Holomorphie von streutheoretischen Größen der Diractheorie

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
"Doktor der technischen Wissenschaften"
vorgelegt an der
Technischen Universität Graz
von

Karl Unterkofler

Graz, August 1988

Diese Dissertation wurde am Institut für Theoretische Physik an der TU Graz unter der Leitung von Doz. Dr. W. Bulla und in Zusammenarbeit mit Prof. Dr. F. Gesztesy (CALTECH, Pasadena) im Studienjahr 1987/88 durchgeführt.

Mein besonderer Dank gilt meinen Lehrern W. Bulla und F. Gesztesy für die Themenwahl, das angenehme Arbeitsklima und die ausgezeichnete Betreuung.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Bereits im Jahr 1928 wurde von Dirac eine relativistische quantenmechanische Gleichung für Spin 1/2-Teilchen erfunden. Für $c \to \infty$ sollten die Meßwerte der Diractheorie in die entsprechenden Meßwerte der Schrödingertheorie übergehen. Es stellt sich daher die Frage, in welchem Sinn der Diracoperator für $c \to \infty$ gegen den Schrödingeroperator konvergiert.

Der natürliche Konvergenzbegriff bei unbeschränkten Operatoren wird durch die Normkonvergenz der Resolvente ([13] Theorem VIII.18) und damit aller stetigen, im unendlichen verschwindenden Funktionen dieser Operatoren gegeben. Die Normresolventenkonvergenz wurde in [7] dazu benutzt, auf mathematisch strenge Weise Formeln für die Entwicklung der Energieeigenwerte des Diracoperators nach $\frac{1}{c^2}$ zu erhalten.

Bereits früher wurde von Foldy/Wouthuysen eine rein formale Entwicklung des Diracoperators angegeben, die richtige Korrekturterme lieferte. Der entsprechende Operator (Term mit: $-p^4$) hat aber offensichtlich sein wesentliches Spektrum (Streuzustände) auf der negativen reellen Achse und spiegelt somit völlig unphysikalische Vorstellungen wider. Die trotzdem richtigen Ergebnisse konnten als ein Effekt der spektralen Konzentration erklärt werden.

Mit Hilfe der von [7] angegebenen Entwicklung konnte in [4] auch eine Entwicklung der Energiebänder (absolut stetiges Spektrum) in Anwesenheit periodischer Potentiale durchgeführt werden.

Ziel dieser Arbeit ist es, entsprechende Untersuchungen für die streutheoretischen Größen der Diracgleichung mit elektrostatischem Potential zu machen (Vektorpotentiale und skalare Potentiale lassen sich eleganter mit supersymmetrischen Methoden bearbeiten). Abstrakte Resultate über starke Konvergenz liegen bereits in [5, 17, 19, 21] vor. Ein Beweis der Holomorphie streutheoretischer Größen sowie die Angabe relativistischer Korrekturglieder ist aber noch ausständig.

Kapitel 2

Die eindimensionale Diracgleichung

Der freie Diracoperator H_0^D in $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ ist definiert durch:

$$H_0^D := cp \otimes \sigma_1 + mc^2 \otimes \sigma_3 \tag{2.1}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} m, c &\in \mathbb{R}^+ \\ p := -i\frac{d}{dx}, \quad \mathrm{D}(p) &= H^{2,1}(\mathbb{R}) \\ \mathrm{D}(H_0^D) &= H^{2,1}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

Es sei nun $v = v(x)$ reell, und für ein $\alpha > 0$ gelte:

$$e^{\alpha|x|}v(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \tag{2.2}$$

Anmerkung: Es gilt $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

V sei der durch die Funktion $v(x)$ maximal definierte Multiplikationsoperator in $L^2(\mathbb{R})$.

Der Diracoperator H^D in $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ ist nun definiert als:

$$\begin{aligned} H^D &:= H_0^D + V \otimes 1 \\ \mathrm{D}(H^D) &= \mathrm{D}(H_0^D) \end{aligned} \tag{2.3}$$

H^D ist selbstadjungiert und es gilt:

$$\sigma_{ess}(H^D) = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty) \tag{2.4}$$

$v \in L^2(\mathbb{R})$, denn es gilt:

$$\|v\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 e^{2\alpha|x|} dx < \infty$$

Für $f \in \mathrm{D}(p)$ gilt: $f \in L^2(\mathbb{R})$, $f \in AC(\mathbb{R})$ und $f' \in L^2(\mathbb{R})$ und daher $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. (Die Beschränktheit von f zeigt man analog zum Schrödingerfall vgl. [18] Bemerkung 3.3,4;2)

Daraus folgt:

$$||vf||_2 \leq ||v||_2 \; ||f||_\infty < \infty$$

d.h.: $\mathrm{D}(p) \subset \mathrm{D}(V)$.

Der Kern K von $V(H_0^D - E)^{-1}$ ist: (vgl. [1], [9])

$$K(x,y) = v(x) e^{i\frac{k}{c}|x-y|} \frac{i}{2c} \begin{pmatrix} k_0^{-1} & sgn(x-y) \\ sgn(x-y) & k_0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$$E \in \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty)\}$$
$$k = (E^2 - m^2c^4)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathrm{Im}\; k(E) \geq 0, \quad k_0 = \frac{k}{E + mc^2}$$

Der Kern ist $\in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ (Prop. 2.7 [3]) und daher ist das Potential relativ kompakt. Mit dem Satz von Weyl (Satz 9.9 [20]) folgt dann obige Behauptung.

Kapitel 3

Der nichtrelativistische Grenzfall der Diracgleichung

3.1 Überblick

Da eine nichtrelativistische Theorie die Annahme einer unendlich großen Signalausbreitungsgeschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit) enthält, erwartet man, daß für $c \to \infty$ die Meßwerte der Diractheorie in die Meßwerte der Schrödingertheorie übergehen. Der Diracoperator konvergiert im Sinne der Normresolventenkonvergenz gegen den entsprechenden Paulioperator. Für die diskreten Eigenwerte gilt der folgende Satz.

Satz 1 : Es sei E_0 der durch $(*)$ gegebene Eigenwert des zu H^D gehörenden Paulioperators H_+. Dann gilt: Für c^{-2} klein genug existiert ein $E(c^{-2}) \in \sigma_d(H^D - mc^2 \otimes 1)$ mit $E(0) = E_0$ holomorph in c^{-2} um $c^{-2} = 0$ und

$$E(c^{-2}) = E_0 + \frac{1}{2mc^2} < pf_0, (V - E_0)pf_0 > +O(c^{-4}) \tag{3.1}$$

$$(*) \quad H_+ = \frac{p^2}{2m} + V \quad , \quad H_+ f_0 = E_0 f_0$$

Beweis: Siehe [7]

Anmerkung: Die Hauptidee von [7] besteht darin, die Eigenwerte der Diracresolvente, die holomorph in c^{-1} ist, zu untersuchen und dann das "strong spectral mapping theorem" (vgl. [16]) anzuwenden.

In Weiterführung dieser Untersuchungen wurde in Bulla, Gesztesy, Unterkofler [4] gezeigt, daß die von der Schrödingergleichung mit periodischem Potential her bekannte Bandstruktur des Spektrums auch bei der eindimensionalen Diracgleichung vorliegt, und die relativistische Korrektur der Ordnung c^{-2} der Bandkanten wurde angegeben.

Die starke Konvergenz der vom Diracoperator erzeugten unitären Gruppe gegen jene des Paulioperators wurde in Cirincione, Chernoff [5] nachgewiesen.

Die Konvergenz der Wellenoperatoren der Diractheorie (Veselić, Weidmann [19]) sowie des Streuoperators (Yajima [21]) gegen ihre Paulientsprechungen im starken Sinne wurde gezeigt.

Im Hinblick auf den nichtrelativistischen Grenzfall der Streutheorie wird des weiteren $H^D - mc^2 \otimes 1$ für den Fall $E > 0$ (Streuzustände) untersucht.

3.2 Jostlösungen und ihre Eigenschaften

Zur Untersuchung der Streumatrix wird hier der direkte, elementare Weg über die Jostlösungen gewählt.

Abkürzungen:

$$A(x,y,E,c) := \frac{1}{c} \begin{pmatrix} k_0^{-1} \sin \frac{k}{c}(x-y) & -i \cos \frac{k}{c}(x-y) \\ -i \cos \frac{k}{c}(x-y) & k_0 \sin \frac{k}{c}(x-y) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$E, c \in \mathbb{R}^+, \quad k := (E(E+2mc^2))^{1/2}, \quad k_0 := \frac{k}{E+2mc^2}$$

Die Jostlösungen $f_\pm$ von $(H^D - mc^2 \otimes 1) f_\pm = E f_\pm$ (im Distributionensinne) mit

$$f_\pm(x \to \pm\infty) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm k_0 \end{pmatrix} e^{\pm i \frac{k}{c} x}$$

sind nun definiert als die eindeutigen Lösungen von:

$$f_\pm(x,E,c) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm k_0 \end{pmatrix} e^{\pm i \frac{k}{c} x} - \int_x^{\pm\infty} A(x,y,E,c) v(y) f_\pm(y,E,c) dy$$

$$E, c \in \mathbb{R}^+ \tag{3.3}$$

f ist zweikomponentig; d.h.: $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

Anmerkung: Die Differentialgleichung mit Randbedingungen entspricht dieser Integralgleichung (Beweis durch Einsetzen).

