

4.9 Der Harmonische Oszillator

Zum harmonischen Oszillator gehört klassisch die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \quad (4.58)$$

Damit wird z.B. näherungsweise die Bewegung von einzelnen Atomen in einem Festkörper beschrieben, hier in 1 Dimension. Wenn die Atome in der Gleichgewichtslage sind, so wirkt keine Kraft. Lenkt man ein Atom aus der Ruhelage um x aus, so wirkt auf das Atom eine rücktreibende Kraft $f(x)$. Diese Kraft kann man in eine Taylorreihe entwickeln

$$f(x) = f(0) - k \cdot x + \dots$$

In der Ruhelage verschwindet die angreifende Kraft ($f(0) = 0$) und der Kraft $-k \cdot x$ entspricht das Potential $\frac{k}{2}x^2$.

Die klassische Bewegungsgleichung $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$ hat die Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \\ \text{mit } \omega^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Die Hamiltonfunktion \mathcal{H} lässt sich somit auch schreiben als

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \underbrace{\frac{\omega^2 m}{2} x^2}_{\text{V}(x)} \quad (4.60)$$

Der Übergang zur Quantenmechanik erfolgt mittels Ersetzen der dynamischen Variablen durch Operatoren. Der Hamilton-Operator lautet dann

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{\omega^2 m}{2} \hat{Q}^2 \quad (4.61)$$

Er ist nicht explizit zeitabhängig. Wir müssen daher nur die stationäre Schrödingergleichung

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$$

lösen. Eine einfache, elegante, algebraische Lösung dieses Eigenwertproblems geht auf Dirac zurück. Sie vermeidet das explizite Lösen einer Differentialgleichung. Einen völlig analogen Formalismus benutzt man in der Vielteilchenphysik und der Quantenfeldtheorie zur Beschreibung von Systemen mit vielen Teilchen.

4.9.1 Methode von Dirac

Der Hamilton-Operator lässt sich zu

$$\hat{H} = \frac{m\omega^2}{2} \left[\hat{Q}^2 + \left(\frac{\hat{P}}{m\omega} \right)^2 \right]$$

umschreiben. Wir formen ihn weiter um. Wenn die Operatoren vertauschen würden, könnte die eckige Klammer als $(\hat{Q} - i\frac{\hat{P}}{m\omega})(\hat{Q} + i\frac{\hat{P}}{m\omega})$ geschrieben werden. Aufgrund der Vertauschungsrelationen erhalten wir für dieses Produkt jedoch

$$\left(\hat{Q} - i\frac{\hat{P}}{m\omega} \right) \left(\hat{Q} + i\frac{\hat{P}}{m\omega} \right) = \left[\hat{Q}^2 + \left(\frac{\hat{P}}{m\omega} \right)^2 \right] - \frac{i}{m\omega} [\hat{P}, \hat{Q}] = \left[\hat{Q}^2 + \left(\frac{\hat{P}}{m\omega} \right)^2 \right] - \frac{\hbar}{m\omega} \hat{1}.$$

Damit kann man den Hamilton-Operator folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{m\omega^2}{2} \left(\hat{Q} - i\frac{\hat{P}}{m\omega} \right) \left(\hat{Q} + i\frac{\hat{P}}{m\omega} \right) + \frac{\hbar\omega}{2} \hat{1} \\ &= \hbar\omega \left\{ \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{Q} - i\frac{\hat{P}}{m\omega} \right) \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{Q} + i\frac{\hat{P}}{m\omega} \right) \right) + \frac{1}{2} \hat{1} \right\} \end{aligned}$$

Die Ausdrücke in Klammern nennen wir „Leiteroperatoren“ oder

ERZEUGUNGS- UND VERNICHTUNGSOPERATOREN

$$\begin{aligned} a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{Q} - i\frac{\hat{P}}{m\omega} \right) \\ a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{Q} + i\frac{\hat{P}}{m\omega} \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die Namen werden später erläutert. Weil \hat{P} und \hat{Q} selbstadjungiert sind, sind diese Operatoren zueinander adjungiert:

$$(a)^\dagger = a^\dagger \quad \text{und} \quad (a^\dagger)^\dagger = a. \quad (4.63)$$

Wir definieren noch den sogenannten

4.9. Der Harmonische Oszillator

ANZAHL-OPERATOR \hat{N}

$$\hat{N} = a^\dagger a \quad , \quad (4.64)$$

Es gilt $\hat{N}^\dagger = \hat{N}$. Damit wird der Hamilton-Operator formal sehr einfach:
N ist hermitesch --> reelle Eigenwerte.

HAMILTON-OPERATOR DES HARMONISCHEN OSZILLATORS

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \hat{\mathbb{1}} \right) = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \hat{\mathbb{1}} \right) \quad . \quad (4.65)$$

29.4.2021

Besonders wichtig sind die Vertauschungsrelationen von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left[\left(\hat{Q} + i\frac{\hat{P}}{m\omega} \right), \left(\hat{Q} - i\frac{\hat{P}}{m\omega} \right) \right] \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar} \left(\underbrace{[\hat{Q}, \hat{Q}]}_{=0} + \left(\frac{i}{m\omega} \right) \left(-\frac{i}{m\omega} \right) \underbrace{[\hat{P}, \hat{P}]}_{=0} - \frac{i}{m\omega} \left([\hat{Q}, \hat{P}] - [\hat{P}, \hat{Q}] \right) \right) \\ &= \hat{\mathbb{1}} \end{aligned}$$

$2[\hat{Q}, \hat{P}] = 2i\hbar \hat{\mathbb{1}}$

VERTAUSCHUNGSRELATIONEN VON ERZEUGUNGS- UND VERNICHTUNGSOPERATOREN

$$\underbrace{aa^\dagger - a^\dagger a}_{\hat{N}} \equiv [a, a^\dagger] = \hat{\mathbb{1}} \Leftrightarrow \underline{aa^\dagger = \hat{N} + \hat{\mathbb{1}}} \quad , \quad \begin{matrix} a^\dagger a \approx \hat{N} \\ (4.66) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} [a, a] &= 0 \\ [a^\dagger, a^\dagger] &= 0 \end{aligned}$$

Wir benennen die Eigenwerte und Eigenvektoren von \hat{N} mit n und $|n\rangle$.
 Wir werden bald sehen, dass n eine natürliche Zahl sein muss. Da sich die Operatoren $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \hat{\mathbb{1}} \right)$ und \hat{N} nur um ein Vielfaches des Einheits-

operators unterscheiden, haben sie dieselben Eigenvektoren:

$$\text{Wenn } \underline{\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle}, \text{ dann } \underline{\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|n\rangle}.$$

