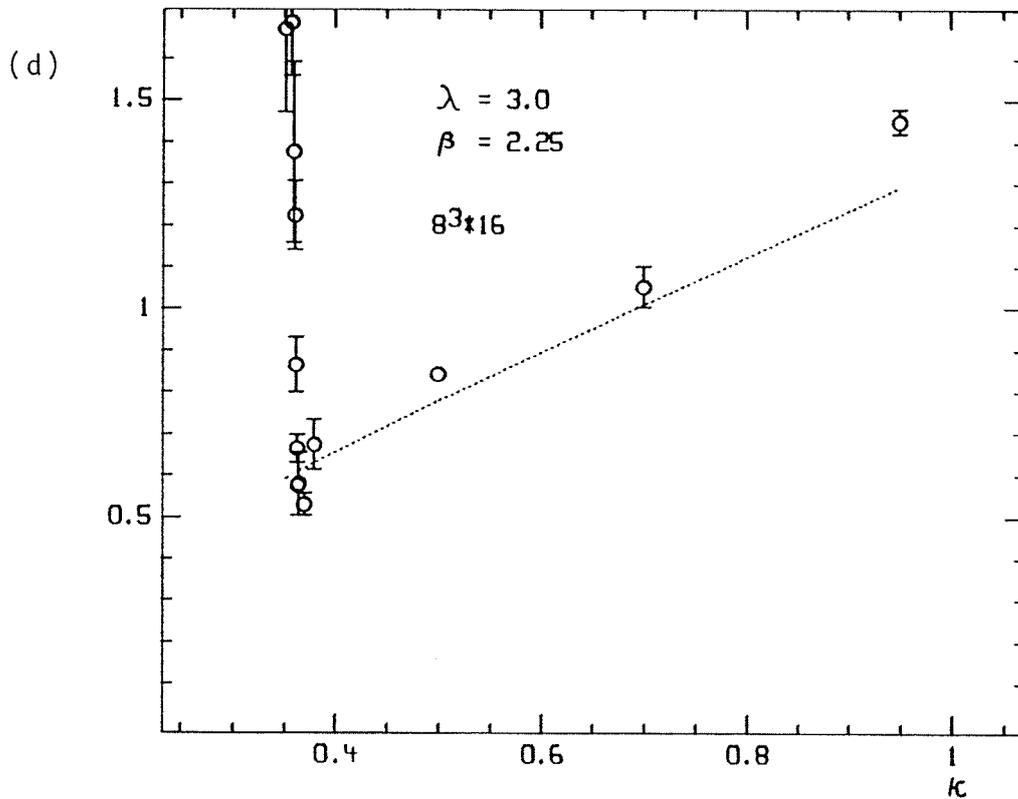
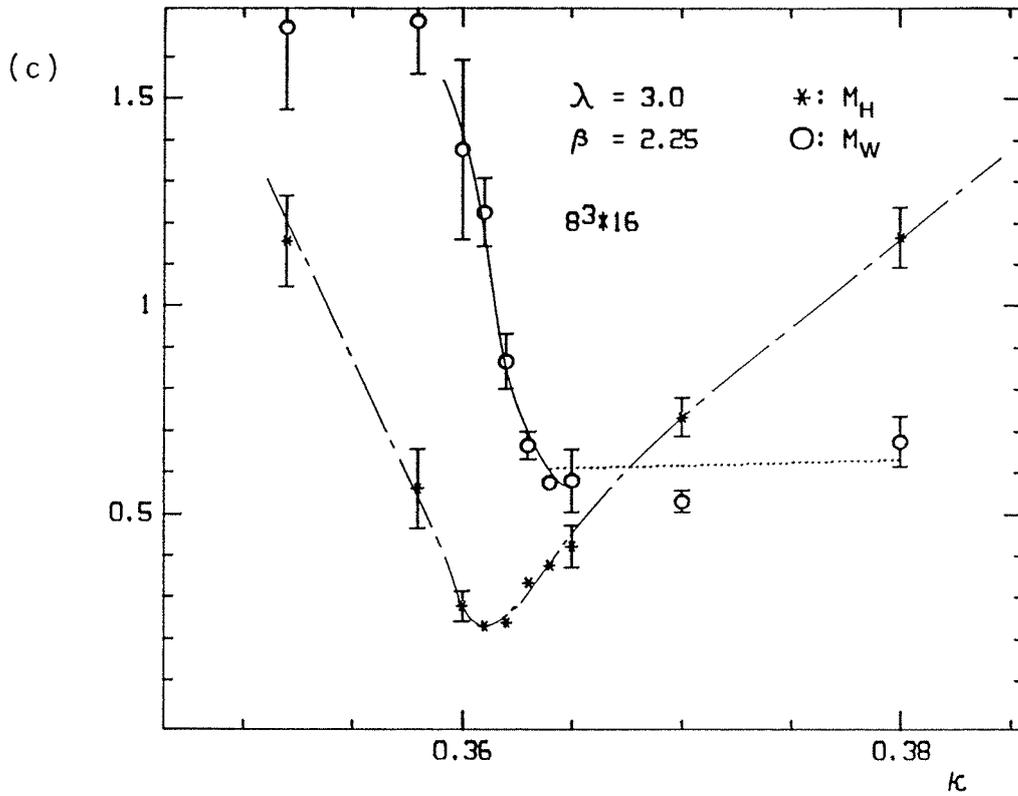


Abb. 4.5: Aus den Korrelationsfunktionen ψ_4 und ψ_5 gewonnene Massen m_H (Kreuze) und m_W (Kreise) in der Umgebung des Higgs-PÜs für (a) $\lambda = 0.5$, $\beta = 2.25$, (b) $\lambda = 0.5$, $\beta = 2.4$ und (c) $\lambda = 3$, $\beta = 2.25$. In Bild (d) ist für die gleichen Kopplungen wie in (c) die W-Masse auf einem großen κ -Intervall aufgetragen. Die gestrichelten Linien



stehen für die quasiklassische Näherung Gl.(2.49) an m_W , wobei die gemessenen Werte von $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle$ benutzt wurden. Die übrigen Kurven sollen lediglich zu einer besseren optischen Trennung von m_H und m_W und zur Verdeutlichung der Daten beitragen.

Der maximale in den Fits benutzte Wert für Δt wurde durch die Forderung bestimmt, daß die Korrelationsfunktionen dort wenigstens 1.5 Standardabweichungen über Null liegen mußten. Alle Fits wurden zumindest bis $\Delta t = 4$ durchgeführt. In der Umgebung des PÜs und in einem Teil des Higgs-Gebietes hatten die Korrelationsfunktionen bis hin zu $\Delta t = 8$ geringe Fehler.

Higgs-Masse m_H . Die aus den Fits gewonnenen Massen m_H und m_W sind in Abb. 4.5 wiedergegeben. Bei gleichem Abstand zum jeweiligen PÜ ist das Verhalten in allen drei Fällen sehr ähnlich. Die Higgs-Masse zeigt am PÜ ein sehr deutliches Minimum bis auf mindestens $0.3/a$ hinab, und sie steigt dann im Higgs-Gebiet wieder schnell an. Die Position und Breite der Minima stimmt mit denjenigen der sehr scharfen Maxima der spezifischen Wärme überein. Auch im SU(2)-Higgs-Modell bestimmt also die Korrelationslänge im skalaren Kanal den Higgs-PÜ. Bei $(\lambda, \beta) = (0.5, 2.25)$ erreicht die Higgs-Korrelationslänge in Abb. 4.5b sogar $5a$ und wird damit der Gittergröße vergleichbar. Allerdings ist dieser auf dem $8^3 \cdot 16$ -Gitter gewonnene Wert vermutlich von den Sprüngen zwischen den beiden Phasen-Gebieten beeinflusst: Durch solche Sprünge weicht der *mittlere* Wert des Higgs-Operators $\langle \psi_4 \rangle$ von dem Wert *innerhalb* jeder der beiden Phasen-Gebiete deutlich ab. Dies führt zu einem zusätzlichen additiven Beitrag zu den subtrahierten Korrelationsfunktionen $C_4(\Delta t)$ von ψ_4 (Gl.(4.6)), auch bei großen Δt , und damit zu einer zu kleinen Masse im Fit.

In allen Fällen unterscheidet sich die Higgsmasse auch im SU(2)-Higgs-Modell erheblich von dem quasiklassischen Resultat Gl.(2.49), dessen Wert im gesamten untersuchten Bereich oberhalb von 4 liegt. Weit oberhalb des Higgs-PÜs ist die Higgsmasse zu groß, um noch meßbar zu sein. Eine eventuelle Annäherung an den quasiklassischen Wert kann deshalb nicht überprüft werden.

Vektorboson-Masse m_W . Die W-Masse ist im Confinement-Gebiet deutlich größer und im Higgs-Gebiet kleiner als m_H . Am PÜ fällt sie sehr steil ab. Sie bleibt aber immer größer als etwa $0.5/a$. Oberhalb des PÜs steigt die W-Masse sehr langsam linear in κ an. Sie ist dabei -überraschenderweise- schon unmittelbar oberhalb des Übergangs mit dem aus Gl.(2.49) bestimmten

quasiklassischen Resultat gut verträglich (wobei in Gl.(2.49) der *gemessene* Wert von $\langle \Phi^+ \Phi \rangle$ benutzt wurde). Die Übereinstimmung mit dem quasiklassischen Wert tritt hier anscheinend noch früher auf als im U(1)-Higgs-Modell.

Massen auf dem 16^4 -Gitter. Auch bei den in Kap. 2.6 beschriebenen Rechnungen zur Ordnung des Higgs-PÜs wurden Massen bestimmt. Unter anderem wegen der dort (in der MC-Zeit) viel langsameren Entwicklung des Systems können die Zustände am PÜ klarer getrennt werden als auf dem $8^3 \cdot 16$ -Gitter (vgl. Abb. 2.2, 2.3). Andererseits sind aus dem gleichen Grund auch sehr lange MC-Läufe nötig, um Gleichgewichtsergebnisse zu erreichen. Die (hier nicht gezeigten) Resultate für die Massen auf dem 16^4 -Gitter gleichen denjenigen für das $8^3 \cdot 16$ -Gitter und sind mit diesen kompatibel. Insbesondere tritt weiterhin ein Minimum in der Higgs-Masse auf und die Entwicklung von m_W verläuft (analog zu dem Verhalten von $\langle \Phi^+ U \Phi \rangle$ auf den beiden Gittern) noch steiler als auf dem $8^3 \cdot 16$ -Gitter.

Weitere Operatoren. In den MC-Rechnungen wurden auch die Korrelationen einer Reihe weiterer Operatoren untersucht. Die aus den 0^{++} -Operatoren (a),(c),(d) oder (e) der Tabelle 4.1 bestimmten Massen sind mit der aus dem Operator ψ_4 (b) gewonnenen Higgs-Masse kompatibel, besonders die Plaketten-Operatoren weisen aber größere statistische Fehler auf. Die Korrelationsfunktionen des 2^{++} -Operators (f) in Tabelle 4.1 fallen sehr schnell ab, hier ist kein Teilchen sichtbar. Dies unterstützt die in Gl.(4.7) implizite Annahme, daß Zustände mit hohem Spin, die im Prinzip zu jeder Korrelationsfunktion beitragen können, sehr schwer sind. Die Korrelationen des Kantenoperators in Gl.(4.15) wurden für jede Richtung $\mu = 1,2,3$ einzeln berechnet (statt für die Summe). Dadurch hätte zusätzlich ein Beitrag eines Teilchens mit $J^{PC} = 2^{++}$ auftreten können, der aber (wie auch in Ref.[49]) nicht beobachtet wurde. Die Korrelationen des $(I)J^{PC} = (1)0^{+-}$ -Operators (i) aus Tabelle 4.1 zeigten (aus bisher nicht verstandenen Gründen) bei Abständen $\Delta t > 0$ keinerlei Signal. Es wurden auch Korrelationen zwischen *unterschiedlichen* 0^{++} -Operatoren bestimmt. Die Resultate waren auch hier wieder mit der angegebenen Higgs-Masse konsistent, bei etwas größeren statistischen Fehlern.

Schlußfolgerungen.

- (1) Die Massenkurven bei verschiedenen λ sind miteinander in etwa kompatibel. Sie weichen allerdings in den PÜ-Gebieten bezüglich der Breite des Minimums ab, die zu größeren λ hin anwächst. In der skalaren ϕ^4 -Theorie scheint λ eine irrelevante Größe zu sein. Dies könnte für große λ auch im SU(2)-Higgs-Modell der Fall sein [49]. Dem steht allerdings entgegen, daß die hier untersuchten PÜe vermutlich von 1. Ordnung sind, die sich mit steigendem λ abschwächt. (Bei $\lambda = \infty$ werden PÜe 2. Ordnung erwartet.) Es wäre im übrigen bemerkenswert, wenn bei konstantem β lediglich κ zu renormieren wäre, um λ -unabhängige Resultate zu erhalten. Wenn aber λ tatsächlich eine irrelevante Größe sein sollte, so hätte die Theorie im Kontinuumsimes (wenn sie dort nicht ganz trivial wird) einen relevanten Parameter weniger als in der ursprünglichen Formulierung, und es könnte (z.B) die Higgs-Masse berechenbar sein.
- (2) Außerhalb der unmittelbaren PÜ-Regionen sind die Massenkurven auch bei verschiedenen β miteinander kompatibel. (Dies könnte auch erklären, warum die Kurven für verschiedene λ einander schon bei konstantem β ähnlich sind.) Im Higgs-Gebiet scheinen die Werte von m_W bei $\beta = 2.4$ etwas tiefer als bei $\beta = 2.25$ zu liegen. Ein solches Absinken wird auch durch die Verträglichkeit der MC-Daten für die W-Masse mit den quasi-klassischen Werten, Gl.(2.49) nahegelegt. Letztere ergeben ein Abfallen der W-Masse nur wie $1/\sqrt{\beta}$. Dies weicht erheblich von dem exponentiellen Skalenverhalten der reinen SU(2)-Eichtheorie ab, welches zur Wahl des β -Schrittes von 2.25 nach 2.4 Anlaß gegeben hatte. Ein denkbare Szenario für das Verhalten von m_W bei großen β wäre ein langsames Abfallen gemäß Gl.(2.49) bei großem Abstand vom PÜ, aber schnelleres exponentielles Abfallen im Higgs-Gebiet innerhalb des PÜ-Bereiches, der in den MC-Resultaten mit wachsendem β an Breite zunimmt¹⁾. Wirklichen Aufschluß können hier nur weitere nichtperturbative Rechnungen bringen, bei größeren Werten von β und mit größeren Schrittweiten in β .
- (3) Am Higgs-PÜ zeigen Higgs-Masse und W-Masse qualitativ verschiedenes

1) Dies wäre auch mit den in Kap. 2.1 vorgestellten perturbativen 1-Schleifen-Rechnungen bei kleinen g^2 (und allerdings *sehr* kleinen λ) vereinbar, die gemäß Gl.(2.24) bei geringen Abständen vom PÜ einen exponentiell kleinen Wert von m_W vermuten lassen, während bei großen Abständen ($-m^2 \gg 0$) in Gl.(2.24) der quasiklassische Anteil über die 1-Schleifen-Korrektur dominiert.