Anmerkungen: a.) Ohne Abzug der Ruhemasse sind die Jostlösungen $f_\pm$ von $H^D f_\pm = E f_\pm$ (im Distributionensinne) mit

$$f_\pm(x \to \pm\infty) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm k_0 \end{pmatrix} e^{\pm i \frac{k}{c} x}$$

definiert als die eindeutigen Lösungen von:

$$f_\pm(x, E, c) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm k_0 \end{pmatrix} e^{\pm i \frac{k}{c} x} - \int\limits_x^{\pm\infty} A(x, y, E, c) v(y) f_\pm(y, E, c) dy \qquad (3.4)$$

$$E, c \in \mathbb{R}^+, \quad k := (E^2 - m^2 c^4)^{1/2}, \quad k_0 := \frac{k}{E + mc^2}$$

b.) Gilt für $v(x) : v(x) \overset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} v_\pm$ und

$$\int_{-\infty}^0 |v(x) - v_-| e^{\alpha |x|} dx + \int_0^\infty |v(x) - v_+| e^{\alpha x} dx < \infty$$

so sind die Jostlösungen $f_\pm$ von $(H^D - mc^2 \otimes 1) f_\pm = E f_\pm$ (im Distributionensinne) mit

$$f_\pm(x \to \pm\infty) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm k_{0\pm} \end{pmatrix} e^{\pm i \frac{k_\pm}{c} x}$$

die eindeutigen Lösungen von:

$$f_\pm(x, E, c) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm k_{0\pm} \end{pmatrix} e^{\pm i \frac{k_\pm}{c} x} - \int\limits_x^{\pm\infty} A(x, y, E, c)(v(y) - v_\pm) f_\pm(y, E, c) dy \qquad (3.5)$$

$$E, c \in \mathbb{R}^+, \quad k_\pm := ((E - v_\pm)(E - v_\pm + 2mc^2))^{1/2}, \quad k_{0\pm} := \frac{k_\pm}{E - v_\pm + 2mc^2}$$

Es sei nun $B(c)$ die Matrix (vgl. [10])

$$B(c) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Im Hinblick auf eine Entwicklung in c^{-2} statt c^{-1} werden in der Folge die mit $B(c)$ multiplizierten Jostlösungen $g_\pm$ von $(B(c)(H^D - mc^2 \otimes 1)B(c)^{-1})g_\pm = Eg_\pm$ (im Distributionensinne) mit

$$g_\pm(x \to \pm\infty) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm ck_0 \end{pmatrix} e^{\pm i\frac{k}{c}x}$$

untersucht:

$$g_\pm(x, E, c) := B(c) f_\pm(x, E, c) \tag{3.6}$$

Ferner sei

$$\tilde{A}(x, y, E, c) := B(c) A(x, y, E, c) B(c)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{ck_0} \sin \frac{k}{c}(x-y) & \frac{-i}{c^2} \cos \frac{k}{c}(x-y) \\ \\ -i \cos \frac{k}{c}(x-y) & \frac{k_0}{c} \sin \frac{k}{c}(x-y) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Es gilt der folgende Satz:

Satz 2 : Die Jostlösungen $g_\pm = B(c) f_\pm$ sind holomorphe Funktionen in c^{-2} in einer Umgebung von $c^{-2} = 0$.

Beweis:

Die Lösung der Volterra-Integralgleichung für die Jostlösung $g_+ = B(c) f_+$:

$$g_+(x, E, c) = \begin{pmatrix} 1 \\ ck_0 \end{pmatrix} e^{i\frac{k}{c}x} - \int_x^\infty \tilde{A}(x, y, E, c) v(y) g_+(y, E, c) dy \tag{3.8}$$

erfolgt durch Iteration.

$$\text{Es sei} \quad g_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ ck_0 \end{pmatrix} e^{i\frac{k}{c}x} \tag{3.9}$$

$$\text{und} \quad g_n := -\int_x^\infty \tilde{A}(x,y,E,c)v(y)g_{n-1}(y,E,c)dy \tag{3.10}$$

$$\text{dann gilt:} \qquad g_+(x,E,c) = \sum_{n=0}^\infty g_n(x,E,c) \tag{3.11}$$

wenn die Reihe konvergiert. Für den Nachweis der Konvergenz ist daher die Abschätzung der g_n notwendig.

Folgende Abschätzungen und Identitäten werden dafür verwendet:

$$a.)|\sin\frac{k}{c}(x-y)| \leq e^{(y-x)|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|}, \qquad E>0, \qquad x\leq y$$

$$b.)|\cos\frac{k}{c}(x-y)| \leq e^{(y-x)|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|}, \qquad E>0, \qquad x\leq y$$

$$c.)\frac{k}{c} = k^s(1+\frac{E}{2mc^2})^{1/2} \quad \text{wobei} \quad k^s := \sqrt{2mE}$$

$$d.)\frac{k_0}{c} = \frac{k^s}{2mc^2}(1+\frac{E}{2mc^2})^{-1/2}$$

$$e.)\frac{1}{ck_0} = \frac{2m}{k^s}(1+\frac{E}{2mc^2})^{1/2}$$

Für alle $c^{-2} \in \mathbb{C}$ mit $|c^{-2}| \leq |c_0^{-2}| < \frac{2m}{E}$ gilt daher:

$$f.)|\frac{k}{c}| \leq k^s(1+\frac{E}{2m|c_0^2|})^{1/2}$$

$$g.)|\frac{k_0}{c}| \leq \frac{k^s}{2m|c_0^2|}(1-\frac{E}{2m|c_0^2|})^{-1/2}$$

$$h.)|\frac{1}{ck_0}| \leq \frac{2m}{k^s}(1+\frac{E}{2m|c_0^2|})^{1/2}$$

$$i.)|\frac{1}{ck_0}| + |\frac{k_0}{c}| + |c^{-2}| + 1 \leq: b_1(E,|c_0|)$$

$$j.)(1+|ck_0|) \leq: b_2(E,|c_0|)$$

$$k.)|\mathrm{Im}\frac{k}{c}| \leq k^s\frac{E}{2m|c_0^2|} \quad \text{folgt aus c.)} \tag{3.12}$$

$$l.)|h| := |h_1| + |h_2| \tag{3.13}$$

$$m.)|Dh| \leq (|d_{11}| + |d_{12}| + |d_{21}| + |d_{22}|)|h|$$

$$\text{wobei} \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man:

$$|\tilde{A}(x, y, E, c)h| \leq b_1 e^{(y-x)|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|}|h|$$

Definiert man:

$$Q(x) := \int_x^\infty dy |v(y)| e^{|y|(|\mathrm{Im}\frac{k}{c}| - \mathrm{Im}\frac{k}{c})} \tag{3.14}$$

so gilt:

$$Q(x) \leq: b_3 < \infty \tag{3.15}$$

$$\text{für alle } x \in \mathbb{R}, \quad \text{wenn} \quad 2|\mathrm{Im}\frac{k}{c}| \leq 2k^s \frac{E}{2m|c_0^2|} :\leq \beta < \alpha \tag{3.16}$$

(α nach (2.2)) ist.

Für g_n gilt:

$$|g_n| \leq b_2 \frac{1}{n!}[Q(x)b_1]^n e^{-x|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|} \tag{3.17}$$

Bew.:

Für $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} |g_1| &\leq \int_x^\infty b_1 e^{(y-x)|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|}|v(y)| b_2 e^{-y\mathrm{Im}\frac{k}{c}} dy \\ &\leq b_1 b_2 e^{-x|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|} \int_x^\infty |v(y)| e^{y(|\mathrm{Im}\frac{k}{c}| - \mathrm{Im}\frac{k}{c})} \\ &\leq b_1 b_2 e^{-x|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|} \int_x^\infty |v(y)| e^{|y|(|\mathrm{Im}\frac{k}{c}| - \mathrm{Im}\frac{k}{c})} \\ &= b_1 b_2 e^{-x|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|} Q(x) \end{aligned}$$

Für $n + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} |g_{n+1}| &\leq \int_x^\infty b_1 e^{(y-x)|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|}|v(y)||g_n(y)| dy \\ &\leq \int_x^\infty b_1 e^{(y-x)|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|}|v(y)| b_2 \frac{1}{n!}[Q(y)b_1]^n e^{-y|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|} dy \\ &\leq b_1^{n+1} b_2 e^{-x|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|} \frac{1}{n!} \int_x^\infty \underbrace{|v(y)| e^{|y|(|\mathrm{Im}\frac{k}{c}| - \mathrm{Im}\frac{k}{c})}}_{-\frac{dQ}{dy}} Q^n(y) dy \\ &= b_2 e^{-x|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|} b_1^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} Q^{n+1}(x) \end{aligned}$$

Der Faktor $e^{|y|(|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|-\mathrm{Im}\frac{k}{c})}$ ist ≥ 1 und kann daher in der vorletzten Zeile eingefügt werden.

Man erhält insgesamt folgende Abschätzung: $b := b_2 e^{b_1 b_3}$

$$
\begin{aligned}
|g_+(x,E,c) - g_0(x,E,c)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} b_2 \frac{1}{n!}[b_1 Q(x)]^n e^{-x|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|} \\
&= b_2 e^{-x|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|} e^{b_1 Q(x)} \\
&\leq b e^{-x|\mathrm{Im}\frac{k}{c}|}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Definiert man die Menge $M \subset \mathbb{C}$

$$
M := \left\{ z \in \mathbb{C} | z = c^{-2}, |z| \leq |c_0^{-2}| < \frac{2m}{E} \quad \text{und} \quad |z| \leq \frac{2m}{E} \frac{\beta}{2\sqrt{2mE}} \right\}
\tag{3.19}
$$

so gilt dann:

Ist $c^{-2} \in M$, dann konvergiert $g_+ = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$ gleichmäßig für alle $x \in N \subset \mathbb{R}$ und $c^{-2} \in M$, wobei N, M kompakt sind. Da die g_n holomorph in c^{-2} sind, ist auch die Summe holomorph in c^{-2}.

g_- und $\bar{g}_\pm$ (siehe Gleichung (3.22)) werden völlig analog behandelt. $\square$

Es werden nun zwei weitere als $\bar{f}_\pm$ bezeichnete Lösungen der Diracgleichung $(H^D - mc^2 \otimes 1) f_\pm = E f_\pm$ (im Distributionensinne) mit

$$
\bar{f}_\pm(x \to \pm\infty) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp k_0 \end{pmatrix} e^{\mp i \frac{k}{c} x}
$$

definiert:

$$
\bar{f}_\pm(x,E,c) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp k_0 \end{pmatrix} e^{\mp i \frac{k}{c} x} - \int_x^{\pm\infty} A(x,y,E,c) v(y) \bar{f}_\pm(y,E,c) dy \tag{3.20}
$$

$$
E \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}^+ \text{ oder } c^{-2} \in M
$$

Anmerkung: Für $E, c \in \mathbb{R}^+$ gewinnt man $\bar{f}_\pm$ mit folgender Konjugation K: $\bar{f}_\pm = K f_\pm$ wobei

$$Kh := \begin{pmatrix} h_1^* \\ -h_2^* \end{pmatrix} = \sigma_3 \begin{pmatrix} h_1^* \\ h_2^* \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Anmerkung: Diese Konjugation entspricht einem Zeitumkehroperator und ist antiunitär.