Daher hat \hat{H} die Eigenwerte $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Weil die Operatoren hermitesch sind, sind die Eigenwerte reell. Wir müssen nun herausfinden, welche Eigenwerte n des Anzahloperators möglich sind. Dazu betrachten wir die Vertauschungsrelationen von \hat{N} mit a und a^\dagger

$$\underline{[\hat{N}, a^\dagger]} = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger \underbrace{a a^\dagger}_{a^\dagger a + \mathbf{1}} - a^\dagger a^\dagger a \quad (4.67a)$$

$$= a^\dagger a^\dagger a + a^\dagger - a^\dagger a^\dagger a = \underline{a^\dagger} \quad (4.67b)$$

$$\underline{[\hat{N}, a]} = [a^\dagger a, a] = a^\dagger a a - \underbrace{a a^\dagger}_{a^\dagger a + \mathbf{1}} a \quad (4.67c)$$

$$= a^\dagger a a - a^\dagger a a - a = \underline{-a} \quad (4.67d)$$

Wir wenden die Vertauschungsrelation $[\hat{N}, a^\dagger] = a^\dagger$ auf einen Vektor $|n\rangle$ an und benutzen $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$:

$$\begin{aligned} [\hat{N}, a^\dagger] |n\rangle &= a^\dagger |n\rangle \\ \Leftrightarrow \hat{N} a^\dagger |n\rangle - a^\dagger n |n\rangle &= a^\dagger |n\rangle \\ \Leftrightarrow \underbrace{\hat{N} a^\dagger |n\rangle}_{\text{Vektor}} &= (n+1) \underline{a^\dagger |n\rangle} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Analog

$$\underline{\hat{N} a |n\rangle} = (n-1) \underline{a |n\rangle} \quad (4.69)$$

Wenn also $|n\rangle$ Eigenvektor von \hat{N} zum Eigenwert n ist, so ist

$a^\dagger |n\rangle$ Eigenvektor zum Eigenwert $(n+1)$

$a |n\rangle$ Eigenvektor zum Eigenwert $(n-1)$

Man nennt a^\dagger den Erzeugungoperator und a den Vernichtungoperator in Analogie zur Quantenfeldtheorie. Dort werden formal gleichartige Operatoren benutzt und n steht für eine Teilchenzahl, z.B. für die Zahl von Photonen einer Ausbreitungsrichtung $\frac{k}{|k|}$ und Frequenz ω . Die Operatoren a^\dagger und a ändern dort die Teilchenzahl um 1.

4.9. Der Harmonische Oszillator

Bei einem eindimensionalen Potentialproblem sind die gebundenen Eigenzustände von \hat{H} nicht entartet (Kap. 4.6.3). Ungebundene Zustände gibt es beim harmonischen Oszillator wegen des unbeschränkten Potentials nicht. Der Vektor $a|n\rangle$ muss somit zu $|n-1\rangle$ proportional sein:

$$\underline{a|n\rangle} = c \cdot |n-1\rangle \quad (4.70)$$

Das Adjungierte dieser Gleichung lautet

$$\underline{\langle n|a^\dagger} = \langle n-1|c^* \quad (4.71)$$

Nach links angewandt wirkt der Erzeugungsoperator daher wie ein Vernichtungsoperator (und analog der Vernichtungsoperator wie ein Erzeugungsoperator (s.u.))!

Wir berechnen nun den Proportionalitätsfaktor. Die Eigenvektoren $|n\rangle$ sollen normiert sein. Zum einen gilt

$$\underbrace{\langle n|a^\dagger a|n\rangle}_{\hat{N}} = \underbrace{\langle n|\hat{N}|n\rangle}_{n|n\rangle} = n \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} = n$$

Zum anderen können wir beim Produkt $a^\dagger a$ den Faktor a^\dagger nach links und den zweiten Faktor a nach rechts anwenden:

$$\underbrace{\langle n|a^\dagger a|n\rangle}_{\approx \curvearrowright} = c^* c \langle n-1|n-1\rangle = |c|^2$$

Daher muss der Normierungsfaktor $|c|^2 = n$ erfüllen. Wir wählen $c = \sqrt{n}$. Daraus folgt

$$\underline{a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle} \quad (4.72)$$

Insbesondere⁵ gilt $a|0\rangle = 0$. Analoge Überlegungen für $a^\dagger|n\rangle$

$$\begin{aligned} a^\dagger|n\rangle &= c'|n+1\rangle \\ \langle n|aa^\dagger|n\rangle &= c'^* c' \langle n+1|n+1\rangle = |c'|^2 \\ \langle n|aa^\dagger|n\rangle &= \langle n|(\hat{N} + \hat{\mathbb{1}})|n\rangle = n+1 \stackrel{!}{=} |c'|^2 \end{aligned}$$

⁵Man beachte, dass in der hier verwendeten allgemein üblichen Notation „ $|0\rangle$ “ für den Zustand mit $n=0$ steht und nicht für den Nullvektor des Hilbertraums. Letzterer wird nicht explizit als Vektor, sondern als „0“ geschrieben, z.B. $|1\rangle - |1\rangle = 0$.

liefern

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (4.73)$$

Die adjungierten Versionen von (4.72) und (4.73) zeigen, wie man a und a^\dagger nach links anwendet:

$$\begin{aligned} \langle n| a^\dagger &= \langle n-1| \sqrt{n} \\ \langle n| a &= \langle n+1| \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Wir können nun mit einem beliebigen Eigenzustand $|n\rangle$ beginnen und den Operator a wiederholt anwenden

$$\begin{aligned} a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \\ a a |n\rangle &= \sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle \\ a^m |n\rangle &= \sqrt{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)} |n-m\rangle \end{aligned} \quad (4.74)$$

So erhalten wir die Eigenzustände $|n-m\rangle$ zu immer kleiner werdenden Eigenwerten $(n-m)$ von \hat{N} , wobei m die Anzahl von angewandten Operatoren a zählt. Das bedeutet, dass im Prinzip negative Eigenwerte erzeugt werden könnten. Es gilt aber für jeden Eigenzustand $|n'\rangle$

$$n' = \langle n' | \hat{N} | n' \rangle = \underbrace{\langle n' | a^\dagger}_{\langle \psi |} \underbrace{a | n' \rangle}_{| \psi \rangle} = \|\psi\|^2 \geq 0.$$

Daher muss die Folge in Gl. (4.74) abbrechen. Dies geschieht genau dann, wenn n positiv ganzzahlig ist, weil dann $a|0\rangle = 0$ auftritt. Wir erhalten: **Die Eigenwerte des Anzahloperators \hat{N} sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N}_0 .** Weil die Eigenwerte von \hat{H} nicht entartet sind, sind die Eigenzustände $|n\rangle$ orthonormal.

EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN DES ANZAHL-OPERATORS

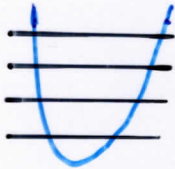
$$\begin{aligned} \hat{N}|n\rangle &= n|n\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{d.h. } n = 0, 1, 2, 3, \dots) , \\ \langle n|m\rangle &= \delta_{n,m}, \quad \sum_{n=0,1,2,\dots} |n\rangle\langle n| = \hat{1}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

4.9. Der Harmonische Oszillator

Die Eigenvektoren von \hat{H} sind dieselben wie von \hat{N} .