Verhalten. Die Higgs-Masse hat ein deutliches Minimum, während die W-Masse nicht unter $0.5/a$ fällt. Letzteres bedeutet, daß ein Kontinuums-limes mit endlichem m_W im untersuchten Kopplungsparameter-Bereich nicht möglich wäre. Vermutlich muß man β erhöhen, um ein qualitativ anderes Bild zu finden (s.o.).

- (4) Im Verhältnis $a \cdot m_H / a \cdot m_W$ fällt die Gitterkonstante a heraus. Dieses Verhältnis kann daher im Prinzip mit dem Experiment verglichen werden. Abb. 4.6 zeigt m_H/m_W bei $(\lambda, \beta) = (0.5, 2.4)$. Die entsprechenden Bilder bei $(0.5, 2.25)$ und $(3, 2.25)$ sind mit Abb. 4.6 innerhalb der Fehlerbalken kompatibel. Interessanterweise hat auch m_H/m_W am PÜ ein Minimum. Im untersuchten κ -Gebiet liegen seine Werte zwischen 0.2 und 2. (Aufgrund des Verhaltens der Higgs-Masse ist auch m_H/m_W stark von der quasiklassischen Näherung Gl.(2.49) verschieden.) Flächen mit konstantem Verhältnis m_H/m_W im 3-dimensionalen Kopplungsparameter-Raum ergeben Informationen über die "Kurven konstanter Physik", also die Renormierungsgruppen-trajektorien, im Raum aller Kopplungen. Diese Flächen können auch verwendet werden, um Aussagen über eine eventuell zu untersuchende effektive Theorie mit endlichem Abschneideparameter zu erzielen, auch wenn der PÜ bei großem β weiterhin von (schwacher) 1. Ordnung sein sollte. Aus der großen Ähnlichkeit der m_H/m_W -Kurven an allen drei (λ, β) -Punkten folgt, daß im untersuchten Kopplungsparameter-Bereich die "Kurven konstanter Physik" näherungsweise parallel zur Higgs-Übergangsfläche im Raum der Kopplungen λ, β, κ verlaufen, sowohl im Confinement- als auch im Higgs-Gebiet. Das (vermutete) leichte Abfallen von m_W mit β im Higgs-Gebiet würde bedeuten, daß diese Linien sich mit wachsendem β langsam an die Higgs-Übergangsfläche annähern.
- (5) Die Eigenschaften der Higgsmasse und der Vektorbosonmasse und auch ihres Verhältnisses im SU(2)-Higgs-Modell ähneln sehr den Eigenschaften von m_S und m_V bzw. m_S/m_V im U(1)-Higgs-Modell, Abb. (4.2) und (4.3). Solche Ähnlichkeiten legen nahe, daß man auch im SU(2)-Higgs-Fall analog zum U(1)-Higgs-Modell das skalare und das vektorielle Boson unterhalb des Higgs-PÜs physikalisch als gebundene Zustände von SU(2)-Dubletts skalarer Konstituenten interpretieren kann. Diese gebundenen Zustände sind dem Bosonium in der Coulomb-Phase des U(1)-Higgs-Modells analog. Das skalare Dublett des SU(2)-Higgs-Modells (für das allerdings Confinement gilt) entspricht dann dem freien skalaren Teilchen im U(1)-Higgs-Modell.

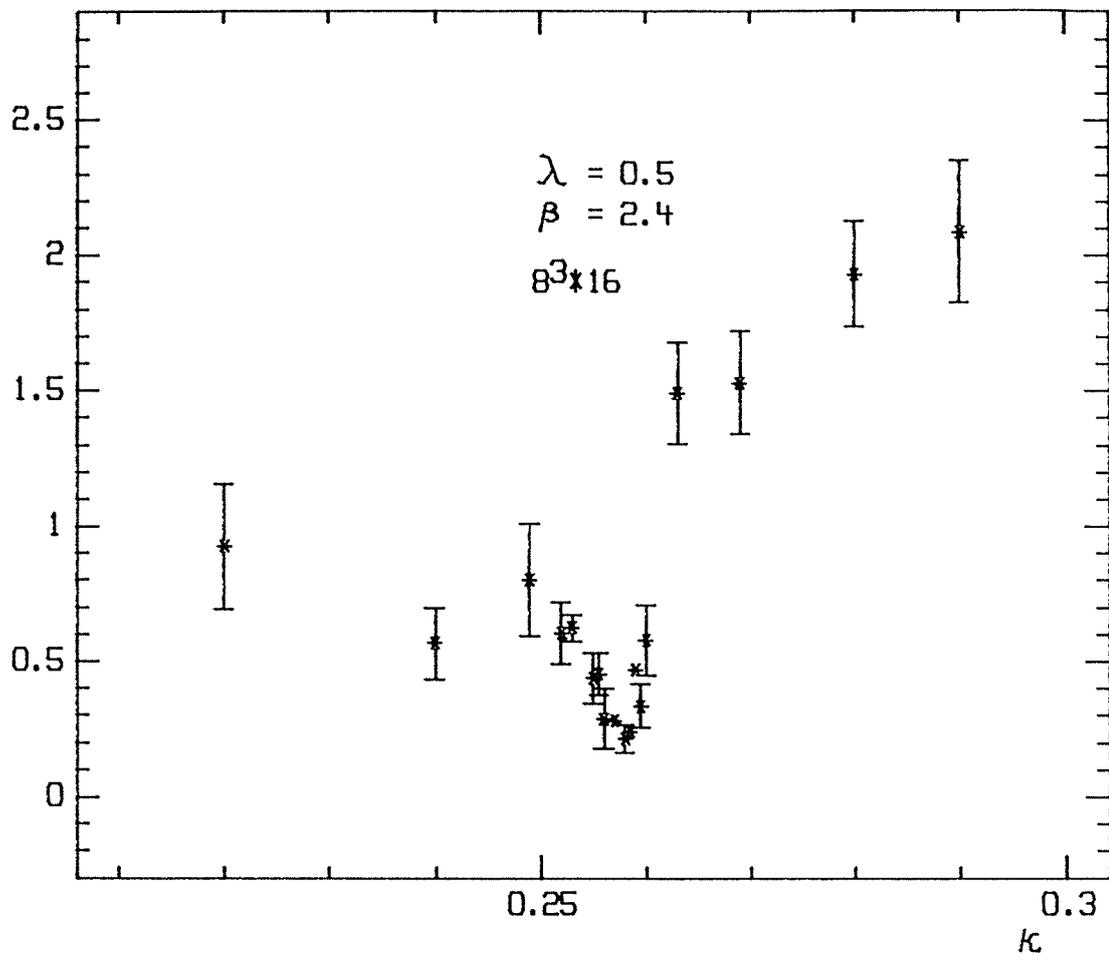


Abb. 4.6: Verhältnis m_H/m_W der in Abb. 4.5b gezeigten Massen, im SU(2)-Higgs-Modell bei $\lambda = 0.5$, $\beta = 2.4$.

Zum Kontinuumslikes. Über einen möglichen Kontinuumslikes des SU(2)-Higgs-Modells ist bisher nur wenig bekannt. Die Higgs-Masse könnte man erst dann vorhersagen, wenn ein solcher Limes konstruiert wäre und auf eine wechselwirkende Theorie führen sollte, in der vielleicht die möglichen Werte von m_H eingeschränkt wären. Wegen der Endlichkeit der W-Masse und ihrem (vermutlichen) Abfallen mit β scheint ein Kontinuumslikes nur bei sehr großen β möglich zu sein. Dies wird auch dadurch nahegelegt, daß bei den untersuchten β -Werten der Phasenübergang von 1. Ordnung zu sein scheint (s. Kap. 2.6), die sich aber mit wachsendem β abschwächt. Der einzige bisher bekannte Renormierungsgruppen-Fixpunkt des SU(2)-Higgs-Modells ist der Gaußsche Fixpunkt bei $\beta = \infty$, $\lambda = 0$, $\kappa = \kappa_{PT}$. (Er entspricht formal dem Gaußschen Fixpunkt der Gitter-QCD.) Perturbative Rechnungen in der Nähe dieses Fixpunktes deuten aber darauf hin, daß sich die Trivialität des φ^4 -Modells bei $\beta = \infty$ auch auf das Eichfeld-Higgs-System überträgt: die perturbativen Rechnungen führen auf eine Theorie *freier* massiver Bosonen [59]. Dies schließt aber z.B. nicht aus, daß das Standardmodell eine effektive Theorie wechselwirkender Teilchen mit endlichem Abschneideparameter sein könnte. Die maximale Größe des Abschneideparameters wäre dann mit der Higgsmasse verknüpft [59]. (Dies wurde auch schon in Kap. 2.1 im Zusammenhang mit der Trivialität der φ^4 -Theorie diskutiert.) Auch können solche Rechnungen, bei $\lambda \ll 1$, nicht das (nichtperturbative) Verhalten des Modells bei großen λ erschließen.

Nichtperturbativ ist aber über die Renormierungsgruppenstruktur des SU(2)-Higgs-Modells noch sehr wenig bekannt. Für die Existenz eines weiteren Fixpunktes liegen zwar keine Indizien vor [64], sie ist aber nicht ausgeschlossen. Nötig sind daher vor allem Monte-Carlo-Renormierungsgruppen- (MCRG-) Untersuchungen des SU(2)-Higgs-Modells und des vollen SU(2) \otimes U(1)-Higgs-Modells, um über Fixpunkte, mögliche Kontinuumslikes und deren Eigenschaften Näheres zu erfahren. Es müssen auch PÜe 2. Ordnung aufgefunden werden, und die Entwicklung der Massen mit den Kopplungskonstanten muß weiter untersucht werden. Durch Linien konstanten Massenverhältnisses und, als weiterer physikalischer Größe, (z.B.) konstanter effektiver Eichkopplung können so auf eine unabhängige Weise die RG-Trajektorien bestimmt und mit den MCRG-Resultaten verglichen werden.

Kapitel 5: Das SU(2)-Higgs-Modell bei endlicher Temperatur.

Nach einführenden Erläuterungen definiere ich in Kap. 5.1 die Systeme mit endlicher Temperatur ($T > 0$) und zugehörige Observable und erläutere den später verwendeten Begriff des "Crossovers". In Kap. 5.2 bespreche ich Ergebnisse zum Higgs-Übergang bei endlicher Temperatur [58]. Kap 5.3 enthält Schlußfolgerungen.

5.1 Einleitung.

Zusätzlich zu den drei Kopplungen β , λ und κ hängen die Eigenschaften der Higgs-Modelle noch von einem vierten Parameter entscheidend ab, nämlich der physikalischen Temperatur T . Alle bisher besprochenen Untersuchungen fanden auf symmetrischen oder in Zeitrichtung verlängerten Gittern statt (mit in Zeit- und Raum-Richtungen gleichen Kopplungen); dies entspricht (annähernd) Temperatur Null. Wird das Gitter in Zeitrichtung verkleinert, so steigt die physikalische Temperatur an (s.u.).

Die reine SU(2)-Eichtheorie durchläuft bei wachsender Temperatur einen "Deconfinement"-Phasenübergang, der sehr intensiv untersucht worden ist [11]. Der Einfluß dynamischer (skalärer oder fermionischer) Materiefreiheitsgrade auf diesen Übergang ist zwar noch nicht vollständig geklärt, aber doch in den wesentlichen Zügen schon verstanden [111]. Er ist bei Untersuchungen auf dem Gitter wesentlich einfacher mit skalaren als mit fermionischen Feldern analysierbar. Die deswegen möglichen statistisch genaueren Ergebnisse im Higgs-Modell helfen beim Verständnis des Deconfinement-Übergangs der QCD. In der hier vorgestellten Monte-Carlo-Untersuchung [58] zum SU(2)-Higgs-Modell bei endlicher Temperatur wurde unter anderem gezeigt, daß der Deconfinement-Übergang bei Ankopplung skalärer Materiefelder in ein "Crossover" (s.u.) übergeht. Auf diesen Teil unserer Ergebnisse will ich jedoch im folgenden nicht weiter eingehen.

Dagegen sind die Auswirkungen hoher Temperatur auf den Higgs-Übergang und im Higgs-Gebiet noch weitgehend unbekannt.

Perturbative Rechnungen von Kirzhnits, Linde, Weinberg (KLW) und anderen sagen voraus, daß bei genügend hoher Temperatur die "Symmetriebrechung" des Higgs-Mechanismus aufgehoben wird [77-79]. Eine nichtperturbative Überprüfung und genauere Untersuchung dieser Vorhersage ist wünschenswert. Dies war Motivation für eine Reihe von analytischen [16,55] und numerischen [23,28,56-58] Arbeiten über Gitter-Higgs-Modelle bei endlicher Temperatur. In Kapitel 5.2 beschreibe ich Monte-Carlo-Ergebnisse [58], die mit hoher Statistik auf Gittern der Größen $8^3 \cdot 2$, $16^3 \cdot 2$ und 8^4 gewonnen wurden und mit dem KLW-Szenario in Einklang stehen.

Die beiden erwähnten PÜe sind sehr wichtig für Theorien der Geschichte des frühen Universums. Das Einsetzen des Higgs-Mechanismus erst unterhalb einer bestimmten Temperatur (sowie Details des perturbativ bestimmten effektiven Potentials) sind Grundlage für das sehr erfolgreiche Szenario des inflationären Universums [81]. Bei sehr viel niedrigerer Temperatur ging während der Expansion des Universums das Quark-Gluon-Plasma ($T > T_c$) der QCD am Deconfinement-Übergang in hadronische Materie ($T < T_c$) über.

Wie die MC-Ergebnisse zeigen werden, entwickelt sich aus dem Higgs-PÜ bei hoher Temperatur ebenfalls ein Crossover. Unter dem Begriff des Crossovers soll hier eine plötzliche, aber stetige Änderung von Observablen verstanden werden, bei der sich auf großen Gittern keine Abhängigkeit von der Gittergröße zeigt. Um ein Maß für die Gitterabhängigkeit des Verhaltens von Observablen zu erhalten, wurden die bekannten Resultate über Effekte endlicher Gittergröße im SU(2)-Higgs-Modell bei Temperatur $T = 0$ herangezogen. Ein Crossover kann aber bei den numerischen Untersuchungen nicht wirklich von einem sehr schwachen PÜ hoher Ordnung unterschieden werden, der vielleicht in den untersuchten Observablen keine Effekte endlicher Gittergröße zeigt. Der Begriff "Crossover" soll deshalb im folgenden auch diese Möglichkeit umfassen.