Analog zu Gleichung (3.6) ist $\bar{g}_\pm$ definiert:

$$\bar{g}_\pm := B(c)\bar{f}_\pm \tag{3.22}$$

Die Wronskideterminante ist definiert durch: $W(x, y) := x_1 y_2 - x_2 y_1$

Für die Wronskideterminante $W(g_\pm, \bar{g}_\pm)$ ergibt sich damit:

$$W(g_\pm, \bar{g}_\pm) = \mp 2ck_0 \neq 0 \tag{3.23}$$

$$E \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}^+ \text{ oder } c^{-2} \in M$$

d.h. $g_\pm$ und $\bar{g}_\pm$ sind zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung zum Wert E. Die Wronskideterminante ist als Funktion von x konstant.

Daher können $g_\pm(x, E, c)$ wie folgt als Linearkombinationen geschrieben werden:

$$g_\pm(x, E, c) = c_\mp(E, c) g_\mp(x, E, c) + d_\mp(E, c)\bar{g}_\mp(x, E, c) \tag{3.24}$$

Man berechnet:

$$W(g_-, g_+) = W(g_-, c_- g_- + d_- \bar{g}_-) = d_- W(g_-, \bar{g}_-) = d_- 2ck_0$$

Analog erhält man für die Koeffizienten $c_\mp(E, c), d_+(E, c)$:

$$\begin{aligned} d_+(E, c) = d_-(E, c) &= \frac{1}{2ck_0} W(g_-, g_+) \\ c_-(E, c) &= -\frac{1}{2ck_0} W(\bar{g}_-, g_+) \\ c_+(E, c) &= -\frac{1}{2ck_0} W(g_-, \bar{g}_+) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Es gilt nun das folgende Lemma.

Lemma 1:

$$\text{Definiere } W(E,c) := W(g_-(E,c), g_+(E,c)) \tag{3.26}$$

dann gilt:

(i) $W(E,c) \neq 0$ für $E \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}^+$ oder $c^{-2} \in M$.

(ii) $W(E,c)$ ist holomorph in c^{-2} um $c^{-2} = 0$.

Beweis:

(i): Mit der Identität:

$$W(a,b)W(c,d) = W(a,d)W(c,b) - W(a,c)W(d,b) \tag{3.27}$$

folgt:

$$\begin{aligned} & W(g_-, g_+)W(g_-, g_+)^* = -W(g_-, g_+)W(Kg_-, Kg_+) \\ & = -W(g_-, Kg_+)W(Kg_-, g_+) + W(g_-, Kg_-)W(Kg_+, g_+) \\ & = W(g_-, Kg_+)W(g_-, Kg_+)^* - W(g_-, Kg_-)W(g_+, Kg_+) \\ & = |W(g_-, Kg_+)|^2 + ((ck_0)^* + ck_0)^2 > 0 \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\text{wobei } W(g_\pm, Kg_\pm) = \mp((ck_0)^* + ck_0)e^{\pm ix(\frac{k}{c} - (\frac{k}{c})^*)} \text{ ist.}$$

Speziell für $c \in \mathbb{R}^+$ ergibt sich:

$$|W(g_-, g_+)|^2 = |W(g_-, \bar{g}_+)|^2 + 4(ck_0)^2 > 0 \tag{3.29}$$

(ii) Offensichtlich, da g_-, g_+ holomorph sind. □

3.3 Streutheorie

Die physikalischen Lösungen $\psi_\pm(x,E,c)$ von $(H^D - mc^2 \otimes 1)\psi_\pm = E\psi_\pm$ (im Distributionensinne) sind durch folgendes asymptotisches Verhalten gekennzeichnet:

$$\psi_+(x,E,c) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ k_0 \end{pmatrix} e^{i\frac{k}{c}x} + R^l(E,c) \begin{pmatrix} 1 \\ -k_0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{k}{c}x} & x \to -\infty \\ \\ T^l(E,c) \begin{pmatrix} 1 \\ k_0 \end{pmatrix} e^{i\frac{k}{c}x} & x \to \infty \end{cases} \tag{3.30}$$

und

$$\psi_-(x,E,c) = \begin{cases} T^r(E,c)\begin{pmatrix} 1 \\ -k_0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{k}{c}x} & x \to -\infty \\ \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -k_0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{k}{c}x} + R^r(E,c)\begin{pmatrix} 1 \\ k_0 \end{pmatrix} e^{i\frac{k}{c}x} & x \to \infty \end{cases} \tag{3.31}$$

Anmerkung:
Denkt man sich zum Beispiel bei ψ_+ die Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ dazu, so, sieht man, daß ψ_+ asymptotisch einer nach rechtslaufenden ebenen Welle mit einem nach links reflektierten Anteil R^l und einem nach rechts durchgelassenen Anteil T^l, entspricht, woraus sich die Bezeichnungen Transmissions- und Refflexionskoeffizienten für die Größen T und R erklären.

Die "on shell"-Streumatrix lautet daher:

$$S(E,c) = \begin{pmatrix} T^l(E,c) & R^r(E,c) \\ \\ R^l(E,c) & T^r(E,c) \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

Anmerkung:
Der Streuoperator S vertauscht mit dem Erzeugenden der freien Zeitentwicklung H_0^D (vgl. [2] Prop. 4.7) und kann daher in der Energiedarstellung als $S = \int_{\sigma(H_0^D)} S(E)dE$ dargestellt werden. Die Faser $S(E)$ heißt die "on shell"-Streumatrix. Diese kann mit Hilfe der allgemeinen Formel von Kuroda ([11] Theorem 6.3) direkt berechnet werden. Die entsprechende unitäre Transformation, die H_0^D diagonalisiert, ist in [17] gegeben. Einfache Rechnung ergibt völlige Übereinstimmung, mit den hier angeführten Formeln. Die allgemeine Theorie liefert die Existenz von $S(E)$ jedoch nur fast überall auf $\sigma(H_0^D)$.

Stellt man ψ_+ und ψ_- als Linearkombinationen von $f_\pm$ und $\bar{f}_\pm$ dar und errechnet die Koeffizienten durch Vergleich der Asymptotik, so erhält man:

$$R^l f_- + \bar{f}_- = T^l f_+$$
$$T^r f_- = R^r f_+ + \bar{f}_+$$

Damit ergibt sich für die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten:

$$T^l(E,c) = T^r(E,c) = \frac{1}{d_-(E,c)} = \frac{1}{d_+(E,c)} = \frac{2ck_0}{W(g_-,g_+)}$$

$$R^l(E,c) = \frac{c_-(E,c)}{d_-(E,c)} = -\frac{W(\bar{g}_-, g_+)}{W(g_-, g_+)} \tag{3.33}$$
$$R^r(E,c) = \frac{c_+(E,c)}{d_+(E,c)} = -\frac{W(g_-, \bar{g}_+)}{W(g_-, g_+)}$$

Anmerkung:
(a) Diese Koeffizienten sind wegen Lemma 1 wohldefiniert.
(b) Da diese Koeffizienten Quotienten von Wronskideterminanten sind, kürzt sich die Multiplikation der Jostlösungen $f_\pm$ mit $B(c)$ wieder heraus.

Für die Streumatrix $S(E,c)$ gilt nun:

Satz 3: Die Streumatrix $S(E,c)$ ist:

(i) unitär für $E, c \in \mathbb{R}^+$
(ii) $S(E,c)$ ist holomorph in c^{-2} um $c^{-2} = 0$.
(iii) Die Phasenverschiebung $\delta(E,c)$ ist gegeben durch:

$$e^{2i\delta(E,c)} := \det S(E,c) = \frac{T(E,c)}{T(E,c)^*} \tag{3.34}$$

und ist daher holomorph in c^{-2} um $c^{-2} = 0$.

Beweis:

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ unitär } \Leftrightarrow U^*U = UU^* = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |A|^2 + |C|^2 = 1 \\ |B|^2 + |D|^2 = 1 \\ A^*B + C^*D = 0 \end{cases}$$

$$(a) \quad |T|^2 + |R^l|^2 = \frac{4c^2k_0^2}{|W(g_-, g_+)|^2} + \frac{|W(\bar{g}_-, g_+)|^2}{|W(g_-, g_+)|^2} = 1$$

$$(b) \quad |T|^2 + |R^r|^2 = \frac{4c^2k_0^2}{|W(g_-, g_+)|^2} + \frac{|W(g_-, \bar{g}_+)|^2}{|W(g_-, g_+)|^2} = 1$$

$$(c) \quad T^*R^r + R^{*l}T = \frac{2ck_0}{W(g_-, g_+)^*}\frac{-W(g_-, \bar{g}_+)}{W(g_-, g_+)} + \frac{2ck_0}{W(g_-, g_+)}\frac{-W(\bar{g}_-, g_+)^*}{W(g_-, g_+)^*} = 0$$

wobei Gleichung (3.21) und (3.29) verwendet wurden.

(ii) und (iii) ergeben sich unmittelbar aus den Eigenschaften von $g_\pm$, $\bar{g}_\pm$ und

$$\det S = T^2 - R^r R^l = T^2 + \frac{T}{T^*} R^l R^{l*} = \frac{T}{T^*}(T^*T + R^l R^{l*}) = \frac{T}{T^*}$$

□

Die Berechnung der entsprechenden Wronskideterminanten, wobei man z.B. g_+ aus (3.8) an der Stelle $x = \pm\infty$ nimmt, liefert:

$$
\begin{aligned}
(i)W(g_-,g_+) &= 2ck_0 + i\int_{\mathbb{R}} dy v(y) e^{-i\frac{k}{c}y}(g_{+1} + \frac{k_0}{c} g_{+2}) \\
&= 2ck_0 + i\int_{\mathbb{R}} dy v(y) e^{i\frac{k}{c}y}(g_{-1} - \frac{k_0}{c} g_{-2}) \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

$$
(ii)W(g_-,\bar{g}_+) = i\int_{\mathbb{R}} dy v(y) e^{-i\frac{k}{c}y}(g_{-1} + \frac{k_0}{c} g_{-2}) \qquad (3.36)
$$

$$
(iii)W(\bar{g}_-,g_+) = i\int_{\mathbb{R}} dy v(y) e^{i\frac{k}{c}y}(g_{+1} - \frac{k_0}{c} g_{+2}) \qquad (3.37)
$$

Kapitel 4

Die Entwicklung der Streumatrix

Das Ziel des folgenden Kapitel ist die Entwicklung der Streumatrix $S(E,c)$ nach c^{-2}, d.h.

$$S(E,c) = \begin{pmatrix} T^l(E)^{(0)} & R^r(E)^{(0)} \\ \\ R^l(E)^{(0)} & T^r(E)^{(0)} \end{pmatrix} + \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} T^l(E)^{(1)} & R^r(E)^{(1)} \\ \\ R^l(E)^{(1)} & T^r(E)^{(1)} \end{pmatrix} + O(c^{-4})$$

wobei der Term 0-ter Ordnung die Schrödinger-Streumatrix ist.
Zu dieser Entwicklung benötigt man die Entwicklung der Jostlösungen.