Aus $\hat{H} = \hbar\omega (\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{\mathbb{1}})$ ergeben sich die

EIGENENERGIEN DES HARMONISCHEN OSZILLATORS



$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

(4.76)

- $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. $n = 0, 1, 2, 3, \dots$)
- Die Eigenenergien des Harmonischen Oszillators sind in Einheiten von $\hbar\omega$ quantisiert. Sie wachsen mit n linear an.
- Im Grundzustand „ $|0\rangle$ “ hat das Teilchen die Nullpunktsenergie $\frac{\hbar\omega}{2}$.
- Ort und Impuls sind auch im Grundzustand unscharf, wie schon aus der Unschärferelation folgt.

o Wir haben zur Herleitung der Energien (4.76) nur die Vertauschungsrelation von a und a^\dagger benutzt!

4.9.2 Eigenzustände und Erwartungswerte

Wir wissen nun, dass der n -te angeregte Zustand aus dem Grundzustand $|0\rangle$ durch n -faches Anwenden von a^\dagger erzeugt werden kann. Es gilt

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |n-1\rangle \\ &\dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} \dots \frac{1}{\sqrt{1}} (a^\dagger)^n |0\rangle \end{aligned}$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (4.77)$$

Wir wollen nun den Erwartungswert der Auslenkung $\langle n|\hat{Q}|n\rangle$, und des Impulses $\langle n|\hat{P}|n\rangle$ sowie die Varianzen im Eigenzustand $|n\rangle$ berechnen. Wir

können die Rechnungen algebraisch mit Hilfe der Operatoren a und a^\dagger durchführen, ohne z.B. \hat{P} als Differentialoperator schreiben zu müssen. Dazu drücken wir \hat{Q} und \hat{P} wieder durch a und a^\dagger aus. Mit Gl. (4.62) gilt

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{1}{m\omega}} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (a^\dagger + a) =: \frac{x_0}{\sqrt{2}} (a^\dagger + a) \quad (4.78)$$

$$\hat{P} = i\sqrt{m\omega} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (a^\dagger - a) =: i \frac{p_0}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a) \quad (4.79)$$

Hier haben wir auch eine für den harmonischen Oszillator charakteristische Längenskala x_0 und eine Impulsskala p_0 definiert. (Der Faktor $\sqrt{2}$ ist Konvention.) Sowohl \hat{Q} als auch \hat{P} sind hermitesch.

Einsetzen in die Erwartungswerte der Auslenkung und des Impulses liefert mit $\langle n | (a + a^\dagger) | n \rangle = \langle n | a | n \rangle + \langle n | a^\dagger | n \rangle$

$$\langle n | \hat{Q} | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\underbrace{\langle n | a | n \rangle}_{\substack{\sqrt{n|n-1} \\ \perp=0}} + \underbrace{\langle n | a^\dagger | n \rangle}_{\substack{\sqrt{n+1|n+1} \\ \perp=0}} \right) = 0$$

$$\langle n | \hat{P} | n \rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \left(\underbrace{\langle n | a | n \rangle}_{\substack{\sqrt{n|n-1} \\ \perp=0}} - \underbrace{\langle n | a^\dagger | n \rangle}_{\substack{\sqrt{n+1|n+1} \\ \perp=0}} \right) = 0$$

In einem Eigenzustand von \hat{H} sind die Erwartungswerte somit Null.⁶ Für eine Linearkombination von Eigenzuständen sind die Erwartungswerte aber i.a. nicht Null (s.a. Übungen).

⁶Dies gilt auch für alle anderen Potentiale, die wie der harmonische Oszillator spiegelsymmetrisch sind, $V(x) = V(-x)$. Dann sind die Eigenfunktionen symmetrisch oder antisymmetrisch: $\psi_n(-x) = \pm\psi_n(x)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_n(x)|^2$ ist symmetrisch. Es folgt $\langle \psi_n | \hat{Q} | \psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x |\psi_n(x)|^2 = 0$. Für gebundene Eigenzustände gilt auch immer $\langle \psi_n | \hat{P} | \psi_n \rangle = 0$ (Kap. 4.1.1).

4.9. Der Harmonische Oszillator

Nun berechnen wir den Erwartungswert von \hat{Q}^2 im Zustand $|n\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle n|\hat{Q}^2|n\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n|(a + a^\dagger)^2|n\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n|(a^2 + (a^\dagger)^2 + a^\dagger a + a a^\dagger)|n\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\langle n|\underline{a^2}|n\rangle + \langle n|\underline{(a^\dagger)^2}|n\rangle + \langle n|\underline{a^\dagger a}|n\rangle + \langle n|\underline{a a^\dagger}|n\rangle \right)\end{aligned}$$

Die ersten drei Erwartungswerte lassen sich mit Gl. (4.72) und Gl. (4.73) leicht berechnen

$$\begin{aligned}\langle n|\underline{a^2}|n\rangle &\sim \langle n|n-2\rangle = 0 \\ \langle n|\underline{(a^\dagger)^2}|n\rangle &\sim \langle n|n+2\rangle = 0 \\ \langle n|\underline{a^\dagger a}|n\rangle &= \langle n|\hat{N}|n\rangle = n \langle n|n\rangle = \underline{n}.\end{aligned}\tag{4.80}$$

Einen Ausdruck wie $\langle n|a a^\dagger|n\rangle$ kann man auf unterschiedliche Arten berechnen:

- (i) Mit Hilfe der Vertauschungsrelation (4.66)
 $\underline{a a^\dagger} = \hat{N} + \hat{\mathbb{1}} \Rightarrow \langle n|a a^\dagger|n\rangle = \langle n|(\hat{N} + \hat{\mathbb{1}})|n\rangle = \underline{n+1}.$
- (ii) Durch Anwenden beider Operatoren nach rechts:
 $\langle n|a a^\dagger|n\rangle = \langle n|a(\sqrt{n+1}|n+1\rangle) = \langle n|\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle = n+1.$
- (iii) Durch Anwenden des linken Operators im Produkt aa^\dagger nach links und des rechten nach rechts:
 $\langle n|a a^\dagger|n\rangle = (\langle n|\sqrt{n+1}) (\sqrt{n+1}|n+1\rangle) = n+1.$

Zusammen mit $\langle n|\hat{Q}|n\rangle = 0$ erhalten wir die Unschärfe $\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle \equiv \langle\hat{Q}^2\rangle - (\langle\hat{Q}\rangle)^2$ im Eigenzustand $|n\rangle$:

$$\langle n|(\Delta\hat{Q})^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1) = \underline{\underline{\frac{x_0^2}{2} (2n+1)}}.$$

Speziell für den Grundzustand ($n=0$) ist

$$\langle 0|(\Delta\hat{Q})^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{x_0^2}{2}.\tag{4.81}$$

Analoge Überlegungen für den Impuls liefern

$$\begin{aligned}
 \hat{P}^2 &= -\frac{m\omega\hbar}{2} (a - a^\dagger)(a - a^\dagger) \\
 &= -\frac{m\omega\hbar}{2} (a^2 + (a^\dagger)^2 - a^\dagger a - a a^\dagger) \\
 \langle n | (\Delta \hat{P})^2 | n \rangle &= \frac{m\omega\hbar}{2} (\langle n | a^\dagger a | n \rangle + \langle n | a a^\dagger | n \rangle) \\
 &= \frac{m\omega\hbar}{2} (2n + 1) = \frac{p_0^2}{2} (2n + 1).
 \end{aligned}$$