Wenn eine schnelle Änderung von Observablen von einem PÜ herrührt, so wird das Signal auf einem größeren Gitter klarer. Entsprechend folgt aus einem glatten, von der Gittergröße unabhängigen Verhalten das Vorliegen eines Crossovers. Die Umkehrung dieser Aussagen ist nicht immer richtig: Bei einem Crossover sehr nahe zu einem PÜ zweiter Ordnung ist die Korrelationslänge vergleichbar mit der Gittergröße, so daß das Crossover wie ein PÜ aussehen kann.

Ich möchte nun die Gittersysteme endlicher Temperatur vorstellen. Sie werden auf einem isotropen $N_s^3 \cdot N_t$ -Gitter mit Gitterabstand a durch die Zustandssumme

$$Z(T) = N(T) \int DU D\varphi e^{-S(T)} \quad (5.1)$$

beschrieben. Die Temperatur ist $T = 1/(N_t a)$. Durch Verkleinern des Gitters in "zeitlicher" Richtung erreicht man also eine Erhöhung der Temperatur. Der Faktor $N(T)$, der die Grundzustandsenergie normiert, rührt von der Um-Schreibung der ursprünglich Hamiltonischen Formulierung des Modells endlicher Temperatur in den Lagrangeformalismus her [112].

Die hier untersuchte thermodynamische Größe ist die Energiedichte

$$\begin{aligned} \varepsilon &= - \frac{1}{a^3 N_s^3} \frac{\partial}{\partial (1/T)} \ln Z(T) \\ &\equiv \varepsilon_G + \varepsilon_H, \end{aligned} \quad (5.2)$$

wobei ε_G die Energiedichte für das reine Eichsystem ist und ε_H der zusätzlich vom skalaren Feld verursachte Beitrag :

$$\begin{aligned} a^4 \varepsilon_G &= 3\beta (\langle P_s \rangle - \langle P_t \rangle), \\ a^4 \varepsilon_H &= 2k (\langle \Phi^\dagger U_t \Phi \rangle - 3\langle \Phi^\dagger U_s \Phi \rangle + 2\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle_0) \\ &\quad + \lambda (\langle \rho^4 \rangle - \langle \rho^4 \rangle_0) + (1 - 2\lambda - 4k)(\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho^2 \rangle_0). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Der Index s bzw. t steht für die räumliche bzw. zeitliche Richtung und

$$\begin{aligned} P_{s \setminus t} &\equiv \frac{1}{3N_t N_s^3} \sum_{p=s \setminus t} (1 - \frac{1}{2} \text{Re Tr } U_p), \\ \Phi^\dagger U_\mu \Phi &\equiv \frac{1}{N_t N_s^3} \sum_{\mathbf{x}} \rho_{\mathbf{x}} \rho_{\mathbf{x}+\mu} \frac{1}{2} \text{Re Tr}(\sigma_{\mathbf{x}}^\dagger U_{\mathbf{x}\mu} \sigma_{\mathbf{x}+\mu}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

sind hier geeignet normiert worden. Der Ausdruck $\langle \dots \rangle_0$ steht jetzt für den Erwartungswert bei $T = 0$, der die Grundzustandsenergie korrigiert und durch den Erwartungswert auf einem symmetrischen N_s^4 -Gitter angenähert werden kann.

Technische Bemerkungen. Die in diesem 5. Kapitel beschriebenen Monte-Carlo-Rechnungen [58] wurden auf die gleiche Art durchgeführt wie die Rechnungen bei Temperatur Null. Auf einem $8^3 \cdot 2$ -Gitter wurde jeder Datenpunkt aus 4800–9600 Iterationen gewonnen, auf einem $16^3 \cdot 2$ -Gitter aus 6000 und auf einem $8^3 \cdot 4$ -Gitter aus 10000–12000 Iterationen. Den Subtraktionen in ε_H dienten jeweils 28000–60000 Iterationen auf einem 8^4 -Gitter. Die Kopplungsparameter (β bzw. κ) wurden in der Art einer Hysterese durchfahren, mit einer angemessenen Anzahl von Thermalisierungs-Iterationen an jedem Punkt (abhängig von der Gittergröße und vom Abstand zum vorhergehenden Punkt). An mehreren Punkten wurden die Rechnungen mit unterschiedlichen Start-Konfigurationen wiederholt, um die Stabilität der Ergebnisse zu überprüfen und eventuelle Hysterese-Effekte zu sehen. Es wurden keine Hysteresen beobachtet.

5.2 Der Higgs-Phasenübergang bei endlicher Temperatur.

Im Grenzfall $\beta = \infty$ geht das SU(2)-Higgs-Modell in eine reine ϕ^4 -Theorie mit SO(4)-Symmetrie über. Bei endlichen Temperaturen ist dieses Modell noch nicht in Monte-Carlo-Rechnungen untersucht worden. Gemäß perturbativer Analysen im Kontinuum besitzt es einen PÜ bei endlicher Temperatur, bei dem die gebrochene globale Symmetrie mit steigender Temperatur wiederhergestellt wird [77]. Die Wechselwirkungen mit Eichfeldern bewirken bei großen β perturbativ nur geringfügige Änderungen [78,79]. Der typische führende Beitrag endlicher Temperatur zum effektiven Potential für ϕ ist von der Form $(c_1 \lambda_k + c_2 g^2) T^2 \phi^2$, ($c_1, c_2 > 0$). Dieser Term führt zu dem die Symmetrie wiederherstellenden Kirzhnits-Linde-Weinberg (KLW) Phasenübergang erster oder zweiter Ordnung bei endlicher Temperatur. Auf einem solchen Übergang fußt das Szenario des inflationären Universums [81].

Es gibt keinen physikalischen Grund, die perturbativ bei hoher Temperatur gefundene symmetrische Phase von dem Deconfinement-Gebiet des Modells zu unterscheiden. Bei Erhöhung der Temperatur kann das System vom Higgs-Gebiet in das Deconfinement-Gebiet übergehen. (In [58] wird gezeigt, daß auch Confinement- und Deconfinement-Gebiet nicht voneinander getrennt sind.) Es ist deshalb zu erwarten, daß der KLW-Übergang eine

Fortsetzung des Higgs-Übergangs von $T = 0$ in die T -Richtung ist, wobei sich der Übergang zu größeren κ -Werten hin verschiebt.

In den perturbativen Rechnungen ist es allerdings schwierig, Effekte höherer Ordnung unter Kontrolle zu halten [113]. Probleme bei der Benutzung des effektiven Potentials bei nicht sehr kleinen λ wurden schon in Kap. 2.1 im Zusammenhang mit dem Coleman-Weinberg-Mechanismus erwähnt. Die genaue Natur des KLW-Übergangs, einschließlich der Möglichkeit, daß er zu einem Crossover wird, kann daher von nichtperturbativen Eigenschaften des Modells abhängen. Ein Indiz für diese Vermutung kommt von einer Studie des U(1)-Higgs-Modells mit eingefrorenem radialem Mode und Villain-Wirkung im Hamilton-Formalismus auf dem Gitter [16]. Für mehrere Grenzfälle der Kopplungen wurde dort bei $T = 0$ kein PÜ gefunden. Ein mit wachsender Temperatur schwächer werdender Higgs-PÜ zeigt sich auch in Monte-Carlo-Untersuchungen einiger anderer Higgs-Modelle [23,114].

Die für Effekte endlicher Temperatur wichtige Größe ist das Verhältnis $T/M_{\text{phys}} = 1/(N_t \cdot M_{\text{phys}} \cdot a)$, wobei M_{phys} die kleinste (für das untersuchte physikalische System relevante) physikalische Masse bei $T = 0$ ist. Eine hohe Temperatur in physikalischen Einheiten kann im Gebiet des Higgs-Übergangs deshalb nur bei großen λ (hier $\lambda = 0.5$) und sehr nahe zum Übergang erreicht werden, denn nur dort ist die Higgs-Masse klein, wie das vorige Kapitel gezeigt hat. Wenn $M_{\text{phys}} \cdot a$ nicht klein genug ist (die Korrelationslänge also nicht groß genug), dann reicht auf *isotropen* Gittern selbst bei $N_t = 1$ der Wert von T/M_{phys} nicht aus, um beobachtbare Effekte endlicher Temperatur zu erzeugen. Bei kleinem λ ist der Higgs-PÜ von erster Ordnung; große Korrelationslängen treten nicht auf. Dort sind deswegen auf isotropen Gittern keine Effekte hoher Temperatur zu erwarten. Tatsächlich wurde auch bei kleinen λ und $\beta = 2 - 5$ in Monte-Carlo-Untersuchungen keine Änderung der Natur des Higgs-PÜs bei kleinem N_t beobachtet [56,57].

Vor der Erörterung der Monte-Carlo-Ergebnisse sei nun noch die physikalische Bedeutung der Temperatur auf einem Gitter und von RG-Linien bei endlicher Temperatur diskutiert [58]. Die RG-Linien im Raum der Kopplungen sind ursprünglich in einem Gebiet mit Skalenverhalten bei $T = 0$ als Linien konstanter Physik (konstantes m_H/m_W etc.) definiert (s. Kap. 4.3). Bei $T = 0$ beschreiben Punkte auf der gleichen RG-Linie das gleiche

physikalische System auf Gittern mit unterschiedlichem Gitterabstand a . Das System kann an jedem solchen Punkt durch Verkleinerung von N_t aufgeheizt werden, ohne die Kopplungsparameter oder den Gitterabstand a zu ändern. Jede RG-Linie bei $T = 0$ ist also Basis einer zweidimensionalen Fläche im Raum der Kopplungsparameter und der Temperatur T . Punkte auf derselben Fläche beschreiben dasselbe System bei verschiedenen T und verschiedenen a . *Linien konstanter Temperatur in dieser Fläche sind wieder RG-Linien, d.h. Linien konstanter Physik.* Die Koordinaten dieser RG-Linien endlicher Temperatur im Unterraum der Kopplungen sind von der Temperatur unabhängig und fallen mit der Position der $T = 0$ RG-Linie zusammen. Die Position von Linien konstanter Temperatur $T = 1/(N_t \cdot a)$ in der Fläche ist durch die Größe von a und N_t bestimmt. Die Abhängigkeit des Gitterabstandes a von den Kopplungsparametern kann durch die Größe einer physikalischen Massenskala bei $T = 0$ bestimmt werden, z.B. durch die Saitenspannung ($\kappa = 0$) oder durch die Higgsmasse.

Wären die RG-Linien bei $T = 0$ bekannt, so könnte bei endlichem und festem N_t der Wert der physikalischen Temperatur durch Abfahren dieser Linien kontinuierlich variiert werden. Bei endlichem festem N_t ist die Temperatur nicht konstant. Diese Linien sind dann nicht mehr Linien konstanter Physik. Sie können Phasenübergänge kreuzen, und der Wert anderer physikalischer Größen, wie z.B. Massenverhältnissen, kann sich entlang dieser Linien ändern. Über die genaue Position der RG-Linien ist aber leider zuwenig bekannt (vgl. Kap. 4.3).

Die Monte-Carlo-Ergebnisse bestätigen die oben beschriebenen Vermutungen bezüglich der Entwicklung des Higgs-PÜs. Abb. 5.1 zeigt die Kantenobservablen $\langle \Phi^\dagger U_s \Phi \rangle$, $\langle \Phi^\dagger U_t \Phi \rangle$ und $\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle_0$, die zum Studium des Higgs-Übergangs am geeignetsten sind, bei $\lambda = 0.5$ und $\beta = 4$.

Der $T = 0$ Higgs-PÜ bei $\kappa = 0.235 \pm 0.005$ verursacht einen plötzlichen Knick in $\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle_0$. Dagegen zeigen $\langle \Phi^\dagger U_s \Phi \rangle$ und $\langle \Phi^\dagger U_t \Phi \rangle$ auf den asymmetrischen Gittern eine viel sanftere Änderung. Die Daten auf $8^3 \cdot 2$ und $16^3 \cdot 2$ -Gittern sind miteinander kompatibel und anscheinend unabhängig von der Gittergröße. Aufgrund der im vorigen Abschnitt dargestellten Überlegungen folgt daraus, daß der Higgs-Übergang bei $N_t = 2$ zu einem Crossover geworden ist.

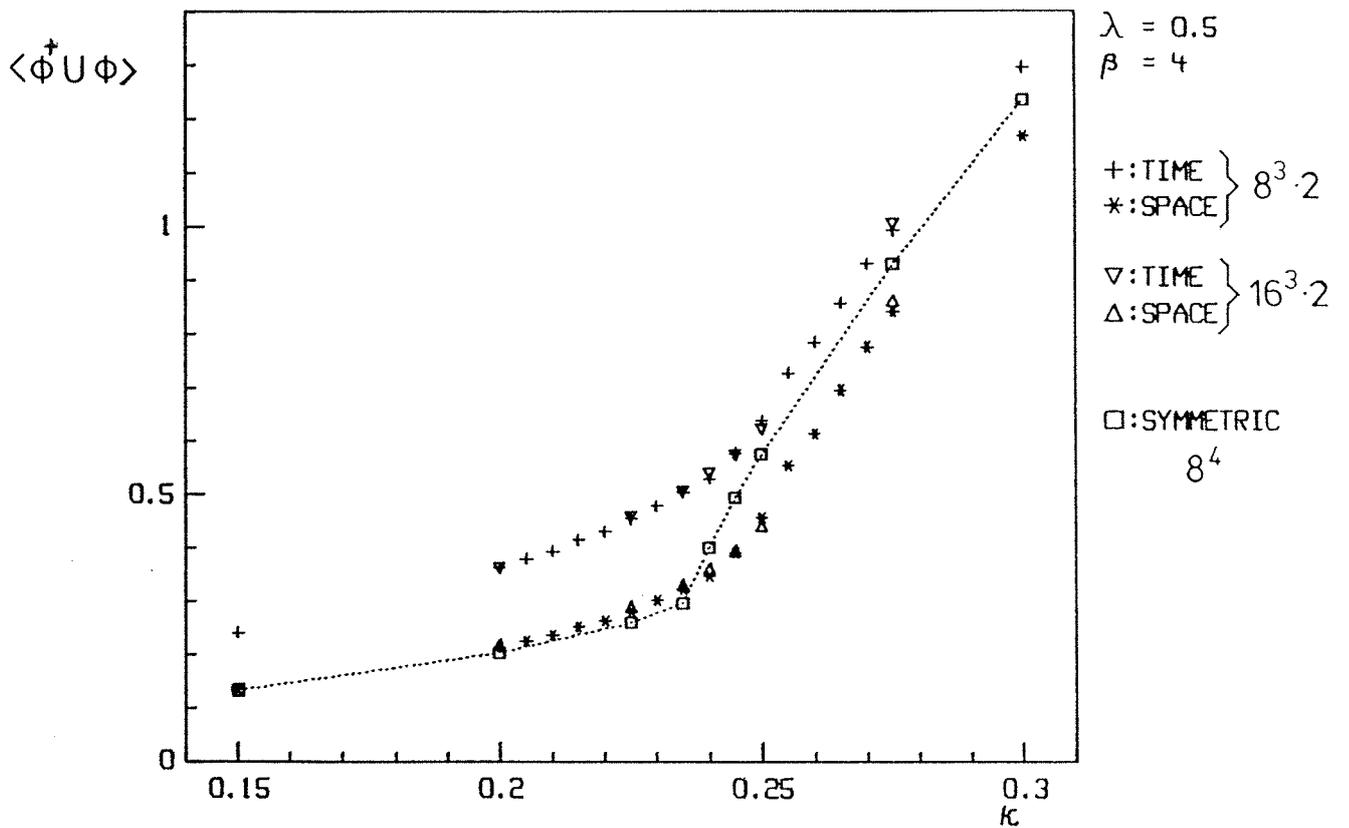


Abb. 5.1: Mittelwerte der Kantenvariablen $\langle \Phi^\dagger U_\mu \Phi \rangle$ in räumlicher und in zeitlicher Richtung auf $8^3 \cdot 2$ - und $16^3 \cdot 2$ -Gittern, nahe dem Higgs-PÜ/Crossover, bei $\beta = 4$, $\lambda = 0.5$. Zum Vergleich sind auch die $T = 0$ entsprechenden Größen $\langle \Phi^\dagger U_\mu \Phi \rangle_0$ auf einem symmetrischen 8^4 -Gitter wiedergegeben.