4.1 Schrödinger-Jostlösungen

Für die Schrödinger-Jostlösungen $f^s_\pm$ vergleiche man [6] und die dort zitierte Literatur. Die Schrödinger-Jostlösungen $f^s_\pm$ von $(\frac{p^2}{2m} + V)f^s_\pm = Ef^s_\pm$ (im Distributionensinne) , mit

$$f^s_\pm(x \to \pm\infty) = e^{\pm ik^s x} =: f^s_{0\pm}$$
$$k^s = (2mE)^{1/2}, \qquad E \in \mathbb{R}^+$$

sind definiert als die eindeutigen Lösungen von

$$f^s_\pm = f^s_{0\pm} - \int_x^{\pm\infty} \frac{2m}{k^s} \sin k^s(x-y) v(y) f^s_\pm(y) dy \tag{4.1}$$

Definiert man den Operator:

$$(G^s_\pm h)(x) := \int_x^{\pm\infty} \frac{2m}{k^s} \sin k^s(x-y)h(y)dy \tag{4.2}$$

so lauten die Jostlösungen:

$$f^s_\pm = f^s_{0\pm} - G^s_\pm V f^s_\pm \tag{4.3}$$

Multipliziert man nun mit $v^{1/2}$, so erhält man eine Hilbertraumgleichung in $L^2(\mathbb{R})$:

$$(v^{1/2} f^s_\pm) = (v^{1/2} f^s_{0\pm}) - K^s_\pm (v^{1/2} f^s_\pm) \tag{4.4}$$

$$(v^{1/2} f^s_\pm) \in L^2(\mathbb{R})$$

wobei $K^s_\pm := v^{1/2} G^s_\pm |v|^{1/2}$ ist, und $v^{1/2} := |v|^{1/2} \mathrm{sgn}\ v$.

Diese Gleichung ist für alle Werte von $E \in \mathbb{R}^+$ lösbar, und man erhält:

$$v^{1/2} f^s_\pm = a_\pm v^{1/2} f^s_{0\pm} \tag{4.5}$$

wobei

$$a_\pm := (1 + v^{1/2} G^s_\pm |v|^{1/2})^{-1} \tag{4.6}$$

ist, und es gilt: (für $v > 0$)

$$a^*_+ = a_- \tag{4.7}$$

vgl.: [12]

4.2 Die Entwicklung der Jostlösungen

Die Operatoren $G_\pm$ seien definiert durch:

$$(G_\pm h)(x, E, c) := \int_x^{\pm\infty} A(x, y, E, c)h(y)dy, \ \text{(für } A \text{ vgl. (3.2))} \tag{4.8}$$

$$f_{0\pm}(x, E, c) := \begin{pmatrix} 1 \\ \pm k_0 \end{pmatrix} e^{\pm i \frac{k}{c} x} \tag{4.9}$$

Damit lauten die Jostlösungen $f_\pm$ (vgl. Gleichung (3.3):

$$f_\pm = f_{0\pm} - G_\pm V f_\pm \tag{4.10}$$

Multiplikation mit $B(c)$ und $v(x)^{1/2}$ ergibt nun eine Gleichung im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}, dx) \otimes \mathbb{C}^2$:

$$(v^{1/2}B(c)f_\pm) = (v^{1/2}B(c)f_{0\pm}) - K_\pm(v^{1/2}B(c)f_\pm) \tag{4.11}$$

$$(v^{1/2}B(c)f_\pm) \in L^2(\mathbb{R}, dx) \otimes \mathbb{C}^2$$

wobei $K_\pm := v^{1/2}B(c)G_\pm B(c)^{-1}|v|^{1/2}$ ist, und $v^{1/2} := |v|^{1/2}\text{sgn } v$.

Der Kern von $K_\pm$ ist $\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}^2$ und daher ist $K_\pm$ ein Hilbert-Schmidt-Operator.

Aus Satz 2 folgt die Existenz der Jostlösungen für alle Werte von $E \in \mathbb{R}^+$, und daher gilt für alle $E \in \mathbb{R}^+$:

$$(v^{1/2}B(c)f_\pm) = (1 + K_\pm)^{-1}(v^{1/2}B(c)f_{0\pm}) \tag{4.12}$$

Man definiert nun die folgenden Operatoren $A_{k\pm}$:

$$E, m \in \mathbb{R}^+, \quad c^{-2} \in M$$

$$\begin{aligned} A_{k\pm} \quad := \quad & v^{1/2} \begin{pmatrix} G^s_\pm & 0 \\ \frac{p}{2m}G^s_\pm & 0 \end{pmatrix} |v|^{1/2} + \\ + \quad & \sum_{n=0}^{k} (\frac{1}{2mc^2})^{n+1} v^{1/2} \begin{pmatrix} E^{2n+1}\frac{p^2}{2m}G^{s^{n+2}}_\pm & E^{2n}pG^{s^{n+1}}_\pm \\ E^{2n+2}\frac{p}{2m}G^{s^{n+2}}_\pm & E^{2n+1}G^{s^{n+1}}_\pm \end{pmatrix} |v|^{1/2} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Lemma 2 : $A_{k\pm}$ ist auf $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ definiert und beschränkt. Für $c^{-2} \in M$ gilt:

$$n - \lim_{k\to\infty} A_{k\pm} =: A_\pm \tag{4.14}$$

existiert.

Beweis: erfolgt für A_{k+}; (A_{k-} geht analog)

Es werden dabei folgende Ungleichungen verwendet:

$$|\int f(x)dx| \leq \int |f(x)|dx$$
$$|< f,g >| \leq ||f||\ ||g||$$

Abschätzung der Norm des Operators A_{k+} :

$$||v^{1/2}G_+^{s^n}|v|^{1/2}h_i||^2 = \qquad n \in \mathbb{N},\ i = 1,2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx|v(x)|\Big|\int_x^{\infty} \frac{2m}{k^s}\sin k^s(x-x')dx' \ldots$$

$$\ldots \int_{x^{(n-1)}}^{\infty} \frac{2m}{k^s}\sin k^s(x^{(n-1)} - x^{(n)})|v(x^{(n)})|^{1/2}h_i(x^{(n)})dx^{(n)}\Big|^2$$

$$\leq (\frac{2m}{k^s})^{2n}\int_{-\infty}^{\infty} dx|v(x)|\Big\{\int_x^{\infty} dx' \ldots \int_{x^{(n-1)}}^{\infty} |v(x^{(n)})|^{1/2}|h_i(x^{(n)})|dx^{(n)}\Big\}^2$$

$$\leq (\frac{2m}{k^s})^{2n}\int_{-\infty}^{\infty} dx|v(x)|\Big\{\int_x^{\infty} dx' \ldots \Big(\int_{x^{(n-1)}}^{\infty} |v(x^{(n)})|dx^{(n)}\Big)^{1/2}\Big(\int_{x^{(n-1)}}^{\infty} |h_i(x^{(n)})|^2dx^{(n)}\Big)^{1/2}\Big\}^2$$

$$\leq (\frac{2m}{k^s})^{2n}||h_i||^2\int_{-\infty}^{\infty} dx|v(x)|\Big\{\int_x^{\infty} dx' \int_{x'}^{\infty} dx'' \ldots \Big(\int_{x^{(n-1)}}^{\infty} |v(x^{(n)})|dx^{(n)}\Big)^{1/2}\Big\}^2$$

Voraussetzung für die Abschätzung: $ve^{\alpha|x|} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$$\leq (\frac{2m}{k^s})^{2n}||h_i||^2\int_{-\infty}^{\infty} dx|v(x)|\Big\{\int_x^{\infty} dx' \ldots \Big(\int_{x^{(n-1)}}^{\infty} |v(x^{(n)})|e^{\alpha x^{(n)}-\alpha x^{(n)}}dx^{(n)}\Big)^{1/2}\Big\}^2$$

$$\leq (\frac{2m}{k^s})^{2n}||h_i||^2\int_{-\infty}^{\infty} dx|v(x)|\Big\{\int_x^{\infty} dx' \ldots \Big[\underbrace{\Big(\int_{x^{(n-1)}}^{\infty} |v(x^{(n)})|^2e^{2\alpha x^{(n)}}dx^{(n)}\Big)}_{\leq:c_3}{}^{1/2} \times$$

$$\times\Big(\int_{x^{(n-1)}}^{\infty} e^{-2\alpha x^{(n)}}dx^{(n)}\Big)^{1/2}\Big]^{1/2}\Big\}^2$$

$$\leq (\frac{2m}{k^s})^{2n}||h_i||^2c_3(\frac{1}{2\alpha})^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dx|v(x)|\Big\{\int_x^{\infty} dx' \ldots \int_{x^{(n-2)}}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}x^{(n-1)}}dx^{(n)}\Big\}^2$$

$$\leq konst\ (\frac{2m}{k^s}\frac{2}{\alpha})^{2n}||h_i||^2$$

Man erhält daher insgesamt:

$$||v^{1/2}p^lG_+^{s^n}|v|^{1/2}h_i|| \leq konst\ (\frac{2m}{k^s}\frac{2}{\alpha})^n||h_i||$$

$$i = 1,2 \quad l = 0,1,2; \quad n \geq 1$$

wenn man berücksichtigt:
Für $l = 1$ wird der erste Term, $\sin k^s(x-x')$, zu $k^s \cos k^s(x-x')$, und für $l = 2$ erhält man zwei Terme; d.h.: die Abschätzung erfolgt analog zum Fall $l = 0$, nur die Konstanten ändern sich.

Die Norm des Operators A_{k+} kann nun durch eine geometrische Reihe abgeschätzt werden. Konvergenz liegt vor, wenn

$$\frac{1}{|2mc^2|}E^2\left(\frac{2m}{k^s}\frac{2}{\alpha}\right) < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|c^2|} < \frac{2m}{E}\frac{\alpha}{2k^s} \tag{4.15}$$

d.h. $c^{-2} \in M$ (vgl. Beweis von Satz 2) $\quad \square$

$A_\pm$ ist beschränkt und hat die Struktur: $C + c^{-2}D(c)$, wobei C Hilbert-Schmidtsch und D beschränkt ist. Da die Schrödinger-Jostlösungen $f^s_\pm$ für alle Werte von $E \in \mathbb{R}^+$ existieren, gilt auch $\{-1\} \notin \sigma(C)$. C ist der $a_\pm$ entsprechende Operator für den Schrödingerfall, wenn man $f^s_\pm$ als $(f^s_\pm \;\; \frac{p}{2m}f^s_\pm)^T$ in $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ schreibt.