Für den Grundzustand ist die Unschärfe im Impuls

$$\langle 0 | (\Delta \hat{P})^2 | 0 \rangle = \frac{m\omega\hbar}{2} = \frac{p_0^2}{2}.$$

Zusammenfassend:

$ \begin{aligned} \langle n \hat{Q} n \rangle &= 0 \\ \langle n \hat{P} n \rangle &= 0 \\ \langle n (\Delta \hat{Q})^2 n \rangle &= \frac{x_0^2}{2} (2n + 1) \\ \langle n (\Delta \hat{P})^2 n \rangle &= \frac{p_0^2}{2} (2n + 1), \end{aligned} $	<p><i>Erwartungswerte im Eigenzustand $n\rangle$</i></p> <p>(4.82)</p>
--	--

Für die Orts-Impuls-Unschärfe beim harmonischen Oszillator erhalten wir

$$\langle n | (\Delta \hat{Q})(\Delta \hat{P}) | n \rangle = x_0 p_0 (n + \frac{1}{2}) = \frac{\hbar}{2} (2n + 1). \quad (4.83)$$

Im Grundzustand des harmonischen Oszillators nimmt die Orts-Impuls-Unschärfe somit ihren minimal möglichen Wert $\frac{\hbar}{2}$ an!

4.9. Der Harmonische Oszillator

4.9.3 Grundzustand in der Ortsdarstellung

Wir haben bisher die Eigenzustände $|n\rangle$ von \hat{H} nur abstrakt ausgedrückt. Die Wellenfunktion, d.h. die Koeffizienten von $|n\rangle$ in der Ortsdarstellung, sind

$$\langle x|n\rangle =: \psi_n(x) \quad (4.84)$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude, das quantenmechanische Teilchen am Ort x anzutreffen, wenn es sich im Eigenzustand $|n\rangle$ befindet.

Die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x)$ kann mit Hilfe von $a|0\rangle = 0$ berechnet werden. Wir multiplizieren diese Gleichung von links mit $\langle x|$, d.h. wir betrachten sie im Ortsraum:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x|a|0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\langle x|\hat{Q}|0\rangle + \frac{i}{m\omega} \langle x|\hat{P}|0\rangle \right) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x\psi_0(x) + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx}\psi_0(x) \right) \\ \Rightarrow \frac{d\psi_0(x)}{dx} &= -\frac{x}{x_0^2} \psi_0(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}\psi(x) &= x\psi(x) \\ \hat{P}\psi(x) &= -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x) \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist die

GRUNDZUSTANDSWELLENFUNKTION DES HARMONISCHEN OSZILLATORS

Normierung: $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$

$$\psi_0(x) = (\pi x_0^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \quad (4.85)$$

Dies ist eine normierte Gaußsche Funktion mit $\sigma = x_0$.

Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Intervall $(x, x + dx)$ anzutreffen, ist quantenmechanisch

$$dP(x) = |\psi_0(x)|^2 dx \sim e^{-\frac{x^2}{x_0^2}} dx$$

Vergleich: Beim klassischen harmonischen Oszillator ist die Wahrscheinlichkeit proportional zur Verweildauer Δt des Teilchens im betrachteten Intervall

$$P(x' \in (x, x + \Delta x)) \sim \Delta t = \frac{\Delta x}{|v(x)|}$$

Bei einer klassischen Oszillatorbewegung mit Amplitude A gilt

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A \cdot \cos(\omega t) \\
 |v(x)| = |\dot{x}| &= |\omega \cdot A| \cdot |\sin(\omega t)| = |\omega A| \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)} \\
 &= \omega A \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Nach der Normierung auf 1 erhalten wir

$$dP(x' \in (x, x + dx)) = \frac{1}{\omega A} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}} dx$$

Die klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist vollständig durch die maximale Auslenkung A festgelegt. Diese Größe kommt in der quantenmechanischen Beschreibung nicht vor. Um beide Verteilungsfunktionen miteinander vergleichen zu können, wählen wir die Parameter so, dass die Energien gleich sind, nämlich

$$\frac{\omega^2 m}{2} A^2 = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Es folgt $A^2 = \frac{\hbar}{m\omega} (2n + 1) = x_0^2 (2n + 1)$. Dann sind auch die Varianzen $(\Delta Q)^2$ klassisch und quantenmechanisch gleich! Bei $n = 0$ ist daher $A = x_0$.

(Mikroskopisch: Klassischer Osz. eigentlich nicht anwendbar !)

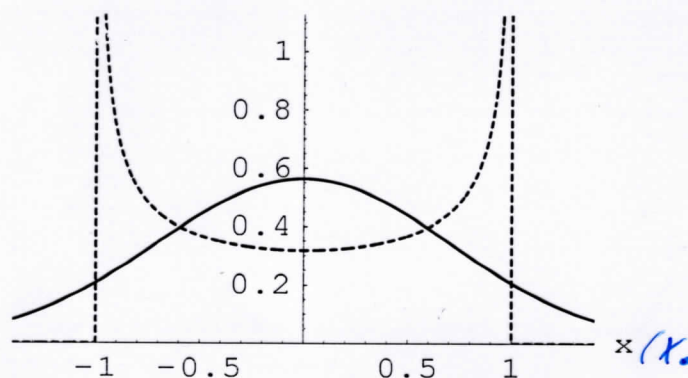


Abbildung 4.17: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_0(x)|^2$ im Grundzustand des harmonischen Oszillators mit derjenigen eines klassischen Pendels. Gestrichelte Linie: klassisches Ergebnis. Durchgezogene Linie: quantenmechanisches Ergebnis. Die Auslenkung x ist in Einheiten von x_0 angegeben.

In Abbildung (4.17) sind die klassische und (für den Grundzustand $n=0$) die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsdichte wiedergegeben. Sie unterscheiden sich drastisch.

4.9. Der Harmonische Oszillator

4.9.4 Angeregte Zustände in der Ortsdarstellung

Der n-te angeregte Zustand kann durch n-faches Anwenden des Erzeugungsoperators aus dem Grundzustand erzeugt werden. Das wollen wir ausnutzen, um die angeregten Zustände in der Ortsdarstellung zu bestimmen

$$\begin{aligned}
 \underline{\psi_n(x)} &:= \langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle x|(a^\dagger)^n|0\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} \langle x|\left(\hat{Q} - i\frac{\hat{P}}{m\omega}\right)^n|0\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} \left(x - \underbrace{\frac{\hbar}{m\omega}}_{x_0^2} \frac{d}{dx}\right)^n \psi_0(x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n!}} 2^{-\frac{n}{2}} x_0^{-n} \left(x - x_0^2 \frac{d}{dx}\right)^n \psi_0(x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n!}} 2^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{x}{x_0} - \frac{d}{d(\frac{x}{x_0})}\right)^n \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x_0}} e^{-\frac{(x/x_0)^2}{2}} \\
 (\text{mit: } z = \frac{x}{x_0}) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} 2^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x_0}} \left[\left(z - \frac{d}{dz}\right)^n e^{-\frac{z^2}{2}}\right]_{z=\frac{x}{x_0}}
 \end{aligned}$$

Die in der letzten Klammer auftretenden Funktionen bezeichnet man als Hermite-Polynome.