Eine andere wichtige Eigenschaft der Daten in Abb. 5.1 ist eine kleine Verschiebung der Position des Crossovers zu einem um etwa 0.01 größeren κ relativ zur Position des Übergangs bei $T = 0$, im Einklang mit den oben beschriebenen perturbativen Erwartungen. Diese Verschiebung ist nur dank der hier verfügbaren präzisen Daten sichtbar. Dies ist ein Grund dafür, warum sie, ebenso wie die Änderung des PÜs in ein Crossover, in früheren Untersuchungen des Modells nicht beobachtet worden ist [28,56,57]. Es kommt hinzu, daß dort nur kleine Werte von λ verwendet wurden. Die geringe Größe der Verschiebung ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, daß nur in einem sehr kleinen Bereich um den Higgs-Übergang herum die (Higgs-) Korrelationslänge groß ist und daher nur dort über großes T/M_{phys} Temperatureffekte bedeutsam sein können.

Die sehr kleine Verschiebung des Übergangs kann von großer physikalischer Bedeutung sein: Die RG-Linien bei $T = 0$ schmiegen sich wahrscheinlich an den $T = 0$ Higgs-Übergang an. Auf einer solchen Linie bewegt man sich bei Erhöhung der Temperatur durch Verringerung von a . Dabei kann der gegenüber $T = 0$ verschobene Übergang bei einer endlichen Temperatur gekreuzt werden. Dies entspricht dem KLW-Übergang, der hier aufgrund nichtperturbativer Effekte als Crossover auftritt. (Der mathematische Unterschied zwischen einem wirklichen Phasenübergang und einem Crossover könnte für die praktischen Anwendungen unwichtig sein, wenn das Crossover scharf genug wäre.)

Bei $\beta = 2.25$ wurde eine gleichartige Analyse durchgeführt. Weitere Rechnungen erfolgten bei $\beta = 2$ und $\beta = 5$ auf $8^3 \cdot 2$ und 8^4 -Gittern. Qualitativ findet sich überall die gleiche -nicht von der räumlichen Gitterausdehnung abhängige- Änderung von $\langle \Phi^\dagger U_\mu \Phi \rangle$ bei endlicher Temperatur. Für $N_t = 2$ und $\lambda = 0.5$ ist anscheinend die ganze Higgs-PÜ-Linie zu einem Crossover geworden. Die Position des Higgs-Crossovers bei diesen β -Werten (sowie die Position des Deconfinement Übergang/Crossovers [58]) ist in Abb. 5.2 eingetragen.

Resultate für die Energiedichten ε_H und ε sind in Ref. [58] enthalten. Dort werden auch verschiedene mögliche Schemata für die in Gl.(5.3) nötigen Subtraktionen diskutiert.

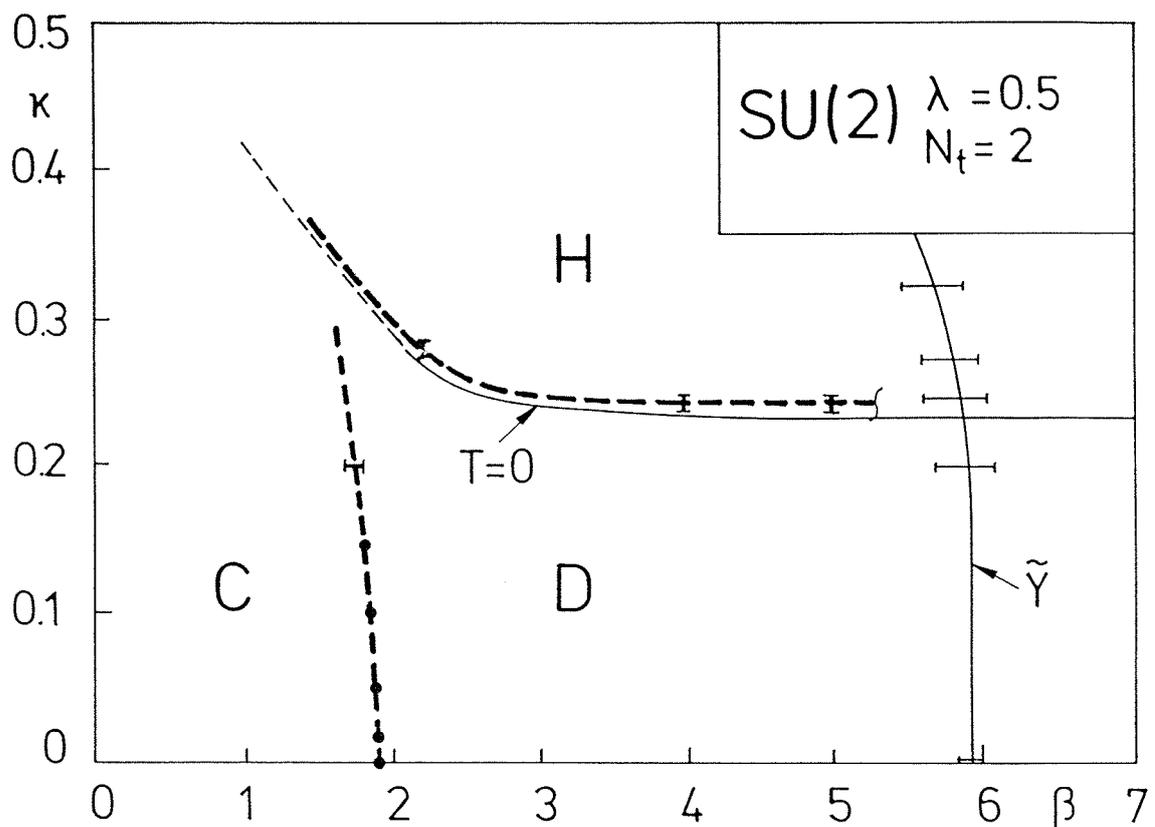


Abb. 5.2: Phasendiagramm des $SU(2)$ -Higgs-Modells bei endlicher Temperatur $T > 0$, für $\lambda = 0.5$ und $N_t = 2$. Die Symbole H, C und D stehen für die Higgs-, Confinement- bzw. Deconfinement-Gebiete. Die teilweise horizontale durchgezogene Linie ist der Higgs-PÜ bei $T = 0$. Die oberhalb davon eingetragenen Datenpunkte und die gestrichelte Linie zeigen (näherungsweise) die Position des Higgs-Crossovers bei $N_t = 2$. (Die senkrechte gestrichelte Linie steht für das in Ref. [58] behandelte Deconfinement-Crossover bei $N_t = 2$. Die durchgezogene senkrechte Linie ist der "Freezing"-Übergang der zur Approximation der $SU(2)$ benutzten Ikosaeder-Gruppe, auf einem $8^3 \cdot 2$ -Gitter.)

5.3 Schlußfolgerungen.

(1) Bei großem λ und hohen Temperaturen wird aus dem Higgs-PÜ ein "Crossover". Bei $\lambda = 0.5$ und $N_t = 2$ zeigen die Monte-Carlo-Rechnungen einen gegenüber $N_t = 8$ geglätteten Übergang. Weder bei $\beta = 2.25$ noch bei $\beta = 4$ treten Effekte endlicher Gittergröße auf.

(2) Daraus folgt, daß das System für positive β und λ im Raum der Parameter β, λ, κ und T nur eine einzige Phase hat. Obwohl nur Daten bei $\lambda = 0.5$ vorliegen, ist in Analogie mit dem Modell bei $T = 0$ zu erwarten, daß die in der $\lambda = 0.5$ - Hyperebene analytisch verbundenen Bereiche auch zu anderen λ -Werten hin analytisch verbunden sind. Ein schematisches Phasendiagramm bei festem großen λ zeigt Abb. 5.3 [58].

Statt der physikalischen Temperatur $T = 1/(N_t a)$ (mit nicht gut bekanntem Verhalten der Gitterkonstanten a) ist hier die für Monte-Carlo-Untersuchungen geeignetere Größe $1/N_t$ aufgetragen. Die Form der beiden Crossover- (oder PÜ-) Flächen lehnt sich an Abb. 5.2 an. Die $1/N_t = 0$ - Fläche enthält das $T = 0$ Phasendiagramm. Die Form des Deconfinement-PÜs in der $\kappa = 0$ Ebene fußt auf dem Skalenverhalten der reinen Eichtheorie bei $\beta > 2$. Die gestrichelten Linien in Abb. 5.3 deuten Gebiete an, in denen auf endlichem Gitter Crossover von wirklichen Phasenübergängen unterscheidbar sein können.

(3) Das aus dem Higgs-PÜ hervorgegangene Crossover ist gegenüber dem Übergang bei $T = 0$ leicht zu größeren κ hin verschoben. Daher können bei großen λ RG-Linien im Higgs-Gebiet sehr nahe am $T = 0$ Higgs-PÜ das Higgs-Crossover kreuzen. Dieses Crossover entspricht deshalb dem, durch nicht-perturbative Effekte geglätteten, Kirzhnits-Linde-Weinberg Phasenübergang [77,78].

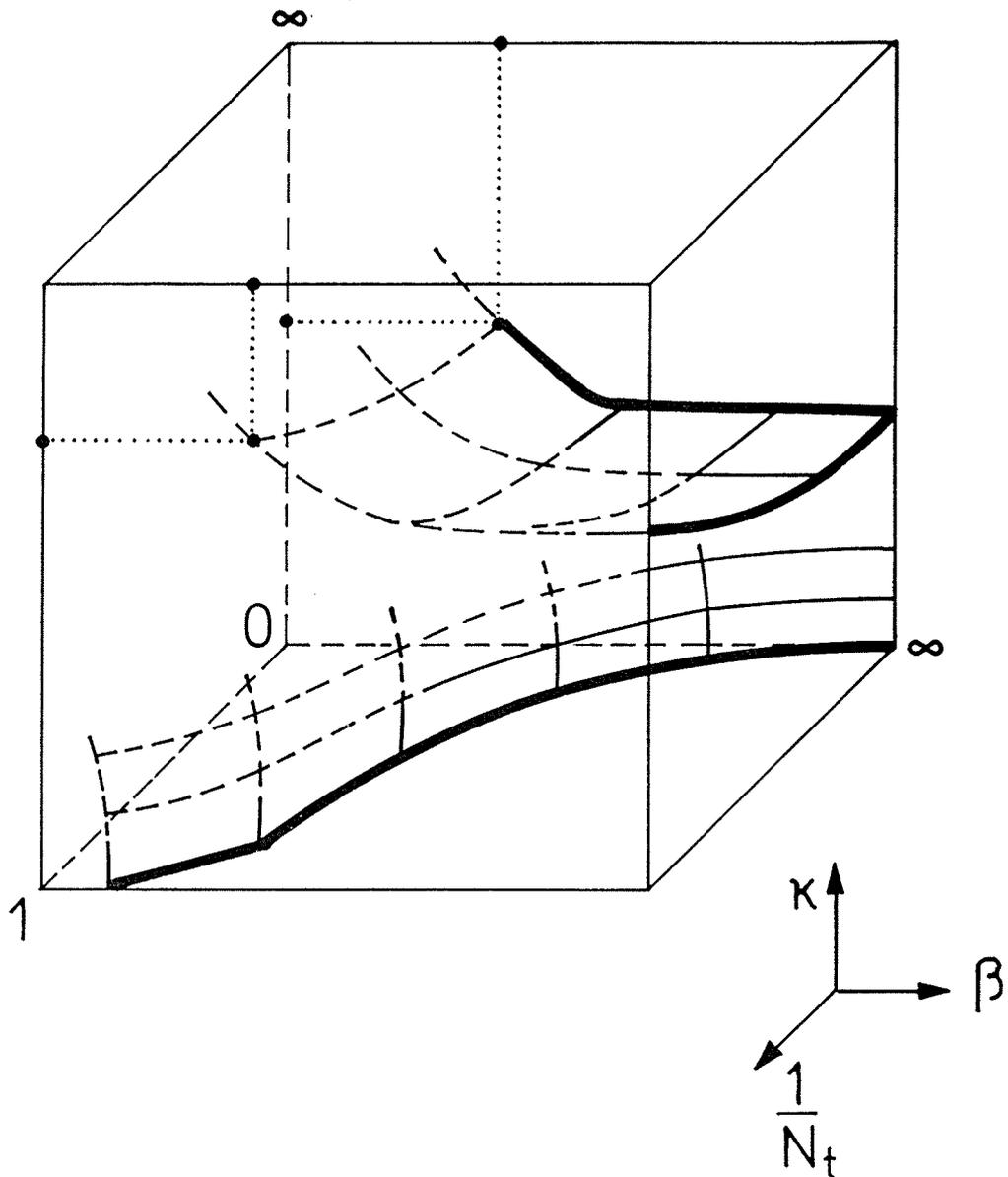


Abb. 5.3: Schematisches Phasendiagramm des SU(2)-Higgs-Modells für variable Temperatur (in Gittereinheiten) bei festem großen λ . Die dünnen durchgezogenen Linien repräsentieren entweder abrupte Crossover oder Phasenübergänge. Die dicken durchgezogenen Linien sind Phasenübergänge in den Grenzfällen des Modells.