Man betrachtet nun folgende Hilbertraumgleichung in $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$:

$$m_\pm = v^{1/2}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm ck_0 \end{pmatrix} e^{\pm i\frac{k}{c}x} - A_\pm m_\pm$$

$$\Rightarrow m_\pm = (1 + A_\pm)^{-1}v^{1/2}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm ck_0 \end{pmatrix} e^{\pm i\frac{k}{c}x} \tag{4.16}$$

gilt für alle $E \in \mathbb{R}^+$ wenn c^{-2} in einer Umgebung von $c^{-2} = 0$ ist.

Definition: $\mathrm{H}_{-\alpha} = L^2(\mathbb{R}, e^{-\alpha|x|}dx)$

Nun definiert man folgende Funktionen $n_\pm \in \mathrm{H}_{-\alpha} \otimes \mathbb{C}^2$:

$$n_\pm = \begin{cases} v^{-1/2}B(c)^{-1}m_\pm & x:\; v(x) \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ \pm k_0 \end{pmatrix} e^{\pm i\frac{k}{c}x} & x:\; v(x) = 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

Lemma 3 : $n_\pm$ erfüllen die Dirac-Differentialgleichung mit Abzug der Ruhemasse mit denselben Randbedingungen wie $f_\pm$
und es gilt daher $n_\pm = f_\pm$.

Beweis:

$$m_\pm \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$$

$$v^{-1/2} : L^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{H}_{-\alpha}$$

$$\mathrm{D}(v^{-1/2}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | v^{-1/2} f \in \mathrm{H}_{-\alpha}\}$$

(a) Beh.: $|n_\pm| \leq konst\ e^{\frac{\beta}{2}|x|}$

Bew.: für $n_\pm$ gilt:

$$B(c)n_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm c k_0 \end{pmatrix} e^{\pm i \frac{k}{c} x} - v^{-1/2} A_\pm m_\pm$$

$$\Big| B(c)n_\pm - \begin{pmatrix} 1 \\ \pm c k_0 \end{pmatrix} \underbrace{e^{\pm i \frac{k}{c} x}}_{\leq e^{\frac{\beta}{2}|x|}} \Big| \leq |v^{-1/2} A_\pm m_\pm|, \ \beta \text{ nach } (3.16) \tag{4.18}$$

Abschätzung der Glieder: $p^l G_+^{s^n} |v|^{1/2} m_{+i} \quad l = 0,1,2; \quad n \in \mathbb{N}; \quad i = 1,2$

Für $l = 0, n = 1$, gilt:

$$|G_+^s |v|^{1/2} m_{+i}| = |\int_x^\infty \frac{2m}{k^s} \sin k^s (x-y) |v(y)|^{1/2} m_{+i}(y) dy|$$

$$\leq \frac{2m}{k^s} \int_x^\infty |v(y)|^{1/2} |m_{+i}(y)| dy \leq \frac{2m}{k^s} ||m_{+i}|| \left(\int_x^\infty |v(y)| dy \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{2m}{k^s} ||m_{+i}|| \Big(\int_x^\infty |v(y)|^2 e^{2\alpha|y|} dy \Big)^{1/4} \Big(\int_x^\infty e^{-2\alpha|y|} dy \Big)^{1/4}$$

$$x > 0 : \ \leq const\ \frac{2m}{k^s} ||m_{+i}|| e^{-\frac{\beta}{2} x}$$

$$x < 0 : \ \leq const\ \frac{2m}{k^s} ||m_{+i}||$$

Für $l = 0, n > 1$ gilt:

$$|G_+^{s^n} |v|^{1/2} m_{+i}| =$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big|\int_x^\infty \frac{2m}{k^s}\sin k^s(x-x')dx' \ldots \\
&\quad \ldots \int_{x^{(n-1)}}^\infty \frac{2m}{k^s}\sin k^s(x^{(n-1)}-x^{(n)})|v(x^{(n)})|^{1/2}m_{+i}(x^{(n)})dx^{(n)}\Big| \\
&\le (\frac{2m}{k^s})^n||m_{+i}||\int_x^\infty dx' \ldots (\int_{x^{(n-1)}}^\infty |v(x^{(n)})|dx^{(n)})^{1/2} \\
&\le const||m_{+i}||(\frac{2m}{k^s})^n\int_x^\infty dx' \ldots \Big(\int_{x^{(n-1)}}^\infty e^{-2\alpha|x^{(n)}|}dx^{(n)}\Big)^{1/4}
\end{aligned}
$$

ergibt für $x > 0$:

$$
\le const||m_{+i}||(\frac{2m}{k^s})^n e^{-\frac{\alpha}{2}x}(\frac{2}{\alpha})^n
$$

ergibt für $x < 0$:

$$
\begin{aligned}
&\le const||m_{+i}||(\frac{2m}{k^s})^n\Big[\underbrace{(\frac{1}{2\alpha})^{1/4}(\frac{2}{\alpha})^{n-1}}_{d_0}+\int_x^0 dx'\Big(\int_{x'}^0 dx''[\ldots]+\underbrace{\int_0^\infty dx''[\ldots]}_{d_1}\Big)\Big] \\
&\le const||m_{+i}||(\frac{2m}{k^s})^n(\frac{2}{\alpha})^n\Big(\sum_{j=0}^{n-1}c_j|x|^j\Big)
\end{aligned}
$$

$c_j,\ d_j \ge 0,\quad$ und konstant , $\quad j \in \mathbb{N}$

Man sieht: Für $x \ge 0$ fallen die Ausdrücke für alle n exponentiell ab, für $x \le 0$ steigen sie mit der $(n-1)$-ten Potenz von $|x|$ an und können daher exponentiell abgeschätzt werden.

Allgemein gilt:

$$
|p^l G_\pm^{s^n}|v|^{1/2}m_{\pm i}| \le konst\ (\frac{2m}{k^s}\frac{2}{\alpha})^n e^{\pm\frac{\beta}{2}x}
$$

Für $c^{-2} \in M$ konvergiert auch die Summe über alle n und daraus folgt, daß der rechte Term in Gleichung (4.18) kleiner als $const\ e^{\mp\frac{\beta}{2}x}$ ist, und es gilt daher:

$$\Big|B(c)n_\pm - \begin{pmatrix} 1 \\ \pm ck_0 \end{pmatrix} \underbrace{e^{\pm i\frac{k}{c}x}}_{\le e^{\frac{\beta}{2}|x|}}\Big| \le const\ e^{\mp\frac{\beta}{2}x}$$

d.h.: $n_\pm$ erfüllen dieselben Randbedingungen wie $f_\pm$, und

$$|n_\pm| \le const\ e^{\frac{\beta}{2}|x|}$$

(b) Beh.: $p^l G_\pm^{s^n}|v|^{1/2}m_{\pm i} \in \mathrm{H}_{-\alpha}$

d.h.: $v^{1/2}p^l G_\pm^{s^n}|v|^{1/2}m_{\pm i} \in \mathrm{D}(v^{-1/2})$

Bew.:
$||p^l G_\pm^{s^n}|v|^{1/2}m_{\pm i}||^2_{\mathrm{H}_{-\alpha}}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha|x|}|p^l G_\pm^{s^n}|v|^{1/2}m_{\pm i}|^2 \le konst \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha|x|}e^{\beta|x|} < \infty$$

(c) Um die Summation Σ mit $v^{-1/2}$ vertauschen zu können, muß man zeigen, daß die Terme mit $\Sigma v^{-1/2}(\ldots)$ auch konvergieren und die Summe in $\mathrm{H}_{-\alpha}$ ist. Auch dies folgt unmittelbar aus (a) für $c^{-2} \in M$.

(d) Weiters gilt auch: für $n \in \mathbb{N}_0,\ i = 1, 2$

$$(\frac{p^2}{2m} - E)G_\pm^{s^{n+1}}|v|^{1/2}m_{\pm i} = G_\pm^{s^n}|v|^{1/2}m_{\pm i}$$

Bew.: folgt aus (b) und expliziter Berechnung, da $G_\pm^{s^{n+1}}|v|^{1/2}m_{\pm i} \in \mathrm{D}(p^2)$.

Man setzt nun $n_\pm$ in die Differentialgleichung $(H_0^D - (E+mc^2)\otimes 1)n_\pm = -vn_\pm$ ein:

(i) für x mit $v(x) = 0$ erfüllt $n_\pm$ die Differentialgleichung offensichtlich;

(ii) für x mit $v(x) \neq 0$ erhält man :

$$B(c)^{-1}B(c)\begin{pmatrix} -E & cp \\ cp & -(E+2mc^2) \end{pmatrix} n_\pm = B(c)^{-1}\begin{pmatrix} -E & p \\ c^2p & -(E+2mc^2) \end{pmatrix} v^{-1/2}m_\pm$$

$$= B(c)^{-1}\begin{pmatrix} -E & p \\ c^2p & -(E+2mc^2) \end{pmatrix}\Big\{\begin{pmatrix} 1 \\ \pm ck_0 \end{pmatrix} e^{\pm i\frac{k}{c}x} - v^{-1/2}A_\pm m_\pm\Big\}$$

$$= -B(c)^{-1}\begin{pmatrix} -E & p \\ c^2p & -(E+2mc^2) \end{pmatrix} v^{-1/2}A_\pm m_\pm$$

$$= -B(c)^{-1}\begin{pmatrix} -E & p \\ c^2p & -(E+2mc^2) \end{pmatrix} v^{-1/2}\Big\{v^{1/2}\begin{pmatrix} G^s_\pm & 0 \\ \frac{p}{2m}G^s_\pm & 0 \end{pmatrix}|v|^{1/2} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2mc^2})^{n+1}v^{1/2}\begin{pmatrix} E^{2n+1}\frac{p^2}{2m}G^{s^{n+2}}_\pm & E^{2n}pG^{s^{n+1}}_\pm \\ E^{2n+2}\frac{p}{2m}G^{s^{n+2}}_\pm & E^{2n+1}G^{s^{n+1}}_\pm \end{pmatrix}|v|^{1/2}\Big\}m_\pm$$

$$= -B(c)^{-1}\begin{pmatrix} -E & p \\ c^2p & -(E+2mc^2) \end{pmatrix} v^{-1/2}\Big\{\begin{pmatrix} v^{1/2}G^s_\pm|v|^{1/2}m_{\pm1} \\ v^{1/2}\frac{p}{2m}G^s_\pm|v|^{1/2}m_{\pm1} \end{pmatrix} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2mc^2})^{n+1}\begin{pmatrix} v^{1/2}E^{2n+1}\frac{p^2}{2m}G^{s^{n+2}}_\pm|v|^{1/2}m_{\pm1} + v^{1/2}E^{2n}pG^{s^{n+1}}_\pm|v|^{1/2}m_{\pm2} \\ v^{1/2}E^{2n+2}\frac{p}{2m}G^{s^{n+2}}_\pm|v|^{1/2}m_{\pm1} + v^{1/2}E^{2n+1}G^{s^{n+1}}_\pm|v|^{1/2}m_{\pm2} \end{pmatrix}\Big\} = (*)$$