DIE ANGEREGTEN ZUSTÄNDE IN DER ORTSDARSTELLUNG

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} 2^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x_0}} \left[e^{-\frac{z^2}{2}} h_n(z) \right]_{z=\frac{x}{x_0}} \quad (4.86)$$

$h_n(z)$: Hermite-Polynom n-ten Grades

- $h_n(z)$: reelles **Polynom der Ordnung n** in $z = x/x_0$
- $h_n(z)$ hat gerade oder ungerade Parität: $h_n(-z) = (-1)^n h_n(z)$

Beispiele:

$$\underline{\psi_1(x)} \sim \left(z - \frac{d}{dz}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} = ze^{-\frac{z^2}{2}} + \left(\frac{2z}{2}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} = \underbrace{2z}_{h_1(z)} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{2}{x_0} x e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$$

$$\begin{aligned} \underline{\psi_2(x)} &\sim \left(z - \frac{d}{dz}\right)^2 e^{-\frac{z^2}{2}} = \left(z - \frac{d}{dz}\right) 2ze^{-\frac{z^2}{2}} = 2\left(z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} - \frac{d}{dz}\left(ze^{-\frac{z^2}{2}}\right)\right) \\ &= 2(z^2 - 1 + z^2) e^{-\frac{z^2}{2}} \\ &= \underbrace{2(2z^2 - 1)}_{h_2(z)} e^{-\frac{z^2}{2}} \end{aligned}$$

$z = \frac{x}{x_0}$

Die Wellenfunktion $\psi_1(x)$ ist wie erwartet antisymmetrisch und $\psi_2(x)$ ist wieder symmetrisch in x . Die Wellenfunktionen zu $n = 0, 1$ und 2 sind in Abb. (4.18) dargestellt.

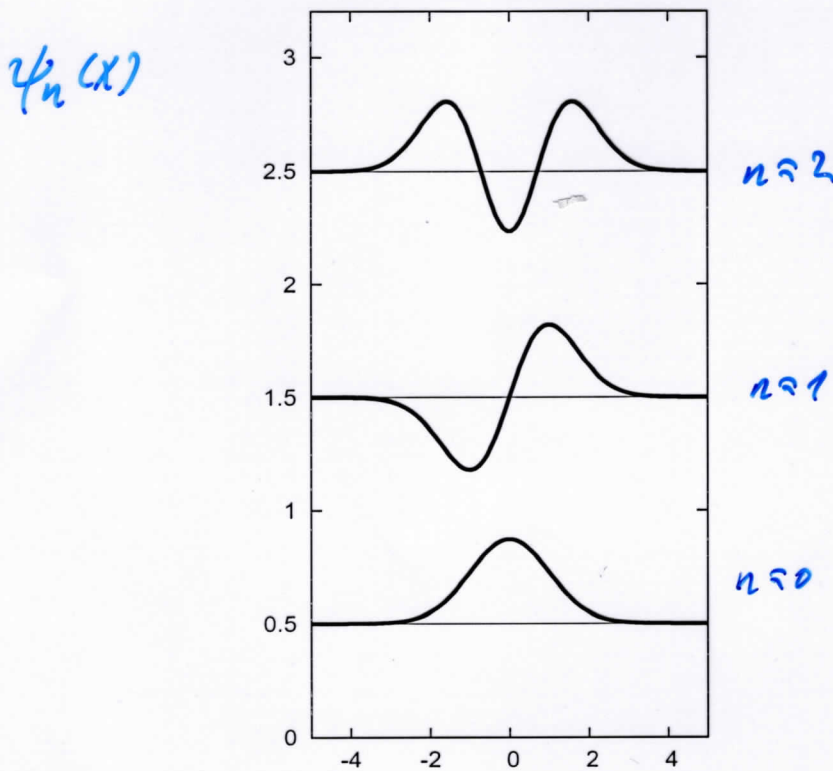


Abbildung 4.18: Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ der ersten drei Eigenzustände ($n = 0, 1, 2$) des harmonischen Oszillators. (Horizontal: Auslenkung in Einheiten von x_0 . Vertikal: Wellenfunktion (willkürliche Einheit), sowie Energie in Einheiten von $\hbar\omega$.)

4.9. Der Harmonische Oszillator

Die Eigenvektoren $|n\rangle$ des hermiteschen Operators \hat{H} sind vollständig, und zueinander orthonormal. Daraus folgt eine entsprechende Orthogonalität der Hermite-Polynome

$$\begin{aligned}\langle n|m\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_m(x) dx = \delta_{n,m} \Leftrightarrow \\ &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} h_n(z)h_m(z)dz = \delta_{n,m} n! \sqrt{\pi} 2^n.\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_n(x)|^2$ (nicht die Wellenfunktion) einiger Zustände ist in Abbildung (4.19) dargestellt und mit dem Ergebnis der klassischen Mechanik verglichen.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Zustand $|n\rangle$ hat n Nullstellen. Der Abstand der Nullstellen ist ungefähr $\Delta_{N.S.} \approx 2A/(n+1) \approx x_0 \sqrt{8/n}$ für $n \geq 2$. Qualitativ nähert sich das quantenmechanische Ergebnis für $n \rightarrow \infty$ dem klassischen Ergebnis an. Es bleiben aber deutliche Unterschiede:

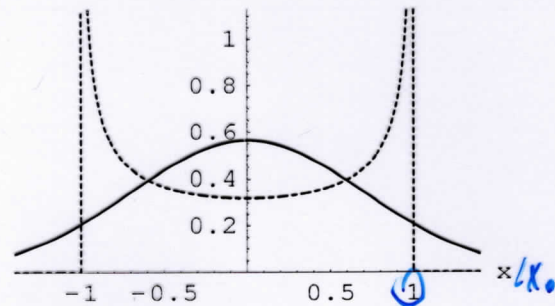
- n Nullstellen
- die Maxima sind doppelt so hoch wie die Amplitude im klassischen Ergebnis.

Experimentell haben wir aber immer eine endliche Auflösung Δx . Die experimentelle Wahrscheinlichkeitsdichte ist daher

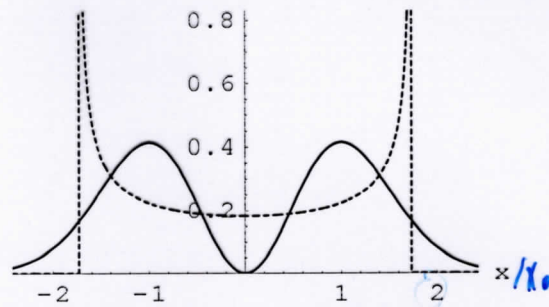
$$\tilde{\rho}(x) = \frac{\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \rho(x) dx}{\Delta x}$$

Für makroskopische schwingende Teilchen ist x_0 sehr klein ($x_0 \approx 10^{-16}m$ für $m=1g$ und $\omega=1/sec$) und bei makroskopischer Amplitude entsprechend die Quantenzahl n sehr groß. Dann ist der Abstand der Nullstellen sehr viel kleiner als die experimentelle Auflösung und die Kurven stimmen auch quantitativ überein.