Die Untersuchungen zeigen auch einige generelle Schwierigkeiten für das Studium von Higgs-Modellen bei endlicher Temperatur: Wie in Kap. 4.3 gezeigt wurde, steigen die Massen m_H und m_W oberhalb des Higgs-PÜs an. In Einheiten physikalischer Massen gemessen wird daher die Temperatur selbst bei $N_t = 1$ schnell sehr klein. Auf isotropen Gittern ist im Higgs-Gebiet die einzige Möglichkeit zum Erreichen hoher Temperaturen deshalb, nahe an den Higgs-PÜ heranzugehen, und zwar an solchen Stellen, wo der Übergang bei $T = 0$ Anzeichen für kritisches Verhalten zeigt. Man benötigt hierzu großes λ und eine Feinabstimmung von κ . Weit oberhalb des Higgs-PÜs kann eine hohe physikalische Temperatur nur auf nichtisotropen Gittern erreicht werden, die in der zeitlichen Richtung eine kleinere Gitterkonstante besitzen. Auch hier ist von Nachteil, wie schon für Überlegungen zum Kontinuumslikes des $T = 0$ - Modells, daß über die RG-Linien und die Gebiete mit Skalenverhalten im 3-dimensionalen Raum der Kopplungsparameter noch sehr wenig bekannt ist. Die in diesem Kapitel dargestellten qualitativen Resultate hängen nicht vom Skalenverhalten des Modells ab. Um aber quantitative Resultate zur Anwendung in der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung aus den Gitteruntersuchungen bei endlicher Temperatur gewinnen zu können, ist ein noch besseres Verständnis des Gitter-Higgs-Modells bei Temperatur Null vonnöten.

6. Schlußbemerkungen

Zum Schluß möchte ich kurz die wesentlichen Ergebnisse rekapitulieren. Ausführlichere Zusammenfassungen findet man in den Kapiteln 2.6, 3.7 und 5.3 sowie am Ende der Abschnitte 4.2 und 4.3.

Durch die in dieser Arbeit vorgestellten Rechnungen zum U(1)-Higgs- und zum SU(2)-Higgs-Modell gelang es vor allem, das Auftreten des Higgs-Mechanismus (speziell im U(1)-Higgs-Modell) auch im nichtperturbativen Bereich zu bestätigen und mit Hilfe der eichinvarianten Zweipunktfunktionen ein Bild über seine Wirkungsweise zu entwerfen. Die Zweipunktfunktionen gestatteten es, die auftretenden Phasen zu charakterisieren. Aus ihnen und den Wegner-Wilson-Schleifen lassen sich (nichtlokale) Confinement-Kriterien konstruieren, die auch im Falle der Anwesenheit dynamischer Ladungen erfolgreich anwendbar sind. Sie ersetzen damit das auf reine Eichtheorien beschränkte Confinement-Kriterium der Wegner-Wilson-Schleifen, für die in Kap. 3.3 bei Anwesenheit dynamischer Materiefelder Umfungsverhalten bewiesen wurde.

Die Gültigkeit der Confinement-Kriterien konnte, über analytisch Bekanntes deutlich hinausgehend, auch in der Nähe des U(1)-Higgs-Phasenübergangs und im Higgs-Gebiet des SU(2)-Higgs-Modells gezeigt werden. Heuristische Interpretationen der Zweipunktfunktionen mittels dynamischer und äußerer Ladungen erlauben anschauliche Bilder der Zustände in den Phasengebieten. In der Coulomb-Phase des U(1)-Higgs-Modells wurde mit Hilfe der Confinement-Kriterien die Existenz freier Ladungen nachgewiesen. Die Interpretation der Zweipunktfunktionen benutzt dort Wasserstoffatom-ähnliche Zustände. In den Spektren erscheinen gebundene Bosonium-Zustände. Im Confinement-Gebiet des SU(2)-Higgs-Modells gibt es schwere dynamische Ladungen, die zusammen mit äußeren Quellen zu Meson-ähnlichen Zuständen hadronisieren können. In den Higgs-Gebieten liegt ein Plasma-ähnliches Kondensat dynamischer Ladungen vor.

Der Higgs-Mechanismus, als Vorgang der Erzeugung von (effektiven) Vektorboson-Massen, agiert über Debye-Hückel-Abschirmung in diesem Kondensat. Im Higgs-Gebiet des U(1)-Higgs-Modells steigt die Photonmasse

-mit zunehmender Dichte des Kondensats- langsam von Null aus an. In der Coulomb-Phase ist sie überall Null. Dort wurde auch ein zweiter massiver, aus geladenen Teilchen gebildeter Vektorzustand beobachtet. Im Higgs-Gebiet war kein zweiter Vektorzustand erkennbar.

Der Higgs-Phasenübergang ist im U(1)-Higgs-Modell am klarsten in der Abschirmenergie μ zu sehen, die den Zerfall der Zweipunktfunktionen bestimmt, und die am Übergang einen deutlichen Sprung zeigt. Der Phasenübergang ist in beiden untersuchten Modellen auch durch ein Minimum der sehr klein werdenden Higgs-Masse und durch ein sehr schnelles Abfallen (oder einen Sprung) der Vektorboson-Masse gekennzeichnet. Der Sprung in μ im U(1)-Higgs-Modell und ein erst auf Gittern der Größe 16^4 sichtbar gewordener Sprung in $\langle \Phi^\dagger U \Phi \rangle$ im SU(2)-Higgs-Modell zeigen, daß der Higgs-Phasenübergang wahrscheinlich an allen untersuchten Stellen von 1. Ordnung ist. An diesen Stellen scheint ein Kontinuumslimit nicht möglich zu sein.

Im SU(2)-Higgs-Modell existiert auch bei Berücksichtigung endlicher Temperaturen nur eine einzige Phase. Aus dem Higgs-Phasenübergang wird bei hoher Temperatur ein Crossover, das mit dem Kirzhnits-Linde-Weinberg-Übergang identifiziert werden konnte. Hohe physikalische Temperaturen werden auf isotropen Gittern nur bei Vorliegen großer Korrelationslängen erreicht.

Über die Analyse der Massen (in physikalisch nicht à priori festliegenden Gittereinheiten) hinaus lieferten die Berechnungen im SU(2)-Higgs-Modell auch Anhaltspunkte zur Renormierungsgruppenstruktur des Modells. Das nicht unmittelbar von der Gitterkonstanten abhängende Verhältnis m_H/m_W hat am Higgs-Phasenübergang ein Minimum. Die Masse m_W fällt am Übergang auf einen endlichen Wert ab und steigt dann im Higgs-Gebiet sehr langsam mit κ an. Dort entspricht ihr Wert dem quasiklassischen Resultat. Der Wert von m_W am Übergang wird mit wachsendem β langsam kleiner. Auch die Endlichkeit von m_W verbietet die Durchführung eines Kontinuumslimites an den untersuchten Stellen. Die "Skalen"-Entwicklung der Massen mit wachsendem β ist kaum sichtbar; sie ist wesentlich langsamer als in der reinen SU(2)-Eichtheorie. Auch die Abhängigkeit der Massen von λ ist nur sehr schwach.

Über den Kontinuumslikes der Higgs-Modelle ist noch sehr wenig bekannt (vgl. Kap. 4.3). Ein mögliches Szenario beinhaltet effektive Theorien, die von dem dann endlich bleibenden Abschneideparameter abhängen. Um aber gesicherte Aussagen zum Kontinuumslikes und zu seiner möglichen Trivialität zu erhalten, und dementsprechend auch für quantitative Angaben zum Kontinuumswert der Higgs-Masse und zum Übergang bei endlicher Temperatur, werden in der Zukunft noch umfangreiche Rechnungen zur Renormierungsgruppenstruktur der Higgs-Modelle durchzuführen sein, auch für das Modell mit der vollen Eichgruppe $SU(2) \otimes U(1)$.

Anhang : Quantenzahlen von Gitteroperatoren.

In diesem Anhang führe ich die in Kapitel 4.1 kursorisch erläuterten Schritte zur Bestimmung der Transformationseigenschaften von Gitteroperatoren und zur Konstruktion von Gitteroperatoren mit festen Quantenzahlen $(I)R^{PC}$ im Detail aus. Das Ergebnis der hier entwickelten Rechnungen ist die Tabelle 4.1 in Kapitel 4.1. Zunächst behandle ich die Quantenzahlen P , C und I , anschließend dann die Rotationsquantenzahlen.

Quantenzahlen P, C, I .

Die diskreten Transformationen Parität P und Ladungskonjugation C , sowie der Isospin I können ohne Abstriche auf den Gitterformalismus übertragen werden. Zuerst bestimme ich im Kontinuum (mit Minkowski-Metrik $(+---)$) diejenigen Transformationen der Feldvariablen, die P und C entsprechen, übertrage sie dann auf die Gittervariablen und wende sie auf einige Gitteroperatoren an.

Parität P . Die Lagrangedichte eines gekoppelten Systems hat die Form

$$L_k = L - j_\mu A_{\text{extern}}^\mu(\vec{x}, t) \quad . \quad (\text{A.1})$$

Unter Raumspiegelung transformiert sich das äußere Feld gemäß [115]

$$A_{\text{extern}}^\mu(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} A_{\mu, \text{extern}}(-\vec{x}, t) \quad . \quad (\text{A.2})$$

(Mit dieser Schreibweise ist hier und im folgenden eine (aktive) Transformation wie $A^\mu(\vec{x}) \longrightarrow A^\mu(\vec{x}') = A_\mu(\vec{x}')$ gemeint.) Um Invarianz von L_k zu erreichen, muß man also fordern

$$L(\vec{x}, t) \longrightarrow L(-\vec{x}, t) \quad , \quad j_\mu(\vec{x}, t) \longrightarrow j^\mu(-\vec{x}, t) \quad , \quad (\text{A.3})$$

(d.h. $j_0 \rightarrow +j_0$, $j_k \rightarrow -j_k$, $k=1,2,3$; auch nach Wick-Rotation).

Aus dem $U(1)$ -Teil der Lagrangedichte $L_{\text{Eich}} + L_{\text{Higgs}}$, Gl.(2.2),(2.4), folgt für das $U(1)$ -Higgs-Modell der erhaltene Noether-Strom

$$j^\mu = -i\Phi^*(D^\mu\Phi) + i(D^\mu\Phi)^*\Phi \quad . \quad (\text{A.4})$$

Der entsprechende Noether-Strom des $SU(2)$ -Teils von $L_{\text{Eich}} + L_{\text{Higgs}}$ ist

$$j_a^\mu = i\varphi^\dagger \frac{T_a}{2} (D^\mu\varphi) - i(D^\mu\varphi)^\dagger \frac{T_a}{2} \varphi \quad . \quad (\text{A.5})$$

Die Invarianzforderung Gl.(A.3) wird nun in beiden Fällen durch

$$P : \begin{cases} \Phi(\vec{x}, t) \longrightarrow \Phi(-\vec{x}, t) \\ A_0(\vec{x}, t) \longrightarrow A_0(-\vec{x}, t) \\ A_k(\vec{x}, t) \longrightarrow -A_k(-\vec{x}, t) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

erfüllt. (Wegen $\frac{\partial}{\partial x^\mu} f(-\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(\vec{x})$ geht D_μ in D^μ über; daraus folgt die Invarianz von L , sowie $j_\mu \rightarrow j^\mu$.)

Auf dem Gitter folgt hieraus wegen $U_{x\mu} = e^{igqaA_\mu(x)}$, Gl.(2.46) :

$$P : \begin{cases} \Phi_{\vec{x}, t} \longrightarrow \Phi_{-\vec{x}, t} \\ U_{\vec{x}, t, 0} \longrightarrow U_{-\vec{x}, t, 0} \\ U_{\vec{x}, t, k} \longrightarrow U_{-\vec{x}-k, t, k} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Damit ist auch die Wirkung von P auf Gitteroperatoren klar. Die räumlich gemittelten Kantenoperatoren L_μ und Plaquettenoperatoren $P_{\mu\nu}$ wurden in Gl.(4.1,4.2) definiert. Wie man leicht sieht, werden L_k (Kantenoperatoren in räumlicher Richtung) und P_{kt} (Raum-Zeit-Plaquette) unter Paritätstransformationen hermitesch konjugiert, P_{k1} (Raum-Raum-Plaquette, $k, 1 = 1, 2, 3$) dagegen ist invariant.

Die Operatoren $\text{Re tr } L_k$, $\text{Re tr } P_{kt}$, $\text{Re tr } P_{k1}$ und $\text{Im tr } P_{k1}$, sowie $\sum_{\vec{x}} \rho_x$ und $\sum_{\vec{x}} \rho_x^2$ haben daher Paritätsquantenzahl $P = +1$. Nur die Imaginärteile von räumlichen Größen wie z.B. die (im $SU(2)$ -Fall verschwindenden) Operatoren $\text{Im } L_k$ und $\text{Im } P_{kt}$ haben $P = -1$.

Ladungskonjugation C. Im Falle von $U(1)$ -Symmetrie muß bei Ladungskonjugation der Strom sein Vorzeichen ändern [115]:

$$C : \quad j_\mu \longrightarrow -j_\mu \quad , \quad A_\mu \longrightarrow -A_\mu \quad , \quad L \longrightarrow L \quad . \quad (\text{A.8})$$

Dies kann erreicht werden durch Transformation der Felder gemäß

$$C : \quad \Phi(x) \longrightarrow \Phi^*(x) \quad , \quad A_\mu(x) \longrightarrow -A_\mu(x) \quad . \quad (\text{A.9})$$

(Hier wurde eine freie Phase zu 1 gesetzt.) Auf dem Gitter folgt aus Gl.(A.9):

$$C : \quad \Phi(x) \longrightarrow \Phi^*(x) \quad , \quad U_{x\mu} \longrightarrow U_{x\mu}^* \quad . \quad (\text{A.10})$$

Für das SU(2)-Higgs-Modell wurden schon in Tab. 2.1 (Kap. 2.2) die Felder $W^{\pm,0}$ eingeführt. Bei Ladungskonjugation muß man (bis auf eine Phase) fordern

$$C : W^{\pm} \longrightarrow W^{\mp} \quad , \quad W^0 \longrightarrow W^0 \quad , \quad L \longrightarrow L \quad . \quad (A.11)$$

Dies wird erreicht durch

$$C : \Phi(x) \longrightarrow \Phi^*(x) \quad , \quad A_{\mu}(x) \longrightarrow \tau_2 A_{\mu}(x) \tau_2 = A_{\mu}^*(x) \quad , \quad (A.12)$$

denn damit geht in Tabelle 2.1 der Term $\tau_2 D_{\mu}(x)$ in $D_{\mu}(x) \tau_2$ über und aus $\tau_2 D_{\mu} \tau_2 = D_{\mu}^{\dagger}$ folgt die Invarianz von W^0 und L . Die entsprechende Gittertransformation lautet

$$C : \Phi_x \longrightarrow \Phi_x^* \quad , \quad U_{x\mu} \longrightarrow \tau_2 U_{x\mu} \tau_2 = U_{x\mu}^* \quad . \quad (A.13)$$

Ladungskonjugation entspricht also generell der komplexen Konjugation der Felder auf dem Gitter.