Die erste Zeile lautet:

$$-1\Big\{-EG^s_\pm|v|^{1/2}m_{\pm1} + p\frac{p}{2m}G^s_\pm|v|^{1/2}m_{\pm1} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2mc^2})^{n+1}\Big[-E^{2n+2}\frac{p^2}{2m}G^{s^{n+2}}_\pm|v|^{1/2}m_{\pm1} - E^{2n+1}pG^{s^{n+1}}_\pm|v|^{1/2}m_{\pm2}$$

$$+pE^{2n+2}\frac{p}{2m}G^{s^{n+2}}_\pm|v|^{1/2}m_{\pm1} + pE^{2n+1}G^{s^{n+1}}_\pm|v|^{1/2}m_{\pm2}\Big]\Big\}$$

$$= -(\frac{p^2}{2m} - E)G^s_\pm|v|^{1/2}m_{\pm1} = -|v|^{1/2}m_{\pm1}$$

Die zweite Zeile lautet:

$$-c^{-1}\Big\{c^2pG^s_\pm|v|^{1/2}m_{\pm1} - (E+2mc^2)\frac{p}{2m}G^s_\pm|v|^{1/2}m_{\pm1} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2mc^2})^{n+1}\Big[c^2pE^{2n+1}\frac{p^2}{2m}G_{\pm}^{s^{n+2}}|v|^{1/2}m_{\pm1}+c^2pE^{2n}pG_{\pm}^{s^{n+1}}|v|^{1/2}m_{\pm2}-$$

$$-(E+2mc^2)E^{2n+2}\frac{p}{2m}G_{\pm}^{s^{n+2}}|v|^{1/2}m_{\pm1}-(E+2mc^2)E^{2n+1}G_{\pm}^{s^{n+1}}|v|^{1/2}m_{\pm2}\Big]\Big\}$$

$$=-c^{-1}\Big\{-E\frac{p}{2m}G_{\pm}^{s}|v|^{1/2}m_{\pm1}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2mc^2})^{n+1}\Big[c^2pE^{2n+1}(\frac{p^2}{2m}-E+E)G_{\pm}^{s^{n+2}}|v|^{1/2}m_{\pm1}+$$

$$+2mc^2E^{2n}(\frac{p^2}{2m}-E+E)G_{\pm}^{s^{n+1}}|v|^{1/2}m_{\pm2}-$$

$$-(E+2mc^2)E^{2n+2}\frac{p}{2m}G_{\pm}^{s^{n+2}}|v|^{1/2}m_{\pm1}-(E+2mc^2)E^{2n+1}G_{\pm}^{s^{n+1}}|v|^{1/2}m_{\pm2}\Big]\Big\}$$

$$=-c^{-1}\Big\{-E\frac{p}{2m}G_{\pm}^{s}|v|^{1/2}m_{\pm1}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2mc^2})^{n+1}\Big[2mc^2E^{2n+1}\frac{p}{2m}G_{\pm}^{s^{n+1}}|v|^{1/2}m_{\pm1}+2mc^2E^{2n}G_{\pm}^{s^{n}}|v|^{1/2}m_{\pm2}$$

$$-E^{2n+3}\frac{p}{2m}G_{\pm}^{s^{n+2}}|v|^{1/2}m_{\pm1}-E^{2n+2}G_{\pm}^{s^{n+1}}|v|^{1/2}m_{\pm2}\Big]\Big\}$$

$$=-c^{-1}|v|^{1/2}m_{\pm2}$$

Man erhält daher:

$$(*)=-B(c)^{-1}\begin{pmatrix}|v|^{1/2}m_{\pm1}\\ |v|^{1/2}m_{\pm2}\end{pmatrix}=-vn_{\pm}$$

d.h.: $n_{\pm}$ erfüllt die Diracgleichung. $\square$

Daraus folgt, daß $m_{\pm}=v^{1/2}B(c)f_{\pm}$ ist.

Berücksichtigt man nun folgende Entwicklungen:

$$(ck_0)^{-1}=\frac{2m}{k^s}\left(1+\frac{1}{c^2}\frac{k^{s^2}}{8m^2}+O(c^{-4})\right) \tag{4.19}$$

$$B(c)f_{0\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm ck_0 \end{pmatrix} e^{\pm i\frac{k}{c}x} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\frac{k^s}{2m} \end{pmatrix} f_{0\pm}^s + \frac{1}{c^2}\frac{{k^s}^3}{8m^2} \begin{pmatrix} \pm iX \\ iX\frac{k^s}{2m} \mp \frac{1}{2m} \end{pmatrix} f_{0\pm}^s + O(c^{-4}) \quad (4.20)$$

$$B(c)^{-1}f_{0\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f_{0\pm}^s + \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \pm iX\frac{{k^s}^3}{8m^2} \\ \pm\frac{k^s}{2m} \end{pmatrix} f_{0\pm}^s + O(c^{-4}) \quad (4.21)$$

wobei X der Ortsoperator in $\mathrm{H}_{-\alpha}$ und $f_{0\pm}^s = e^{\pm ik^s x}$ ist, so erhält man für die Entwicklung der Jostlösungen $(v^{1/2}B(c)f_\pm)$ aus (4.12) und (4.16):

$$[1+K_\pm]^{-1}v^{1/2}B(c)f_\pm = \left[1 + v^{1/2}B(c)G_\pm B(c)^{-1}|v|^{1/2}\right]^{-1}(v^{1/2}B(c)f_{0\pm})$$

$$= \Bigg[1 + v^{1/2}\begin{pmatrix} G_\pm^s & 0 \\ \frac{p}{2m}G_\pm^s & 0 \end{pmatrix}|v|^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{c^2}v^{1/2}\begin{pmatrix} E\frac{p^2}{4m^2}{G_\pm^s}^2 & \frac{p}{2m}G_\pm^s \\ E^2\frac{p}{4m^2}{G_\pm^s}^2 & \frac{E}{2m}G_\pm^s \end{pmatrix}|v|^{1/2} + O(c^{-4})\Bigg]^{-1}(v^{1/2}B(c)f_{0\pm})$$

$$= \left(1 + v^{1/2}\begin{pmatrix} G_\pm^s & 0 \\ \frac{p}{2m}G_\pm^s & 0 \end{pmatrix}|v|^{1/2}\right)^{-1} \times$$

$$\times\Bigg\{1 + \frac{1}{c^2}v^{1/2}\begin{pmatrix} E\frac{p^2}{4m^2}{G_\pm^s}^2 & \frac{p}{2m}G_\pm^s \\ E^2\frac{p}{4m^2}{G_\pm^s}^2 & \frac{E}{2m}G_\pm^s \end{pmatrix}|v|^{1/2} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1 + v^{1/2}G_\pm^s|v|^{1/2} & 0 \\ v^{1/2}\frac{p}{2m}G_\pm^s|v|^{1/2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} + O(c^{-4})\Bigg\}^{-1}(v^{1/2}B(c)f_{0\pm});$$

mit der Abkürzung: $a_\pm = (1 + v^{1/2}G_\pm^s|v|^{1/2})^{-1}$ folgt:

$$= \begin{pmatrix} a_\pm & 0 \\ -v^{1/2}\frac{p}{2m}G_\pm^s|v|^{1/2}a_\pm & 1 \end{pmatrix}(v^{1/2}B(c)f_{0\pm})$$

$$-\frac{1}{c^2} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} (v^{1/2}B(c)f_{0\pm}) + O(c^{-4}),$$

wobei

$$b_{11} = a_\pm v^{1/2} E \frac{p^2}{4m^2} G_\pm^{s^2} |v|^{1/2} a_\pm - a_\pm v^{1/2} \frac{p}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2} v^{1/2} \frac{p}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2} a_\pm$$

$$b_{12} = a_\pm v^{1/2} \frac{p}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2}$$

$$b_{21} = -v^{1/2} \frac{p}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2} a_\pm v^{1/2} E \frac{p^2}{4m^2} G_\pm^{s^2} |v|^{1/2} a_\pm +$$

$$+ v^{1/2} \frac{p}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2} a_\pm v^{1/2} \frac{p}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2} v^{1/2} \frac{p}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2} a_\pm +$$

$$+ v^{1/2} E^2 \frac{p}{4m^2} G_\pm^{s^2} |v|^{1/2} a_\pm - v^{1/2} \frac{E}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2} v^{1/2} \frac{p}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2} a_\pm$$

$$b_{22} = -v^{1/2} \frac{p}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2} a_\pm v^{1/2} \frac{p}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2} + v^{1/2} \frac{E}{2m} G_\pm^s |v|^{1/2} \qquad (4.22)$$

4.3 Die Entwicklung des Transmissionskoeffizienten $T = T^l = T^r$

Man verwendet Gleichung (3.35) und formt sie in ein Skalarprodukt im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ um. Man erhält damit:

$$\frac{1}{T} = \frac{W(g_-, g_+)}{2ck_0} = 1 - \frac{1}{2ick_0} \int_{\mathbb{R}} dy v(y) e^{-i\frac{k}{c}y} (g_{+1} + \frac{k_0}{c} g_{+2})$$

$$= 1 - \frac{1}{2ick_0} < |v|^{1/2} B(c)^{-1} f_{0+}, v^{1/2} B(c) f_+ >$$

$$= 1 - \frac{1}{2ick_0} < \underbrace{|v|^{1/2} B(c)^{-1} f_{0+}}_{:=h_{0+}}, (1 + K_+)^{-1} \underbrace{v^{1/2} B(c) f_{0+}}_{:=g_{0+}} > \qquad (4.23)$$