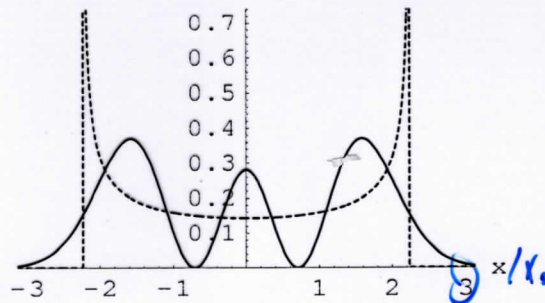
$$|\psi_n(x)|^2$$



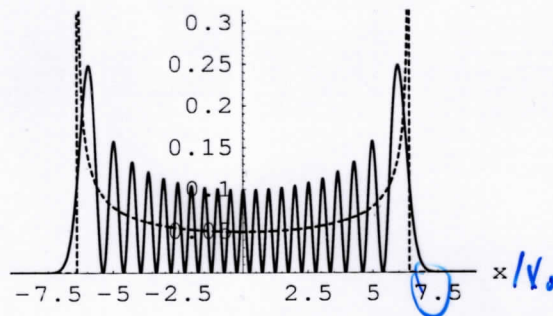
$n=0$



$n=1$



$n=2$



$n=20$

Abbildung 4.19: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichten $|\psi_n(x)|^2$ des harmonischen Oszillators (nicht der Wellenfunktion selber) mit dem klassischen Oszillator (gestrichelte Linie). Durchgezogene Linien: quantenmechanisches Ergebnis für $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ und $n = 20$ (von oben nach unten). Die Auslenkung x ist wieder in Einheiten von x_0 angegeben.

4.9.5 Dynamik des harmonischen Oszillators

Wir wollen hier die Zeitentwicklung der Wellenfunktion im Potential des harmonischen Oszillators untersuchen. Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand $|\Phi_0\rangle$. Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ ist er

$$|\Phi(t)\rangle = e^{-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}} |\Phi_0\rangle \quad , \quad (4.87)$$

da der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators nicht explizit von der Zeit abhängt. Wir entwickeln den Anfangszustand $|\Phi_0\rangle$ nach den Eigenzuständen des harmonischen Oszillators

$$|\Phi_0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (4.88)$$

$$c_n = \langle n|\Phi_0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle n|x\rangle \langle x|\Phi_0\rangle dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Phi_0(x) dx \quad . \quad (4.89)$$

In 1 Dimension können alle Koeffizienten c_n reell gewählt werden, wie auch die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$. Einsetzen in Gl. (4.87) liefert für den Zustand

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}} |n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\frac{t}{\hbar}\hbar\omega(\hat{N}+\frac{1}{2})} |n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})} |n\rangle \end{aligned} \quad (4.90)$$

und für die Wellenfunktion, mit Abspaltung eines irrelevanten globalen Phasenfaktors:

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) \equiv \langle x|\Phi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})} \\ &= e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-i\omega t n} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Die Wellenfunktion zur Zeit t besteht somit aus einer Summe von Schwingungen mit Frequenzen $(n + \frac{1}{2})\omega$. Weil alle diese Frequenzen ganzzahlige

sind alle Erwartungswerte

Vielfache von ω sind, ist die gesamte Wellenfunktion periodisch in der Zeit, mit der Periode $T = 2\pi/\omega$. Dies ist auch die Schwingungsdauer des klassischen Oszillators. !

$$\Phi(x, t + T) = \underbrace{e^{-i\pi}}_{-1} e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-i\omega t n} \underbrace{e^{-i2\pi n}}_1 \quad (4.92)$$

$$= -\Phi(x, t) \quad (4.93)$$

Der negative Vorfaktor hat keinen Einfluss auf Messgrößen.

Wir berechnen nun das zeitliche Verhalten von $\langle \hat{Q} \rangle$ im Zustand $|\Phi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} |n\rangle$, mit reellen Koeffizienten c_n . Aus dem Ehrenfestschen Theorem wissen wir schon, dass $\langle \hat{Q} \rangle$ die klassische Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator erfüllt. Wir erwarten deshalb bei passenden Anfangsbedingungen eine Schwingung mit Frequenz ω .

$$\begin{aligned} \langle \Phi(t) | \hat{Q} | \Phi(t) \rangle &= \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle \Phi(t) | a^\dagger + a | \Phi(t) \rangle \\ &= \frac{x_0}{\sqrt{2}} \left(\sum_{n,m} c_n c_m \langle n | e^{i(n+\frac{1}{2})\omega t} e^{-i(m+\frac{1}{2})\omega t} \sqrt{m+1} | m+1 \rangle + h.c. \right) \\ &\stackrel{n=m+1}{=} \frac{x_0}{\sqrt{2}} \sum_m \sqrt{m+1} \left(c_{m+1} c_m e^{i\omega t} + h.c. \right) \\ &= \frac{x_0}{\sqrt{2}} \sum_m \sqrt{m+1} \left(c_{m+1} c_m \right) 2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Hier steht "h.c." für das hermitesch Konjugierte des vorherigen Terms und wir haben ausgenutzt, dass $\langle \Phi | a^\dagger | \Phi \rangle$ der zu $\langle \Phi | a | \Phi \rangle$ hermitesch konjugierte Ausdruck ist.

Im Ergebnis sehen wir tatsächlich, dass der Erwartungswert des Ortsoperators in der Regel mit $\cos \omega t$ schwingt, allerdings nur, falls es im Anfangszustand $|\Phi_0\rangle$ Terme $c_{n+1}c_n \neq 0$ gibt. Ansonsten ist $\langle \hat{Q} \rangle$ z.B. in einem Eigenzustand $|n\rangle$ des Hamiltonoperators zeitunabhängig Null. !

4.9.6 Kohärente Zustände

Ein besonderer Fall sind *kohärente Zustände*. Dort ist die Wellenfunktion zu allen Zeiten gaußförmig wie im Grundzustand des harmonischen Oszillators, daher mit minimaler Unschärfe. Sie schwingt im Potential des harmonischen Oszillators als Ganzes (!) mit der Frequenz ω . Ein solcher Zustand ist von allen Zuständen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators einem klassischen Teilchen am ähnlichsten. Verallgemeinerungen von kohärenten Zuständen sind in der Vielteilchen-Quantenmechanik und Quantenoptik sehr wichtig.