Isospin I. Der Isospin betrifft die globale Symmetrie der SU(2)-Higgs-Lagrangedichte Gl.(2.40) unter der Transformation Gl.(2.38,2.45) :

$$\Phi_x \longrightarrow \Phi_x V \quad , \quad U_{x\mu} \longrightarrow U_{x\mu} \quad , \quad V \in \text{SU}(2) \quad .$$

Die in der Wirkung vorkommenden Terme $\text{tr} U_p$, $\text{tr} \Phi_x^{\dagger} \Phi_x$ und $\text{tr}(\Phi_x^{\dagger} U_{x\mu} \Phi_{x+\mu})$ sind hierunter natürlich invariant. Wie ein Isovektor ($I = 1$) dagegen transformieren sich $W^{\pm,0}$ aus Tabelle 2.1, wegen

$$I : \text{tr}(\Phi_x^{\dagger} U_{x\mu} \Phi_{x+\mu} \tau_k) \longrightarrow \text{tr}(\Phi_x^{\dagger} U_{x\mu} \Phi_{x+\mu} V \tau_k V^{\dagger}) \quad . \quad (A.14)$$

Rotationsquantenzahlen.

Die kontinuierliche Rotationssymmetrie des Kontinuums reduziert sich auf dem Gitter zu einer diskreten kubischen Symmetrie. Wiederherstellung der vollen Drehsymmetrie kann erst im Kontinuumslimit geschehen.

Im folgenden werden die zur Gitterdrehgruppe O gehörenden irreduziblen Darstellungen (ID) vorgestellt. Den 5 IDs von O entsprechen unendlich viele Spins $J = 0,1,2,\dots$ im Kontinuum. Glücklicherweise trägt jede dieser IDs nur zu (höchstens) einem der Spins 0, 1 oder 2 bei; dadurch kann eine praktisch nutzbare Beziehung zwischen diesen niedrigen Spins und Gitteroperatoren in fester ID aufgestellt werden. Nach Beschreibung dieser Beziehung behandle

ich die Bestimmung der irreduziblen Anteile eines gegebenen Gitteroperators und seine Projektion auf *eine* ID, und gebe einen Algorithmus dafür nötiger Schritte an. Ein Beispiel hierzu wird am Ende dieses Anhangs durchgerechnet.

Für die gruppentheoretische Behandlung habe ich in diesem Anhang die Arbeiten [116] und [117] verwendet; für die Anwendung auf Gittereichtheorien waren die Arbeiten [107,118,49] und vor allem [117] hilfreich.

Oktaeder-Gruppe O_h . Die "Dreh"gruppe auf dem Gitter ist die Oktaeder-Gruppe O mit 24 Elementen. Durch Hinzufügen von Spiegelungen erhält man

$$O_h = O \otimes \{I, -I\} \quad (A.15)$$

mit 48 Elementen. O ist isomorph zur Permutationsgruppe von 4 Objekten S_4 ($\hat{=}$ Raumdiagonalen des Würfels) und zur vollen Tetraeder-Gruppe. "Punktgruppen" wie O sind in der Kristallographie ausführlich untersucht worden. Die folgenden Rechnungen entsprechen denjenigen zur Multipllett-Aufspaltung in Kristallen. O enthält 5 Konjugationsklassen.

$$\text{Def.: } T, U \in G \text{ heißen "konjugiert" } \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{es ex. ein } R \in G, \\ \text{so daß } RTR^{-1} = U. \end{array} \quad (A.16)$$

Die Konjugationsklassen C von O sind (Koordinatenmittelpunkt in Würfelmitte):

$$\begin{array}{ll} 1I & : \text{ Identität} \\ 3C_2 & : \text{ Rotation um Koordinatenachsen, Winkel } \theta = \pi, \\ 8C_3 & : \text{ Rotation um Raumdiagonalen, } \theta = 2\pi/3, \\ 6C_4 & : \text{ Rotation um Koordinatenachsen, } \theta = \pi/2, \\ 6C_2' & : \text{ Rotat. um Achsen parallel zu Flächendiag., } \theta = \pi. \end{array} \quad (A.17)$$

Notation: $n_c C_m$: n_c Elemente g in C , mit $g^m = 1$.

Dabei ist n_c die "Multiplizität" von C . Die übrigen 24 Elemente von O_h erhält man durch zusätzliche Spiegelung. (Anmerkung: Halbzahligen Spin (Gruppe 2O , siehe [118]) bekommt man durch Hinzufügen einer negativen Identität J für Rotationen um $\pm 2\pi$. Es resultieren 3 neue Konjugationsklassen, die Strahldarstellungen für halbzahligen Spin).

Für die spätere Behandlung von Gitteroperatoren ist es nötig, die Wirkung je eines Elementes der 5 Konjugationsklassen von O auf einen Vektor (xyz) zu kennen. Diese Information ist in Tabelle A.1 enthalten.

$\underline{1I}$:	x	y	z	$\underline{6C_4}$:	x	z	-y
$\underline{3C_2}$:	x	-y	-z			x	-z	y
		-x	y	-z			-z	y	x
		-x	-y	z			z	y	-x
$\underline{8C_3}$:	y	z	x			y	-x	z
		z	x	y			-y	x	z
		-y	-z	x	$\underline{6C_2'}$:	-x	z	y
		z	-x	-y			-x	-z	y
		-z	x	-y			z	-y	x
		y	-z	-x			-z	-y	-x
		-z	-x	y			y	x	-z
		-y	z	-x			-y	-x	-z

Tabelle A.1: Wirkung der 24 Elemente von O auf einen Vektor (xyz) .

Konstruktion irreduzibler Darstellungen. Die Gruppe O_h ist endlich. Daher gibt es unitäre Darstellungen und O_h ist vollreduzibel. Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen (ID) ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen; O hat also 5 und O_h 10 IDs. Aus dem Satz von Burnside

$$\sum_{\text{ID}} (l_i)^2 = \text{Anzahl der Gruppenelemente} \quad , \quad (\text{A.18})$$

$$(l_i = \text{Dimension der ID } i) \quad ,$$

folgt für O : $l_i = 1, 1, 2, 3, 3$.
Die entsprechenden IDs heißen : $R = A_1, A_2, E, T_1, T_2$. (A.19)

(A_1 ist die triviale Darstellung, T_1 die Vektordarstellung; s.u.). Die vollständigen Quantenzahlen eines Gitteroperators sind also $(I)R^{PC}$, analog zu $(I)J^{PC}$ im Kontinuum.

$n_C C \backslash R$	A_1	A_2	E	T_1	T_2
1 I	1	1	2	3	3
3 C_2	1	1	2	-1	-1
8 C_3	1	1	-1	0	0
6 C_4	1	-1	0	1	-1
6 C_2'	1	-1	0	-1	1

Tabelle A.2a: Charaktere χ_C^R der Konjugationsklasse C in der irreduz. Dst. R .

Eine Beziehung zwischen den Konjugationsklassen C und den IDs R wird durch Tabelle A.2 hergestellt, welche die Charaktere $\chi^R(g) = \text{tr } D^R(g)$ enthält,

wobei D^R die Darstellungsmatrix von g in der ID R ist. (Diese Tabelle muß recht mühsam über Orthogonalitätsrelationen der Charaktere hergeleitet werden [116].)

Mit Hilfe von Gl.(A.15) kann diese Tabelle auf die Gruppe O_h erweitert werden. Die Darstellungsmatrix $D^{R\pm}$ ist einfach das Produkt aus D^R und der Darstellung $\pm I$ von P :

$$D^{R\pm} (g \otimes -I) = \pm D^{R\pm} (g \otimes I) \quad . \quad (A.20)$$

Die entsprechende Erweiterung von Tabelle A.2a ist daher:

	$P = +I$	$P = -I$
$C' = C \otimes I$	χ_C^R	χ_C^R
$C' = C \otimes -I$	χ_C^R	$-\chi_C^R$

Tabelle A.2b: Charaktere $\chi_C^{R^P}$ der Konjugationsklassen C' von O_h in der irreduz. Darstellung R^P .

Zusammenhang zwischen Spin und Gitter-ID. Den 5 IDs auf dem Gitter entsprechen unendlich viele Spins $J = 0,1,2,\dots$ im Kontinuum. Die Beziehung kann daher nicht eindeutig sein; jede Gitter-ID trägt zu unendlich vielen Spins im Kontinuum bei. Den Zusammenhang zwischen R und J gibt die Multiplizität m_θ^R der ID R in der Darstellung D_θ^J zu Spin J :

$$m_\theta^R = \frac{1}{d} \sum_{C \in O_h} n_C \chi_C^R \chi_C^J \quad , \quad d = \dim O_h = 48 \quad . \quad (A.21)$$

Hier ist χ_C^J die Spur der "subduzierten Darstellung" D_θ^J , die man durch Einbetten von O_h in $SU(2)$ erhält (d.h. D_θ^J enthält genau solche Drehungen, die auch in O_h enthalten sind). Daher kann man die (Kontinuums-)Relation

$$\chi_\theta^J = \frac{\sin(J+1/2)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (A.22)$$

verwenden. Der Drehwinkel θ ist innerhalb jeder Klasse C konstant und ist in Gl.(A.17) angegeben. Die Resultate für m_θ^R sind in Tab. A.3 aufgeführt [107]:

R \ J	0	1	2	3	4	5	...
A ₁	1	0	0	0	1	0	...
A ₂	0	0	0	1	0	0	...
E	0	0	1	0	1	1	...
T ₁	0	1	0	1	1	2	...
T ₂	0	0	1	1	1	1	...

Tabelle A.3: Multiplizitäten m_J der irreduz. Gitterdarstellung R in der subduzierten Darstellung D_J^O zu Spin J, Gl.(A.21).

A₁ trägt also z.B. nach Spin 0 als nächstes zu Spin 4 bei, T₁ nach Spin 1 als nächstes zu Spin 3. Deshalb gibt es in Korrelationsfunktionen von Operatoren, die sich etwa nach A₁ transformieren, Beiträge von (etwaigen) Kontinuumsteilchen mit Spin 0, Spin 4, etc. Um also Teilchen niedrigen Spins aus Korrelationsfunktionen extrahieren zu können, sollten solche höheren Spins auch wesentlich höhere Massen besitzen, wie es auch der experimentellen Erfahrung entspricht (Regge-Trajektorien).

Explizite Darstellung von O_h auf dem Gitter. Gegeben sei ein Gitteroperator ψ , als Funktion der Gitterrichtungen $\mu = 1,2,3$. In Anlehnung an Tabelle A.1 schreibe ich diese *Richtungen* als (xyz). Die Darstellung M von O_h wird nun über die (passive) Transformation

$$M(g) \psi((xyz)) := \psi(g(xyz)) , \quad g \in O_h \quad (A.23)$$

definiert, wobei g auf die Richtungen (xyz) gemäß der in Tabelle A.1 angegebenen Vektordarstellung von O_h wirkt.

Zur Zerlegung nach ID von O_h braucht M als Matrix nicht bekannt zu sein, sondern nur die mit Hilfe von Tabelle A.1 bestimmte Spur χ_C^M je eines Elementes der 10 Konjugationsklassen C' von O_h. Die Multiplizität der ID R^P von O_h in M ist dann, analog zu Gl.(A.21), durch

$$m_M^{R^P} = \frac{1}{d} \sum_{C \in O_h} n_C \chi_C^{R^P} \chi_C^M , \quad d = \dim O_h = 48 . \quad (A.24)$$

gegeben und kann mit Hilfe von Tabelle A.2a und A.2b berechnet werden.

Projektion auf eine ID. Ein Gitteroperator ψ wird im allgemeinen Anteile mehrerer IDs besitzen. Es muß also noch auf die einzelnen IDs projiziert werden, durch Kombination von Operatoren ψ . Eine Möglichkeit hierzu ist die Verwendung des Projektionsoperators

$$\Pi^{R^P} \approx \sum_{g \in O_h} \chi^{R^P}(g) M(g) \quad , \quad (\text{A.25})$$

d.h. es sind alle Darstellungsmatrizen zu summieren. Basisvektoren zu R^P sind dann durch

$$\Pi^{R^P} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (\psi_i: \text{Operatoren } \psi \text{ in allen möglichen Richtungen})$$

gegeben. (Ein Beispiel hierzu führe ich am Ende dieses Anhangs aus.) Andere Projektionsoperatoren findet man in [118]. Ein für komplizierte Operatoren ψ günstigeres Verfahren ist in [107] dargestellt.

Algorithmus. Zur Konstruktion eines Gitteroperators mit Quantenzahlen $(J)R^{PC}$ sind folgende Schritte nötig:

- Wahl eines Gitteroperators ψ (mit guten CP-Quantenzahlen) gemäß Gl.(A.7),(A.10),(A.13),
- Bestimmung der Charaktere χ_g^M für die Anwendung von O_h auf ψ , mittels Gl.(A.23) und Tabelle A.1,
- Bestimmung der irreduziblen Anteile in ψ , mittels Gl.(A.24) und Tabelle A.2,
- Projektion auf *einen* irreduziblen Anteil, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, und
- Ablesen der erfaßten Spins in Tabelle A.3.

Durch Ausführen dieses Algorithmus für alle auf (einzelnen) Gitterpunkten, Kanten und Plaketten definierten Gitteroperatoren erhält man schließlich die in Kap. 4.1 angegebene Tabelle 4.1 der Zuordnung von Quantenzahlen und Gitteroperatoren.

Beispielrechnung. Den angegebenen Algorithmus führe ich nun am Beispiel des Kantenoperators L_k in räumlicher Richtung (Gl.(4.1)) aus. Wegen Gl.(4.7)

und (4.12) hat $\text{Re } L_k$ die Quantenzahlen $PC = ++$ und $\text{Im } L_k$ hat $PC = --$.

Re L_k : $PC = ++$: Die Elemente von O_h wirken auf den Operator $\psi = \text{Re } L_k$ wie auf einen Vektor in k -Richtung, aber mit den Beträgen der Matrixelemente, wegen $\text{Re } L_{-k} = \text{Re } L_k$. Die Charaktere χ_c^M können jetzt für jeweils 1 Element jeder Konjugationsklasse aus Tabelle A.1 (nach Betragsbildung) entnommen werden, z.B.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2} \begin{pmatrix} X \\ +Y \\ +Z \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{C_2}^M = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad . \quad (\text{A.26})$$

Es ergibt sich

C	I	C_2	C_3	C_4	C_2'	(A.27)
χ_c^M	3	3	0	1	1	

Einsetzen in Gl.(A.24) ergibt dann unter Verwendung von Tabelle A.2 und n_c aus Gl.(A.17) die Multiplizitäten

<u>PC = ++ :</u>	R	A_1	A_2	E	T_1	T_2	(A.28)
	m_M^{R+}	1	0	1	0	0	

(Die gleiche Rechnung mit $P = -1$ in Tabelle A.2 hätte nur Nullen ergeben.)