Die Entwicklung dieser Gleichung, wobei T als Funktion von c^{-2} entwickelt wird, nach c^{-2} ergibt nun:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{T^{(0)}} - \frac{1}{c^2}\frac{T^{(1)}}{T^{(0)2}} + O(c^{-4}) \\
= \; & 1 - \frac{1}{2ick_0^{(0)}} < h_{0+}^{(0)}, (1+K_+)^{-1,(0)} g_{0+}^{(0)} > \\
- \; & \frac{1}{c^2}\Big\{ \frac{1}{2ick_0^{(1)}} < h_{0+}^{(0)}, (1+K_+)^{-1,(0)} g_{0+}^{(0)} > \\
& + \frac{1}{2ick_0^{(0)}} < h_{0+}^{(1)}, (1+K_+)^{-1,(0)} g_{0+}^{(0)} > \\
& + \frac{1}{2ick_0^{(0)}} < h_{0+}^{(0)}, (1+K_+)^{-1,(1)} g_{0+}^{(0)} > \\
& + \frac{1}{2ick_0^{(0)}} < h_{0+}^{(0)}, (1+K_+)^{-1,(0)} g_{0+}^{(1)} > \Big\} + O(c^{-4}) \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Der Index $^{()}$ bezeichnet die Ordnung der Entwicklung. Nun erfolgt die Berechnung dieser Ausdrücke:

Term 1:

$$
\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{2ick_0^{(0)}} < h_{0+}^{(0)}, (1+K_+)^{-1,(0)} g_{0+}^{(0)} > \\
&= 1 - \frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2} f_{0+}^s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_+ & 0 \\ -v^{1/2}\frac{p}{2m} G_+^s |v|^{1/2} a_+ & 1 \end{pmatrix} v^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k^s}{2m} \end{pmatrix} f_{0+}^s > \\
&= 1 - \frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2} f_{0+}^s, a_+ v^{1/2} f_{0+}^s > \\
&= 1 - \frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2} f_{0+}^s, v^{1/2} f_{+}^s > \\
&= \frac{1}{T^{(0)}} = \frac{1}{T^s}
\end{aligned}
$$

Anmerkung: f_+^s ist die Schrödinger-Jostlösung und daher ist $T^{(0)} = T^s$, dem Transmissionskoeffizienten für den Schrödingerfall.

Term 2:

$$\frac{1}{2ick_0^{(1)}} < h_{0+}^{(0)}, (1+K_+)^{-1,(0)} g_{0+}^{(0)} >$$

$$= \frac{k^{s^2}}{8m^2} \frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2} f_{0+}^s, v^{1/2} f_+^s >$$

$$= \frac{k^{s^2}}{8m^2} (1 - \frac{1}{T^{(0)}})$$

Term 3:

$$\frac{1}{2ick_0^{(0)}} < h_{0+}^{(1)}, (1+K_+)^{-1,(0)} g_{0+}^{(0)} >$$

$$= \frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2} f_{0+}^s \begin{pmatrix} iX\frac{k^{s^3}}{8m^2} \\ \\ \frac{k^s}{2m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_+ & 0 \\ \\ -v^{1/2}\frac{p}{2m} G_+^s |v|^{1/2} a_+ & 1 \end{pmatrix} v^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{k^s}{2m} \end{pmatrix} f_{0+}^s >$$

$$= \frac{2m}{2ik^s} \frac{-ik^{s^3}}{8m^2} < |v|^{1/2} X f_{0+}^s, a_+ v^{1/2} f_{0+}^s >$$

$$+ \frac{2m}{2ik^s} \frac{k^s}{2m} < |v|^{1/2} f_{0+}^s, -v^{1/2} \frac{p}{2m} G_+^s |v|^{1/2} a_+ v^{1/2} f_{0+}^s >$$

$$+ \frac{2m}{2ik^s} (\frac{k^s}{2m})^2 < |v|^{1/2} f_{0+}^s, v^{1/2} f_{0+}^s >$$

$$= \frac{-k^{s^2}}{8m} < |v|^{1/2} X f_{0+}^s, v^{1/2} f_+^s >$$

$$- \frac{1}{4im} < |v|^{1/2} f_{0+}^s, v^{1/2} p \underbrace{G_+^s |v|^{1/2} v^{1/2} f_+^s}_{= f_{0+}^s - f_+^s, \text{ vgl. (4.3)}} >$$

$$+ \frac{k^s}{4im} < |v|^{1/2} f_{0+}^s, v^{1/2} f_{0+}^s >$$

$$= \frac{-k^{s^2}}{8m} < |v|^{1/2} X f_{0+}^s, v^{1/2} f_+^s >$$

$$+\frac{1}{4im} < |v|^{1/2} f^s_{0+}, v^{1/2} p f^s_+ >$$

Term 4:

$$\frac{1}{2ick_0^{(0)}} < h^{(0)}_{0+}, (1+K_+)^{-1,(1)} g^{(0)}_{0+} >$$

$$= \frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2} f^s_{0+} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k^s}{2m} \end{pmatrix} v^{1/2} f^s_{0+} >$$

für b_{ik} vergleiche man mit Gleichung (4.22)

$$= -\frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2} f^s_{0+}, a_+ v^{1/2} E \frac{p^2}{4m^2} G^{s^2}_+ |v|^{1/2} a_+ v^{1/2} f^s_{0+} >$$

$$+\frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2} f^s_{0+}, a_+ v^{1/2} \frac{p}{2m} G^s_+ |v|^{1/2} v^{1/2} \frac{p}{2m} G^s_+ |v|^{1/2} a_+ v^{1/2} f^s_{0+} >$$

$$-\frac{2m}{2ik^s} \frac{k^s}{2m} < |v|^{1/2} f^s_{0+}, a_+ v^{1/2} \frac{p}{2m} G^s_+ |v|^{1/2} v^{1/2} f^s_{0+} >$$

$$= -\frac{2m}{2ik^s} < a^*_+ |v|^{1/2} \bar{f}^s_{0-}, v^{1/2} E \frac{p^2}{4m^2} G^{s^2}_+ |v|^{1/2} v^{1/2} f^s_+ >$$

$$+\frac{1}{2ik^s} < |v|^{1/2} \bar{f}^s_-, v^{1/2} \frac{p}{2m} G^s_+ |v|^{1/2} v^{1/2} p G^s_+ |v|^{1/2} v^{1/2} f^s_+ >$$

$$-\frac{1}{2i} < |v|^{1/2} \bar{f}^s_-, v^{1/2} \frac{p}{2m} G^s_+ |v|^{1/2} v^{1/2} f^s_{0+} >$$

mit $p(G^s_+ V f^s_+) = p(f^s_{0+} - f^s_+) = k^s f^s_{0+} - p f^s_+$ folgt:

$$= -\frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2} \bar{f}^s_-, v^{1/2} E \frac{p^2}{4m^2} G^{s^2}_+ |v|^{1/2} v^{1/2} f^s_+ >$$

$$-\frac{1}{2ik^s} < |v|^{1/2} \bar{f}^s_-, v^{1/2} \frac{p}{2m} G^s_+ |v|^{1/2} v^{1/2} p f^s_+ >$$

$$= -\frac{2m}{2ik^s} \frac{k^{s^2}}{8m^3} < |v|^{1/2} \bar{f}^s_-, [v^{1/2} p^2 G^{s^2}_+ |v|^{1/2}] v^{1/2} f^s_+ >$$

$$-\frac{1}{2ik^s}\frac{1}{2m} < |v|^{1/2}\bar{f}^s_-, [v^{1/2}pG^s_+|v|^{1/2}]v^{1/2}pf^s_+ >$$

$$= -\frac{k^s}{8im^2} < |v|^{1/2}\bar{f}^s_-, [v^{1/2}p^2G^{s^2}_+|v|^{1/2}]v^{1/2}f^s_+ >$$

$$-\frac{1}{4im} < |v|^{1/2}f^s_{0+}, v^{1/2}pf^s_+ >$$

$$+\frac{1}{4imk^s} < |v|^{1/2}p\bar{f}^s_-, v^{1/2}pf^s_+ >$$

Term 5:

$$\frac{1}{2ick_0^{(0)}} < h_{0+}^{(0)}, (1+K_+)^{-1,(0)} g_{0+}^{(1)} >$$

$$= \frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2} f_{0+}^s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_+ & 0 \\ -v^{1/2}\frac{p}{2m} G_+^s |v|^{1/2} a_+ & 1 \end{pmatrix} v^{1/2} \begin{pmatrix} iX\frac{{k^s}^3}{8m^2} \\ iX\frac{{k^s}^4}{16m^3} \mp \frac{{k^s}^3}{16m^3} \end{pmatrix} f_{0+}^s >$$

$$= \frac{2m}{2ik^s}\frac{i{k^s}^3}{8m^2} < |v|^{1/2} f_{0+}^s, a_+ v^{1/2} X f_{0+}^s >$$

$$= \frac{{k^s}^2}{8m} < a_+^* |v|^{1/2} \bar{f}_{0-}^s, v^{1/2} X f_{0+}^s >$$

$$= \frac{{k^s}^2}{8m} < |v|^{1/2} \bar{f}_{-}^s, v^{1/2} X f_{0+}^s >$$

Damit ergibt sich für den Korrekturterm $T^{(1)}$ des Transmissionskoeffizienten:

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= {T^{(0)}}^2 \frac{{k^s}^2}{8m^2} \Big\{ 1 - \frac{1}{T^{(0)}} \\ &\quad - m < |v|^{1/2} X f_{0+}^s, v^{1/2} f_+^s > \\ &\quad + m < |v|^{1/2} \bar{f}_-^s, v^{1/2} X f_{0+}^s > \\ &\quad + \frac{2m}{i{k^s}^3} < |v|^{1/2} p \bar{f}_-^s, v^{1/2} p f_+^s > \\ &\quad - \frac{1}{ik^s} < |v|^{1/2} \bar{f}_-^s, [v^{1/2} p^2 G_+^{s^2} |v|^{1/2}] v^{1/2} f_+^s > \Big\} \end{aligned} \tag{4.25}$$

4.4 Die Entwicklung des Reflexionskoeffizienten R^l

$$R^l(E,c) = -\frac{W(\bar{g}_-, g_+)}{W(g_-, g_+)}$$

$$= \underbrace{\frac{2ck_0}{W(g_-, g_+)}}_{=T} \underbrace{\frac{-W(\bar{g}_-, g_+)}{2ck_0}}_{:=F} = TF$$

$$= T^{(0)}F^{(0)} + \frac{1}{c^2}(T^{(0)}F^{(1)} + T^{(1)}F^{(0)}) + O(c^{-4}) \qquad (4.26)$$