Breite
Konstant

Formal ist ein kohärenter Zustand $|\lambda\rangle$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators als rechtsseitiger Eigenzustand des (nicht-hermiteschen) Vernichtungsoperators a definiert:

$$a |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle, \quad (4.95)$$

wobei der Eigenwert λ eine beliebige komplexe Zahl ist. Real- und Imaginärteil von λ entsprechen den Erwartungswerten von \hat{Q} und \hat{P} im kohärenten Zustand (s.u.).

Die Zustände $|\lambda\rangle$ seien normiert. Im Folgenden sind einige wichtige Eigenschaften zusammengefasst.⁷

Man kann $|\lambda\rangle$ wie jeden Zustand des harmonischen Oszillators in der Basis $\{|n\rangle\}$ ausdrücken: $|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$. Durch Einsetzen in (4.95) erhält man eine Rekursionsgleichung, mit der Lösung

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.96)$$

Man beachte, dass es zum Erzeugungsoperator a^\dagger keinen rechtsseitigen Eigenzustand geben kann, weil nach Anwenden von a^\dagger auf einen beliebigen Zustand $\sum_{n=n_{min}}^{\infty} c'_n |n\rangle$ der Zustand $|n_{min}\rangle$ im Ergebnis nicht mehr vorkommt. Es gilt aber wegen (4.95) bei Anwendung nach links:

$$\langle \lambda | a^\dagger = \langle \lambda | \lambda^*. \quad (4.97)$$

⁷In der Quantenelektrodynamik werden kohärente Zustände völlig analog über den Vernichtungsoperator für Photonen definiert (s.u.). Dann entsprechen Real- und Imaginärteil von λ der Stärke des elektrischen bzw. des magnetischen Feldes.

Aus Gl. (4.96) folgt, dass die

Eine Energiemessung (Anwendung von H) ergibt mit dieser Wahrscheinlichkeit den Messwert $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$

Wahrscheinlichkeiten $|\langle n|\lambda\rangle|^2 = e^{-|\lambda|^2} \frac{(|\lambda|^2)^n}{n!}$ Poisson-förmig

verteilt sind. In einem kohärenten Zustand kommen somit alle Anregungen $|n\rangle$ vor. Die Erwartungswerte sind

$$\langle \lambda | \hat{N} | \lambda \rangle = \langle \lambda | a^\dagger a | \lambda \rangle = |\lambda|^2 \quad (4.98a)$$

$$\langle \lambda | (\Delta \hat{N})^2 | \lambda \rangle = |\lambda|^2 \quad (4.98b)$$

Die relative Unschärfe $\frac{\Delta \hat{N}}{\langle \hat{N} \rangle}$ der beitragenden Anregungen nimmt daher wie $\frac{1}{|\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{N} \rangle}}$ ab.

Entsprechend verhält sich die Unschärfe der Energie:

$$\langle \hat{H} \rangle = \hbar\omega \left(\langle \hat{N} \rangle + 1/2 \right) = \hbar\omega (|\lambda|^2 + 1/2), \text{ und } (\Delta \hat{H})^2 = (\hbar\omega)^2 |\lambda|^2, \text{ daher}$$

$$\frac{\Delta \hat{H}}{\langle \hat{H} \rangle} = \frac{|\lambda|}{|\lambda|^2 + 1/2}.$$

Die Erwartungswerte von \hat{Q} und \hat{P} in einem kohärenten Zustand lassen sich leicht berechnen ($x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, $p_0 = \sqrt{m\omega\hbar}$):

$$\langle \lambda | \hat{Q} | \lambda \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle \lambda | (a^\dagger + a) | \lambda \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} 2 \operatorname{Re} \lambda \quad (4.99)$$

$$\langle \lambda | \hat{P} | \lambda \rangle = i \frac{p_0}{\sqrt{2}} \langle \lambda | (a^\dagger - a) | \lambda \rangle = \frac{p_0}{\sqrt{2}} 2 \operatorname{Im} \lambda \quad (4.100)$$

Somit ist

$$\lambda = \frac{\langle \hat{Q} \rangle}{\sqrt{2}x_0} + i \frac{\langle \hat{P} \rangle}{\sqrt{2}p_0}.$$

Für die Unschärfen erhält man

$$\langle \lambda | (\Delta \hat{Q})^2 | \lambda \rangle = \frac{x_0^2}{2} \quad (4.101)$$

$$\langle \lambda | (\Delta \hat{P})^2 | \lambda \rangle = \frac{p_0^2}{2} \quad (4.102)$$

$$\langle \lambda | \Delta \hat{P} \Delta \hat{Q} | \lambda \rangle = \frac{\hbar}{2} \quad (4.103)$$

Die Unschärfen sind dieselben wie beim Grundzustand des harmonischen Oszillators! Insbesondere hat die die Orts-Impulsunschärfe ihren minimal

4.9. Der Harmonische Oszillator

möglichen Wert $\frac{\hbar}{2}$, unabhängig von λ . Dagegen können die Erwartungswerte $\langle \hat{Q} \rangle \sim \text{Re } \lambda$ und $\langle \hat{P} \rangle \sim \text{Im } \lambda$ beliebig groß werden. Die relativen Unschärfen $\Delta \hat{Q} / \langle \hat{Q} \rangle$ und $\Delta \hat{P} / \langle \hat{P} \rangle$ werden daher bei makroskopischen Dimensionen sehr klein, Ort und Impuls verhalten sich nahezu klassisch. Die Größe der Unschärfe legt nahe, dass die Wellenfunktion eines kohärenten Zustands ein Gaußpaket ist. In der Tat ist die Wellenfunktion

$$\langle x | \lambda \rangle = (\pi x_0^2)^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ -\frac{(x - \langle \hat{Q} \rangle)^2}{2x_0^2} + \frac{i}{\hbar} \langle \hat{P} \rangle x \right\} \quad (4.104)$$

ein um den Betrag $\langle \hat{Q} \rangle \sim \text{Re } \lambda$ verschobenes Gaußsches Paket (mit einem Impuls von $\langle \hat{P} \rangle \sim \text{Im } \lambda$), d.h. der verschobene Grundzustand des harmonischen Oszillators.

Nebenbemerkung:

Dies kann man auch mit einer anderen Rechnung erkennen. Durch Einsetzen von (4.77), $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle$ in (4.96) erhalten wir

$$\begin{aligned} |\lambda\rangle &= e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle \\ &= e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle \\ &= e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a} |0\rangle \end{aligned} \quad (4.105)$$

Die letzte Zeile kann man mit Hilfe der Vertauschungsrelationen von a und a^\dagger zeigen. Der dort auf $|0\rangle$ wirkende Operator $e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a}$ ist unitär. Wenn λ reell ist, d.h. $\langle \hat{P} \rangle = 0$, dann wird der Exponent zu $\lambda(a^\dagger - a) \sim \hat{P}$ und wir erhalten

$$|\lambda\rangle = e^{-\frac{i\sqrt{2}}{p_0} \hat{P} \lambda} |0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{P} \left(\frac{x_0}{\sqrt{2}} 2\lambda\right)} |0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{P} \langle \hat{Q} \rangle} |0\rangle \quad (4.106)$$

mit einem Translationsoperator der Gestalt $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{P} x}$, der, wie wir in einem späteren Kapitel noch genauer sehen werden, einen Zustand um die Strecke x räumlich verschiebt.