Der Operator $\text{Re } L_k$ ist also nicht irreduzibel; er transformiert sich nach einer Kombination der irreduz. Darstellungen "A₁" (mit Spinbeiträgen 0,4,...; s. Tabelle A.3) und der Darstellung "E" (Spin-Beiträge 2,4,...). *Der im Spin niedrigste Kontinuumszustand, zu dem $\text{Re } L_k$ beiträgt, hat also die Quantenzahlen $J^{PC} = 0^{++}$.*

Vor der Projektion von $\text{Re } L_k$ auf die irreduziblen Darstellungen A₁ und E sei zunächst noch der $PC = --$ Operator $\psi = \text{Im } L_k$ auf die gleiche Weise untersucht:

Im L_k : $PC = --$: $\text{Im } L_k$ transformiert sich unter O_h genau wie ein Vektor in k -Richtung; wegen $P = -1$ inklusive Vorzeichenwechsel bei Spiegelungen. Die Charaktere χ_c^M erhält man wieder aus Tabelle A.1, z.B.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2} \begin{pmatrix} X \\ -Y \\ -Z \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{C_2}^M = -1 \quad , \quad (\text{A.29})$$

zu

$$\begin{array}{c|ccccc} C & I & C_2 & C_3 & C_4 & C_2' \\ \hline \chi_c^M & 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \quad (\text{A.30})$$

und wie oben bekommt man die Multiplizitäten

$$\underline{PC} = \text{---} : \quad \begin{array}{c|ccccc} R & A_1 & A_2 & E & T_1 & T_2 \\ \hline m_M^R & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad . \quad (\text{A.31})$$

Im L_k transformiert sich also *irreduzibel* nach der Darstellung T_1 (mit Spinbeiträgen 1,3,4...). Der im Spin niedrigste Kontinuumszustand, zu dem L_k beiträgt, hat deshalb die Quantenzahlen $J^{PC} = 1^{--}$.

Projektion auf die irreduziblen Anteile. Nun fehlt noch die Projektion von $\text{Re } L_k$ auf A_1 und E . Dazu werden die Projektionsoperatoren Gl.(A.25) berechnet. Die dazu benötigte vollständige Darstellungsmatrix M bekommt man, indem Tabelle A.1 in Matrixform geschrieben wird, z.B.

$$M(C_3, 1.\text{Element}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{A.32})$$

Unter Benutzung von Tabelle (A.2) ergibt Gl.(A.25) schließlich die Projektionsoperatoren

$$\mathbb{P}^{A_1^+} = 8 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{P}^{E^+} = 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{A.33})$$

(Wegen Gl.(A.28) können nur diese beiden Projektionsoperatoren von Null verschieden sein.)

Die gesuchten Basis-Operatoren zu den irreduziblen Darstellungen sind also

$$\underline{A_1^{++}} : \quad \text{Re } L_x + \text{Re } L_y + \text{Re } L_z \quad (J^{PC} = 0^{++}, 2^{++}, \dots) \quad (\text{A.34})$$

$$\underline{E^{++}} : \quad 2\text{Re } L_x - \text{Re } L_y - \text{Re } L_z \quad (J^{PC} = 2^{++}, 4^{++}, \dots) \quad (\text{A.35})$$

oder Permutationen und Linearkombinationen
wie z.B. $\text{Re } L_x - \text{Re } L_y$.

womit die Einträge (b) und (f) in Tabelle 4.1 hergeleitet sind. Die übrigen Einträge wurden auf analoge Weise berechnet.

Literaturverzeichnis

- [1] S.L. Glashow, Nucl. Phys. 22 (1961) 579.
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264.
A. Salam, Proc. 8th Nobel Symposium, (N. Svartholm, Ed.),
Stockholm 1968, S. 367.
- [2] Y. Nambu, Preludes in Theoretical Physics, Amsterdam 1966.
H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler, Phys. Lett. 47B (1973) 365.
- [3] Zur experimentellen Überprüfung der elektroschwachen Theorie siehe :
L. Maiani, in "Proceedings of the International Europhysics Conference
on High Energy Physics", Bari 1985, Ed. L. Nitti und G. Preparata,
und dort zitierte Arbeiten.
- Zur experimentellen Überprüfung der QCD siehe :
G. Altarelli, *ibid*, und dort zitierte Arbeiten.
- Neutrale Ströme :
F.J. Hasert et al., Phys. Lett. 46B (1973) S. 121 und S. 138.
- Entdeckung von W und Z :
UA1 Collaboration, Phys. Lett. 122B(1983)103; Phys. Lett. 126B(1983)298.
UA2 Collaboration, Phys. Lett. 122B(1983)476; Phys. Lett. 129B(1983)130.
- [4] P.W. Higgs, Phys. Lett. 12 (1964) 132, Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 508,
Phys. Rev. 145 (1966) 1156.
F. Englert und R. Brout, Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 321.
G.S. Guralnik, C.R. Hagen, und T.W.B. Kibble,
Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 585.
T.W. Kibble, Phys. Rev. 155 (1967) 1554.
J. Bernstein, Rev. Mod. Phys. 46 (1974) 7.
- Siehe auch :
P.W. Anderson, Phys. Rev. 130 (1963) 439.
- [5] R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 367.
R.P. Feynman, A.R. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals",
New York 1965.
- Zur Anwendung der Pfadintegralmethode siehe :
P. Becher, M. Böhm, J. Joos, "Eichtheorien der starken und
elektroschwachen Wechselwirkung", Teubner, Stuttgart 1981.
- [6] K.G. Wilson, Phys. Rev. D10 (1974) 2445.
- [7] Überblicke zu Gittereichtheorien :
M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi, Phys. Rep. 95 (1983) 201.
J. Kogut, Rev. Mod. Phys. 51 (1979) 659; Rev. Mod. Phys. 55 (1983) 775.
M. Creutz, "Quarks, Gluons and Lattices", Cambridge 1983.
- [8] K. Binder, in "Monte Carlo Methods in Statistical Physics",
Ed. K. Binder, Springer 1979.
- [9] N. Metropolis et. al., J. Chem. Phys. 21 (1953) 1087.

- [10] P. Hasenfratz, Proceedings der "23rd International Conference on High Energy Physics", Berkeley, 1986, und dort zitierte Arbeiten.
- [11] T. Çelik, J. Engels und H. Satz, Nucl. Phys. B256 (1985) 670, und dort zitierte Arbeiten.
- [12] E. Fradkin und S. Shenker, Phys. Rev. D19 (1979) 3682.
- [13] E. Seiler, "Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics", Lecture Notes in Physics 159 (Springer 1982).
- [14] K. Osterwalder und E. Seiler, Ann. Phys. 110 (1978) 440.
- [15] M. Peskin, Ann. Phys. 113 (1978) 122.
M.B. Einhorn und R. Savit, Phys. Rev. D17 (1978) 2583;
Phys. Rev. D19 (1979) 1198.
- [16] T. Banks und E. Rabinovici, Nucl. Phys. B160 (1979) 349.
- [17] S. Elitzur, Phys. Rev. D12 (1975) 3978.
G.F. De Angelis, D. de Falco und F. Guerra, Phys. Rev. D17 (1978) 1624.
M. Lüscher, Preprint DESY 77-16 (1977).
- [18] R.E. Shrock, Phys. Lett. 162B (1985) 165; Nucl. Phys. B267 (1986) 301;
Phys. Lett. 180B (1986) 269.
- [19] MC-Studien des U(1)-Higgs-Modells mit festem $|\phi|$:
K.C. Bowler, G.S. Pawley, B.J. Pendleton, D.J. Wallace und G.W. Thomas, Phys. Lett. 104B (1981) 481.
D.J.E. Callaway und L.J. Carson, Phys. Rev. D25 (1982) 531.
J. Ranft, J. Kripfganz und G. Ranft, Phys. Rev. D28 (1983) 360.
J.M.F. Labastida, E. Sánchez-Velasco, R.E. Shrock und P. Wills,
Nucl. Phys. B264 (1986) 393; Phys. Rev. D34 (1986) 3156.
- [20] MC-Studien des SU(2)-Higgs-Modells mit festem $|\phi|$:
C.B. Lang, C. Rebbi und M. Virasoro, Phys. Lett. 104B (1981) 294.
M. Tomiya und T. Hattori, Phys. Lett. 140B (1984) 370.
- [21] J. Jersák, Übersichtsvortrag auf der Konferenz "Lattice Gauge Theory - A Challenge in Large-Scale Computing", Wuppertal, November 1985, Ed. B. Bunk, K.H. Mütter und K. Schilling, Plenum Press, 1986, S. 133.
- [22] G. Koutsoumbas, Phys. Lett. 140B (1984) 379.
Y. Munehisa, Phys. Rev. D30 (1984) 1310; Phys. Rev. D31 (1985) 1522.
V.P. Gerdt, A.S. Ilchev und V.K. Mitrjushkin, Yad. Fiz. 43 (1986) 736.
- [23] D. Espriu und J.F. Wheeler, Nucl. Phys. B258 (1985) 101.
- [24] K. Jansen, J. Jersák, C.B. Lang, T. Neuhaus und G. Vones,
Phys. Lett. 155B (1985) 268; Nucl. Phys. B265 [FS15] (1986) 129.
- [25] R.L. Sugar und W.D. Toussaint, Phys. Rev. D32 (1985) 2061.

- [26] H. Kühnelt, C.B. Lang und G. Vones, Nucl. Phys. B230 [FS10] (1984) 16.
- [27] V.P. Gerdt, A.S. Ilchev, V.K. Mitryushkin, I.K. Sobolev und A.M. Zadorozhny, Nucl. Phys. B265 [FS15] (1986) 145.
V.P. Gerdt, A.S. Ilchev, V.K. Mitryushkin, und A.M. Zadorozhny, Z. Phys. C29 (1985)363; Dubna preprint E2-85-104.
- [28] J.C. Sexton, Preprint Fermilab-Pub-85/168-T.
- [29] J. Jersák, C.B. Lang, T. Neuhaus und G. Vones, Phys. Rev. D32 (1985) 2761.
- [30] H.G. Evertz, J. Jersák, D.P. Landau, T. Neuhaus und J.-L. Xu (in Vorbereitung).
- [31] J. Jersák, Proceedings der Konferenz "Advances in the Lattice Gauge Theory", April 1985, Tallahassee; Ed. D.W. Duke und J.F. Owens, World Scientific, 1985.
- [32] I-H. Lee und J. Shigemitsu, Nucl. Phys. B276 (1986) 580.
- [33] R. Baier, R.V. Gavai und C.B. Lang, Phys. Lett. 172B (1986) 389.
G. Schierholz, J. Seixas und M. Teper, Phys. Lett. 151B (1985) 69; Phys. Lett. 157B (1985) 209.
- [34] D. Brydges, J. Fröhlich und E. Seiler, Nucl. Phys. B152 (1979) 521.
D.C. Brydges und E. Seiler, J. Stat. Phys. 42 (1986) 405.
C. Borgs und F. Nill, Phys. Lett. 171B (1986) 289.
- [35] J. Bricmont und J. Fröhlich, Phys. Lett. 122B (1983) 73;
Nucl. Phys. B251 [FS13] (1985) 517;
Nucl. Phys. B280 [FS18] (1987) 385.
- [36] K. Fredenhagen, Freiburg preprint THEP 82/9 (Vortrag bei dem Kolloquium zu Prof. R. Haags 60. Geburtstag, Hamburg, Nov. 1982).
K. Fredenhagen und M. Marcu, Commun. Math. Phys. 92 (1983) 81; Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 223.
M. Marcu, Proceedings der Konferenz "Lattice Gauge Theory - A Challenge in Large-Scale Computing", Wuppertal, November 1985, Ed. B. Bunk, K.H. Mütter und K. Schilling, Plenum Press, 1986, S. 267.
K. Fredenhagen, "Proceedings of IAMP", Marseille 1986.
M. Marcu, Proceedings der Konferenz "Lattice Gauge Theory 1986", Brookhaven 1986, ed. H. Satz (zur Veröffentlichung) Preprint DESY 86-144.
- [37] K.-I. Kondo, Prog. Theor. Phys. 74 (1985) 152.
J.C.A. Barata und W.F. Wreszinski, Commun. Math. Phys. 103 (1986) 637.
- [38] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B153 (1979) 141.
G. Mack und H. Meyer, Nucl. Phys. B200 [FS4] (1982) 249.
K. Szlachányi, Phys. Lett. 147B (1984) 335; Commun. Math. Phys. 108 (1987) 319.
- [39] V. Alessandrini, J.L. Alonso, A. Cruz und A. Tarancón, Nucl. Phys. B281 (1987) 445.

- [40] J. Fröhlich, G. Morchio und F. Strocchi, Phys. Lett. 97B (1980) 249;
Nucl. Phys. B190 [FS3] (1981) 553.
- [41] T. Kennedy und C. King, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 776.
Commun. Math. Phys. 104 (1986) 327.
C. Borgs und F. Nill, Commun. Math. Phys. 104 (1986) 349.
- [42] C. Borgs und F. Nill, Nucl. Phys. B270 [FS16] (1986) 92.
- [43] Einen sehr schönen Überblick zu exakten Resultaten in kompakten
und nicht-kompakten abelschen Gitter-Higgs-Modellen geben
C. Borgs und F. Nill, ETH Zürich Preprint (Frühjahr 1987).
- [44] T. Filk, K. Fredenhagen und M. Marcu, Phys. Lett. 169B (1986) 405.
V. Azcoiti und A. Tarancón, Phys. Lett. 176B (1986) 153.
- [45] H.G. Evertz, V. Grösch, J. Jersák, H.A. Kastrup, D.P. Landau,
T. Neuhaus und J.-L. Xu, Phys. Lett. 175B (1986) 335.
- [46] H.G. Evertz, V. Grösch, K. Jansen, J. Jersák, H.A. Kastrup
und T. Neuhaus, Aachen Preprint PITHA 86/15
(erscheint in Nucl. Phys. B).
- [47] J. Jersák, Proceedings der Konferenz "Lattice Gauge Theory 1986",
Brookhaven 1986, ed. H. Satz, (zur Veröffentlichung),
Aachen Preprint PITHA 86/22.
H.A. Kastrup, Proceedings der "23rd International Conference
on High Energy Physics", Berkeley, 1986,
Aachen Preprint PITHA 86/21.
- [48] I-H. Lee und J. Shigemitsu, Phys. Lett. 178B (1986) 93.
- [49] I. Montvay, Phys. Lett. 150B (1985) 441; Nucl. Phys. B269 (1986) 170.
W. Langguth und I. Montvay, Phys. Lett. 165B (1985) 135.
W. Langguth, I. Montvay und P. Weisz, Nucl. Phys. B277 (1986) 11.
- [50] I-H. Lee und J. Shigemitsu, Phys. Lett. 169B (1986) 392;
- [51] I-H. Lee und J. Shigemitsu, Nucl. Phys. B263 (1986) 280.
- [52] H.G. Evertz, K. Jansen, J. Jersák, C.B. Lang und T. Neuhaus,
Aachen preprint PITHA 86/16 (erscheint in Nucl. Phys. B).
- [53] H.G. Evertz, J. Jersák, C.B. Lang und T. Neuhaus,
Phys. Lett. 171B (1986) 271.
- [54] H.G. Evertz, K. Jansen, J. Jersák, H.A. Kastrup und T. Neuhaus,
"Proceedings of the 1985 conferences on supercomputers and
applications", Ed. H. Ehlich et al., Bochum 1986.
- [55] C. King und L.G. Yaffe, Commun. Math. Phys. 108 (1987) 423.
- [56] T. Munehisa und Y. Munehisa, Z. Phys. C32 (1986) 531.
- [57] P.H. Damgaard und U.M. Heller, Phys. Lett. 171B (1986) 442;
Preprint CERN-TH 4481/86.