Für $F(E, c)$ ergibt sich:

$$F = \frac{-W(\bar{g}_-, g_+)}{2ck_0} = \frac{1}{2ick_0} \int_{\mathbb{R}} dy v(y) e^{i\frac{k}{c}y} (g_{+1} - \frac{k_0}{c} g_{+2})$$

$$= \frac{1}{2ick_0} < |v|^{1/2} B(c)^{-1} f_{0-}, v^{1/2} B(c) f_+ >$$

$$= \frac{1}{2ick_0} < \underbrace{|v|^{1/2} B(c)^{-1} f_{0-}}_{:=h_{0-}}, (1 + K_+)^{-1} \underbrace{v^{1/2} B(c) f_{0+}}_{=g_{0+}} > \qquad (4.27)$$

Für die Entwicklung von F ergibt sich:

$$F^{(0)} = \frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2} f^s_{0-}, v^{1/2} f^s_+ >$$

$$\begin{aligned} F^{(1)} \quad = \quad & \frac{k^{s^2}}{8m^2} \Big\{ F^{(0)} + \\ & + m < |v|^{1/2} X f^s_{0-}, v^{1/2} f^s_+ > \\ & + m < |v|^{1/2} f^s_-, v^{1/2} X f^s_{0+} > \\ & + \frac{2m}{ik^{s^3}} < |v|^{1/2} p f^s_-, v^{1/2} p f^s_+ > \\ & - \frac{1}{ik^s} < |v|^{1/2} f^s_-, [v^{1/2} p^2 G^{s^2}_+ |v|^{1/2}] v^{1/2} f^s_+ > \Big\} \qquad (4.28) \end{aligned}$$

4.5 Die Entwicklung des Reflexionskoeffizienten R^r

$$
\begin{aligned}
R^r(E,c) &= -\frac{W(g_-,\bar{g}_+)}{W(g_-,g_+)} \\
&= \underbrace{\frac{2ck_0}{W(g_-,g_+)}}_{=T}\underbrace{\frac{-W(g_-,\bar{g}_+)}{2ck_0}}_{:=G} = TG \\
&= T^{(0)}G^{(0)} + \frac{1}{c^2}(T^{(0)}G^{(1)} + T^{(1)}G^{(0)}) + O(c^{-4})
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

Für $G(E,c)$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{-W(g_-,\bar{g}_+)}{2ck_0} = \frac{1}{2ick_0}\int_{\mathbb{R}} dy v(y) e^{-i\frac{k}{c}y}(g_{-1} + \frac{k_0}{c}g_{-2}) \\
&= \frac{1}{2ick_0} < |v|^{1/2}B(c)^{-1}f_{0+}, v^{1/2}B(c)f_- > \\
&= \frac{1}{2ick_0} < \underbrace{|v|^{1/2}B(c)^{-1}f_{0+}}_{=h_{0+}}, (1+K_-)^{-1}\underbrace{v^{1/2}B(c)f_{0-}}_{:=g_{0-}} >
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

Für die Entwicklung von G ergibt sich:

$$
G^{(0)} = \frac{2m}{2ik^s} < |v|^{1/2}f^s_{0+}, v^{1/2}f^s_- >
$$

$$
\begin{aligned}
G^{(1)} \quad = \quad & \frac{k^{s^2}}{8m^2}\Big\{G^{(0)} - \\
& -m < |v|^{1/2}Xf^s_{0+}, v^{1/2}f^s_- > \\
& -m < |v|^{1/2}f^s_+, v^{1/2}Xf^s_{0-} > \\
& +\frac{2m}{ik^{s^3}} < |v|^{1/2}pf^s_+, v^{1/2}pf^s_- > \\
& -\frac{1}{ik^s} < |v|^{1/2}f^s_+, [v^{1/2}p^2G^{s^2}_-|v|^{1/2}]v^{1/2}f^s_- >\Big\}
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Anmerkung: Für $\{c \in \mathbb{R}^+\} \cap \{c^{-2} \in M\}$ gilt:

$$\begin{aligned} G &= -F^* \\ \text{da } W(g_-, \bar{g}_+) &= -W(\bar{g}_-, g_+)^* \end{aligned}$$

4.6 Die Entwicklung der "on shell"-Streumatrix

Für die Streumatrix ergibt sich damit die folgende Entwicklung:

$$S(E,c) = S^{(0)}(E) + \frac{1}{c^2} S^{(1)}(E) + O(c^{-4})$$

Der Korrekturterm 1. Ordnung lautet:

$$S^{(1)}(E) = \begin{pmatrix} T^l(E)^{(1)} & R^r(E)^{(1)} \\ \\ R^l(E)^{(1)} & T^r(E)^{(1)} \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

wobei

$$T^{l(1)} = T^{r(1)} = T^{(1)} \quad (\text{ vgl. } (4.25))$$

$$R^{l(1)} = T^{(0)}F^{(1)} + T^{(1)}F^{(0)} \quad (\text{ vgl. } (4.26) - (4.28))$$

$$R^{r(1)} = T^{(0)}G^{(1)} + T^{(1)}G^{(0)} \quad (\text{ vgl. } (4.29) - (4.31)) \tag{4.33}$$

ist.

Der Term $S^{(0)}(E)$ stimmt mit der Schrödinger-Streumatrix überein.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine konkrete Entwicklung der "on shell"-Streumatrix der eindimensionalen Diracgleichung in $\frac{1}{c^2}$ durchgeführt. Dabei wird nicht der abstrakte Zugang über den Streuoperator gewählt, sondern die Tatsache benutzt, daß im räumlich eindimensionalen Fall die Streumatrix eine (2×2)-Matrix ist, deren Koeffizienten als Wronskideterminanten der Jostlösungen darstellbar sind.

Völlig elementar ergibt sich die Holomorphie in $\frac{1}{c}$ der Jostlösungen, die durch Iteration der entsprechenden Integralgleichungen gewonnen werden. Man sieht dabei auch gleich die dafür notwendige Bedingung für den Abfall des Potentials, da die ebene Welle e^{izx} sich für $\mathrm{Im} z \neq 0$ wie eine Exponentialfunktion verhält.

Die Holomorphie der "on shell"-Streumatrix und der Streuphase ergibt sich dann unmittelbar aus der Holomorphie der Jostlösungen. Um direkt Holomorphie in $\frac{1}{c^2}$ zu erhalten wird jedoch vorher eine Ähnlichkeitstransformation mit der Matrix $B(c)$ durchgeführt.

Zur Entwicklung der Jostlösungen mutipliziert man die beiden Gleichungen für $f_\pm$ mit $v^{1/2}$ und erhält somit zwei Hilbertraumgleichungen in $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$. Diese lassen sich mit Hilfe der Operatoren $A_\pm$ (siehe Lemma 2 und Lemma 3) entwickeln.

Zur Entwicklung der Transmissions- und Reflexionskoeffizienten werden die entsprechenden Wronskideterminanten in ein Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ umgewandelt.

Dieses Resultat läßt sich im dreidimensionalen Fall für radialsymmetrische Potentiale direkt auf die Partialwellen-S-Matrix-Elemente $s_j(E,c)$, Partialwellen-Streuamplitude $f_j(E,c)$ und die Streuphase $\delta_j(E,c)$ übertragen.

Kapitel 6

Verzeichnis der Definitionen und Abkürzungen.

Die Notation ist konform zu Reed/Simon [13, 14, 15, 16] und Weidmann [20].

Verzeichnis der im Text definierten Symbole:

Literaturverzeichnis

[1] Albeverio, S., Gesztesy, F., Høegh-Krohn, R., Holden, H.: Solvable models in quantum mechanics. Springer (1988)

[2] Amrein, W.O., Jauch, J.M., Sinha, K.B. : Scattering theory in quantum mechanics. W.A. Benjamin, Inc. (1977)

[3] Berthier, A.M. : Spectral theory and wave operators for the schrödinger equation. Pitman (1982)

[4] Bulla, W., Gesztesy, F., Unterkofler, K. : On relativistic energy band corrections in the presence of periodic potentials. Lett. Math. Phys. **15**, 313-324 (1988)

[5] Cirincione, R.J., Chernoff, P.R. : Dirac and Klein-Gordon Equations: Convergence of solutions in the nonrelativistic limit. Commun. Math. Phys. **79**, 33-46 (1981)

[6] Gesztesy, F. : Scattering theory for one-dimensional systems with nontrivial spatial asymptotics. Lecture notes in mathematics 1218, 93-122 (1985)

[7] Gesztesy, F., Grosse, H., Thaller, B. : A rigorous approach to relativistic corrections of bound state energies for spin$-1/2$ particles. Ann. Inst. Henri Poincare A **40**, 159-174 (1984)

[8] Gesztesy, F., Grosse, H., Thaller, B. : An efficient method for calculating relativistic corrections for spin$-1/2$ particles. Phys. Rev. Lett. **50**, 625-628 (1983)

[9] Gesztesy, F., Seba, P. : New analytically solvable models of relativistic point interactions. Lett. Math. Phys. **13**, 345-358 (1987)

[10] Hunziker, W. : On the nonrelativistic limit of the Dirac theory. Commun. Math. Phys. **40**, 215-222 (1975)

[11] Kuroda, S.T. : Scattering theory for differential operators I, J. Math. Soc. Japan **25**, 75-104 (1973)

[12] Newton, R.G. : Inverse scattering.I. One dimension. J. Math. Phys. **21**, 493-505 (1980)

[13] Reed, M., Simon, B. : Methods of modern mathematical physics
Vol.I Functional analysis (1972), Academic Press

[14] Vol. II Fourier analysis, self-adjointness (1975)

[15] Vol. III Scattering theory (1979)

[16] Vol.IV Analysis of operators (1978)

[17] Ruijsenaars, S.N.M., Bongaarts, P.J.M. : Scattering theory for one-dimensional step potentials. Ann. Inst. H. Poincare A **26**, 1-17 (1977)

[18] Thirring, W. : Lehrbuch der mathematischen Physik 3, Quantenmechanik von Atomen und Molekülen. Springer (1979)

[19] Veselić, K., Weidmann, J. : Existenz der Wellenoperatoren für eine allgemeine Klasse von Operatoren. Math. Z. **134**, 255-274 (1973)

[20] Weidmann, J. : Lineare Operatoren in Hilberträumen. Springer (1976)

[21] Yajima, K. : Nonrelativistic limit of the Dirac theory, scattering theory. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA, **23**, 517-523 (1976)