(Ende der Nebenbemerkung)

Die Zeitentwicklung eines kohärenten Zustands $|\lambda(t=0)\rangle = |\lambda\rangle$ kann man direkt aus der Darstellung (4.96) berechnen:

$$\begin{aligned} |\lambda(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\lambda(0)\rangle = e^{-i(\hat{N} + \frac{1}{2}) t} |\lambda\rangle = \dots = \\ &= e^{-i\frac{\omega}{2} t} |\lambda e^{-i\omega t}\rangle \end{aligned} \quad (4.107)$$

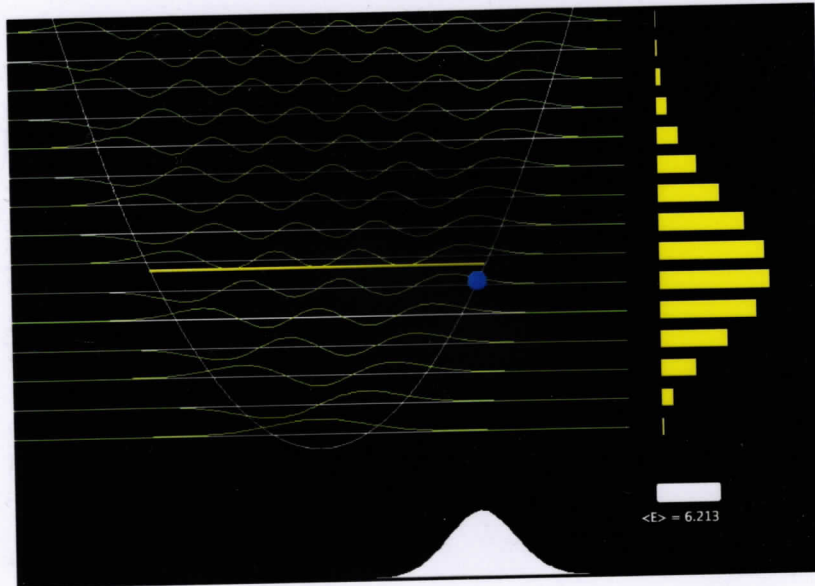


Abbildung 4.20: Kohärenter Zustand des harmonischen Oszillators. Momentaufnahme aus der Zeitentwicklung. Weiße Parabel: Potential $V(x)$. Dünne grüne Linien: Eigenenergien und Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators. Gelbe Linie: Energie-Erwartungswert des kohärenten Zustands. Gelbes Histogramm: Beiträge der einzelnen Eigenmoden des harmonischen Oszillators. Weißer Gaußkurve: Wellenfunktion des kohärenten Zustands, kurz vor der maximalen Auslenkung. Blauer Punkt: Erwartungswert des Ortsoperators und momentane potentielle Energie. Die Gaußkurve der Wellenfunktion und der blaue Punkt schwingen wie bei einem klassischen Pendel. (Screenshot aus der Appletsammlung zum Buch „Quantum Mechanics“ von J.L. Basdevant und J. Dalibard, Springer 2005, <http://www.quantum-physics.polytechnique.fr/en/index.html>.)

(zeitlich konstant!)

Der Zustand bleibt kohärent. Es ändert sich mit der Zeit nur die Phase von λ und der Zustand schwingt somit als Ganzes, wie ein klassisches Teilchen. Wenn $\lambda(t=0)$ reell ist, dann ist der Anfangszustand ein verschobenes Gaußpaket (ohne Impuls), analog zu einem klassischen ausgelenkten Pendel und wir erhalten

ohne Änderung der Form

$$\langle \hat{Q}(t) \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} 2 \operatorname{Re} \lambda(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2}} 2 \cos(\omega t) \lambda(0) \quad (4.108)$$

$$\langle \hat{P}(t) \rangle = i \frac{p_0}{\sqrt{2}} 2 \operatorname{Im} \lambda(t) = i \frac{p_0}{\sqrt{2}} 2 \sin(\omega t) \lambda(0) \quad (4.109)$$

mit einer konstanten Breite (4.99) von $\Delta \hat{Q} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$ (siehe Abbildung 4.20).

4.9. Der Harmonische Oszillator

Kohärente Zustände zu verschiedenen Eigenwerten λ sind nicht orthogonal:

$$|\langle \mu | \lambda \rangle|^2 = e^{-|\mu - \lambda|^2}. \quad (4.110)$$

Sie sind aber vollständig, im Sinne von

$$\frac{1}{\pi} \int d\text{Re}\lambda d\text{Im}\lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| = \mathbb{1}. \quad (4.111)$$

Deswegen kann man kohärente Zustände als eine (überevollständige) Basis verwenden und beliebige andere Zustände des harmonischen Oszillators darin ausdrücken. Besonders wichtig wird dies in der Vielteilchen-Quantenmechanik (z.B. Quantenelektrodynamik) und der zugehörigen Pfadintegralformulierung.

Ausblick: In der Quantenoptik (Quantenelektrodynamik) muss wegen der Translationsinvarianz der Naturgesetze jede Fouriermode, d.h. jede Wellenzahl \vec{k} , einzeln behandelt werden. Man führt Erzeugungoperatoren $a_{\vec{k}, \vec{e}}^\dagger$ ein, die jeweils ein Photon mit Wellenzahl \vec{k} und Polarisationsrichtung \vec{e} erzeugen, und Basiszustände $|n_{\vec{k}, \vec{e}}\rangle$ gemäß der Anzahl solcher Photonen. Aus dem elektrischen und magnetischen Feld werden Operatoren mit einer Struktur wie $a_{\vec{k}, \vec{e}}^\dagger + a_{\vec{k}, \vec{e}}$ und $a_{\vec{k}, \vec{e}}^\dagger - a_{\vec{k}, \vec{e}}$ analog zu Orts- und Impulsoperator beim harmonischen Oszillator (!). Das „kohärente Licht“ eines Lasers mit Impuls $\hbar\vec{k}$ und Polarisation \vec{e} entspricht in dieser Darstellung tatsächlich einem quantenmechanischen kohärenten Zustand. In diesem schwingen die Erwartungswerte des elektrischen bzw. magnetischen Feldes in Zeit und Raum cosinus- und sinus-förmig. Die Gesamt-Unschärfe ist analog zu (4.103) minimal und unabhängig von der Feldstärke. Die relative Unschärfe wird mit größerer Stärke der Felder immer kleiner. Auf diese Weise geht bei makroskopisch starken Feldern, d.h. großer mittlerer Photonenzahl $\langle n_{\vec{k}, \vec{e}} \rangle$, aus der quantenmechanischen Beschreibung eine klassische Beschreibung mit festen Feldstärken hervor. Bei den sogenannten „squeezed states“ von Licht ist die Unschärfe des elektrischen Feldes kleiner und dafür die des magnetischen Feldes größer, oder umgekehrt, bei gleichbleibender Gesamtunschärfe.