- [58] H.G. Evertz, J. Jersák und K. Kanaya, Nucl. Phys. B285 [FS19] (1987) 229.
- [59] A. Hasenfratz und P. Hasenfratz, Phys. Rev. D34 (1986) 3160.
P. Hasenfratz und J. Nager, Bern Preprint BUTP 86/20.
- [60] R. Dashen und H. Neuberger, Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 1897.
- [61] M. Lindner, Z. Phys. C 31 (1986) 295.
- [62] B. Grzadkowsky und M. Lindner, Phys. Lett. 178B (1986) 81.
- [63] N. Cabibbo, L. Maiani, G. Parisi und R. Petronzio, Nucl. Phys. B158 (1979) 295.
M.A. Beg, C. Panagiotakopoulos und A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 883.
D.J.E. Callaway, Nucl. Phys. B233 (1984) 189.
K.S. Babu und E. Ma, Z. Phys. C31 (1986) 451.
- [64] D.J.E. Callaway und R. Petronzio, Nucl. Phys. B267 (1986) 253;
Nucl. Phys. B277 (1986) 50; Nucl. Phys. B280 [FS18] (1987) 481;
CERN-TH.4511/86.
- [65] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B33 (1971) 173.
- [66] A.D. Linde, JETP Lett. 23 (1976) 64.
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 36 (1976) 294.
- [67] J. van der Bij und M. Veltman, Nucl. Phys. B231 (1984) 205.
J. van der Bij, Nucl. Phys. B248 (1984) 141.
- [68] B.W. Lee, C. Quigg und H.B. Thacker, Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 883.
Phys. Rev. D16 (1977) 1519.
- [69] Einen Überblick über Arbeiten zu einem stark wechselwirkenden Higgs-Sektor (ohne Gitterrechnungen) gibt :
R. Gatto, Univ. Geneve preprint UGVA-DPT 1986/02-493.
Phänomenologische Konsequenzen stark wechselwirkender W 's und Z 's behandeln ausführlich :
M.S. Chanowitz, M.K. Gaillard, Nucl. Phys. B261 (1985) 379.
- [70] M. Aizenman, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 1;
Commun. Math. Phys. 86 (1982) 1.
G.A. Baker and J.M. Kincaid, J. Stat. Phys. 24 (1981) 469.
D.C. Brydges, J. Fröhlich and T. Spencer, Commun. Math. Phys. 83 (1982) 123.
J. Fröhlich, Nucl. Phys. B200 (1982) 281.
A.D. Sokal, Ann. Inst. H. Poincaré A37 (1982) 317.
M. Aizenman and R. Graham, Nucl. Phys. B225 [FS9] (1983) 261.
C. Aragao de Carvalho, S. Caracciolo and J. Fröhlich, Nucl. Phys. B215 (1983) 209.
K. Gawedzki and A. Kupiainen, Phys. Rev. Lett. 54B (1985) 92.
A. Hasenfratz und P. Hasenfratz, Nucl. Phys. B270 (1986) 687.

- [71] Überblicke zur Trivialität der ϕ^4 -Theorie geben :
 J. Fröhlich, in "Quantum Field Theory in Terms of Random Walks and Random Surfaces", Proceedings Cargese 1983.
 M. Lüscher und P. Weisz, "Scaling Laws and triviality bounds in the lattice ϕ^4 theory. I. One-component model in the symmetric phase", DESY 1987.
- [72] B. Freedmann, P. Smolensky and D. Weingarten, Phys. Lett. 113B (1982) 481.
 D.J.E. Callaway and R. Petronzio, Nucl. Phys. B240 [FS12] (1984) 577.
 C.B. Lang, Phys. Lett. 155B (1985) 399;
 Nucl. Phys. B265 [FS15] (1986) 630.
- [73] J. Kogut und L. Susskind, Phys. Rev. D9 (1974) 3501.
- [74] G. Mack, DESY Report 77/58 (1977) (unveröffentlicht);
 Phys. Lett. 78B (1978) 263.
- [75] S. Dimopoulos, S. Raby und L. Susskind, Nucl. Phys. B173 (1980) 208.
- [76] L.F. Abbott und E. Farhi, Phys. Lett. 101B (1981) 69.
 Nucl. Phys. B189 (1981) 547.
 M. Claudson, E. Farhi und M. Jaffe, Phys. Rev. D34 (1986) 873.
 E. Farhi, in "Fundamental Interactions", Cargese 1981,
 Ed. M. Lévy et. al., Plenum Press 1982.
- [77] D.A. Kirzhnits und A.D. Linde, Phys. Lett. 42B (1972) 471.
- [78] S. Weinberg, Phys. Rev. D9 (1974) 3357;
 L. Dolan und R. Jackiw, Phys. Rev. D9 (1974) 3320.
- [79] D.A. Kirzhnits und A.D. Linde, Ann. of Phys. 101 (1976) 195;
 J. Iliopoulos und N. Papanicolaou, Nucl. Phys. B111 (1976) 209.
- [80] S. Coleman und E. Weinberg, Phys. Rev. D7 (1973) 1888.
- [81] R.H. Brandenburger, Rev. Mod. Phys. 57 (1985) 1, und dort zitierte Arbeiten.
- [82] T.P. Cheng und L.F. Li, "Gauge Theory of elementary particle physics", Oxford Univ. Press 1984.
- [83] K. Huang, "Quarks, Leptons and Gauge Fields", World Scientific 1982.
- [84] T. Appelquist und C. Bernhardt, Phys. Rev. D22 (1980) 200.
- [85] M.B. Einhorn, H. Katsumata, Phys. Lett. 181B (1986) 115.
 M.B. Einhorn, Nucl. Phys. B246 (1984) 75.
- [86] M. Peskin, "Proceedings of the 1985 International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies", Kyoto 1985.
- [87] V.L. Ginsburg, L.D. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20 (1950) 1044.
 L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 9, Kapitel 5, Akademie-Verlag Berlin 1984.

- Zur Beziehung zwischen Landau-Ginzburg-Theorie und Higgs-Modellen
siehe auch [21] sowie
V. Grösch, "Dirac-Strings und 2-Punkt-Funktionen in der
Gittereichtheorie", Diplomarbeit, Aachen 1986.
- [88] K. Jansen, "Studium des Higgs-Phasenübergangs in der $U(1)$ -Gitter-
eichtheorie mit skalarem Feld", Diplomarbeit, Aachen 1985.
- [89] H.G. Evertz, J. Jersák, T. Neuhaus und P.M. Zerwas,
Nucl. Phys. B251 [FS13] (1985) 279.
- [90] F.J. Wegner, J. Math. Phys. 12 (1971) 2259.
- [91] P.R. Gerber und M.E. Fisher, Phys. Rev. B10 (1974) 4697.
- [92] J. Fröhlich, B.Simon and T. Spencer, Comm. Math. Phys. 50 (1976) 79.
- [93] I. Montvay, Phys. Lett. 172B (1986) 71.
- [94] T. Neuhaus, "Eigenschaften der Phasenübergänge in der QED und
in den Higgs-Modelle auf dem Gitter", Dissertation, Aachen 1985.
J. Jersák und T. Neuhaus, Proceedings of the 1983 Conferences on
the Cyber 205, Ed. H. Ehlich und K.-H. Schlosser, Bochum 1984.
- [95] M. Creutz und T.N. Tudron, Phys. Rev. D17 (1978) 2619.
G.C. Rossi und M. Testa, Nucl. Phys. B163 (1980) 109.
- [96] H.G. Evertz, K. Jansen, H.A. Kastrup, K. Fredenhagen, und M. Marcu,
Aachen preprint PITHA 87/03, März 1987.
- [97] P. Debye und E. Hückel, Physik. Zeitschr. 24 (1923) 185.
L.D. Landau und E.M. Lifshitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik,
Band 5, Statistische Physik, a.a.O.
D.C. Brydges, Commun. Math. Phys. 58 (1978) 313.
- [98] J.M. Luck, Nucl. Phys. B210 [FS6] (1982) 111.
- [99] J. Jersák, T. Neuhaus und P.M. Zerwas,
Nucl. Phys. B251 [FS13] (1985) 299.
- [100] F. Karsch und C.B. Lang, Phys. Lett. 138B (1984) 176.
- [101] B. Simon, L.G. Yaffe, Phys. Lett. 115B (1982) 145.
- [102] J. Fröhlich und E.H. Lieb, Commun. Math. Phys. 60 (1978) 233.
J. Fröhlich, R. Israel, E.H. Lieb und B. Simon,
Commun. Math. Phys. 62 (1978) 1.
- [103] D. Buchholz und K. Fredenhagen, Commun. Math. Phys. 84 (1982) 1.
- [104] S. Doplicher, R. Haag und J.E. Roberts,
Commun. Math. Phys. 23 (1971) 199.
F. Strocchi und A.S. Wightman, J. Math. Phys. 15 (1974) 2198.
D. Buchholz, Commun. Math. Phys. 85 (1982) 49.
- [105] J. Fröhlich und P.A. Marchetti, Europhys. Lett. 2 (1986) 933.

- [106] D. Buchholz und K. Fredenhagen, *Commun. Math. Phys.* 84 (1982) 1.
- [107] B. Berg und A. Billoire, *Nucl. Phys.* B221 (1983) 109.
- [108] J. Fröhlich und T. Spencer, *Commun. Math. Phys.* 83 (1982) 411
- [109] B. Berg und C. Panagiotakopoulos, *Phys. Rev. Lett.* 52 (1984) 94.
- [110] J.A. Swieca, *Phys. Rev.* D13 (1976) 312.
D. Buchholz und K. Fredenhagen, *Nucl. Phys.* B154 (1979) 226.
- [111] A. Nakamura, *Phys. Lett.* 149B (1984) 391.
U. Heller und F. Karsch, *Nucl. Phys.* B258 (1985) 29;
J.B. Kogut, J. Polonyi, H.W. Wyld und D.K. Sinclair,
Phys. Rev. D31 (1985) 3307; *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985) 1475;
U. Heller, *Phys. Lett.* 163B (1985) 203.
- [112] C. Bernard, *Phys. Rev.* D9 (1974) 3312;
M. Suzuki, *Progr. Theor. Phys.* 56 (1976) 1454;
J. Engels, F. Karsch, H. Satz und I. Montvay,
Nucl. Phys. B205 [FS5] (1982) 545.
- [113] A.D. Linde, *Phys. Lett.* 96B (1980) 289;
D.J. Gross, R.D. Pisarski und L.G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* 53 (1981) 43.
- [114] F. Karsch, E. Seiler und I.O. Stamatescu,
Phys. Lett. 131B (1983) 138; *Phys. Lett.* 157B (1985) 60;
M. Kikugawa, T. Maehara, J. Saito, R. Sasaki, H. Tanaka und
Y. Yamaoka, *Progr. Theor. Phys.* 74 (1985) 553.
- [115] J.D. Bjorken, S.D. Drell, "Relativistische Quantenfeldtheorie", BI 101,
Mannheim 1967.
- [116] M. Lax, "Symmetry principles in solid state and molecular physics",
Wiley 1974.
W. Miller, "Symmetry groups and their application",
Academic Press 1972.
- [117] C.B. Lang, unveröffentlichte Notizen (Graz 1985).
- [118] R.C. Johnson, *Phys. Lett.* 114B (1982) 147.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr. J. Jersák ganz herzlich für seine umsichtige Betreuung, seine ständige Hilfsbereitschaft und die angenehme Zusammenarbeit danken. Er hat mich immer wieder entscheidend gefördert und hat meine Aktivitäten in fruchtbare Bahnen gelenkt.

Bei Herrn Prof. Dr. H.A. Kastrup bedanke ich mich für seine vielfache Unterstützung, für die Übernahme des Koreferats und für die erfolgreiche Zusammenarbeit. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. P.M. Zerwas für seine langjährige Hilfe. Herrn Prof. Dr. D. Horn sei an dieser Stelle für seine anregende Betreuung während meines Aufenthaltes am Stanford Linear Accelerator Center gedankt. Herrn Prof. D.P. Landau danke ich für die Zusammenarbeit und für einen nützlichen Forschungsaufenthalt in Athens. Zu großem Dank verpflichtet bin ich auch Herrn Prof. Dr. C.B. Lang für seine Unterstützung und für einen sehr erfreulichen Aufenthalt in Graz, der meine Arbeit stark vorangebracht hat.

Meine Kollegen Veit Grösch, Kazuyuki Kanaya und Thomas Neuhaus haben gemeinsam mit mir gegen die Tücken der Monte-Carlo-Rechnungen gekämpft. Dafür und für ihre Freundschaft bedanke ich mich. Ebenso danke ich auch meinen Freunden Kris Bertness, Eberhard Eich, Klaus-Peter Dörpelkus, Stephan Güsken, Edwin Laermann und John Price für viele 'Diskussionen am Rande'.

Mein ganz besonderer Dank für die mehrjährige gemeinsame Arbeit, für seine unermüdliche Hilfsbereitschaft, und besonders für die Durchsicht des Manuskriptes dieser Arbeit gilt meinem Freund Karl Jansen. Bei ihm, bei Wolfgang Bock, Kazuyuki Kanaya und Thomas Trappenberg möchte ich mich auch für ihre Hilfe bei der Erstellung der Abbildungen sehr bedanken.

Den Rechenzentren der Universitäten in Aachen, Bochum und Karlsruhe, und auch in Athens (Georgia) und Tallahassee (Florida) sei dafür gedankt, daß sie die notwendigen Rechnerressourcen zur Verfügung gestellt haben.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft und der Studienstiftung des Deutschen Volkes danke ich für ihre Förderung.

Meinen Eltern möchte ich für ihre immerwährende großzügige Unterstützung ganz herzlich Dank sagen.