

Nicht lineare

Wellengleichungen

Solitonen

Inhalt

1. Beispiele für nichtlineare PDG'en
2. Einführung in nichtlineare PDG'en
3. Die Lax-Methode
4. Streutheorie und inverse Streutheorie für 1-dim. Schrödingeroperatoren
5. Reflexionslose Potentiale
6. Die inverse Streutheorie Methode angewendet auf die KdV-gl.
7. Solitonen und solitonartige Potentiale
8. Ausblicke

1. Beispiele für nichtlineare PDG'en

a.) Korteweg-de Vries - Gleichung [1-7]:

$$V_t(t,x) - 6V(t,x)V_x(t,x) + V_{xxx}(t,x) = 0$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}^2, V \in C^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (1.1)$$

Anwendungen: Modell für langwellige
(Wasserwellen) mit kleiner Amplitude,
innere Gravitationswellen in geschichteten
(stratify) Flüssigkeiten,
Wellen in einer rotierenden Atmosphäre
(Rossby inertial waves)

Ionen-akustische Wellen in Plasmen,
Druckwellen in einem Gas-
Flüssigkeitsblasen-Gemisch.

(vgl. [1] ch. 5 und [2], Sect. 1.4,
[3], Sect. 4.1, [5], Sect. 2.1, [6], ch. 2)

Abkürzung:

$$\text{KdV}(V) := V_t - 6VV_x + V_{xxx} . \quad (1.2)$$

b.) Modifizierte Korteweg-deVries (gl. [1-5]):

$$\begin{aligned} \phi_t(t,x) + 6\phi(t,x)^2\phi_x(t,x) + \phi_{xxx}(t,x) &= 0, \\ (t,x) \in \mathbb{R}^2, \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Anwendungen: langwellige (Wasser-) Wellen
in geschichteten, rotierenden Flüssigkeiten,
zur Modellierung von Phononen in
anharmonischen (d.h. nichtlinearen) Gittern,
Alfvén-Wellen in kollisionsfreien Plasmen,
Nichtlineare Transmissions-Linien in der
Elektronik.

Abkürzung:

$$m \text{KdV}_{\pm}(\phi) := \phi_t \mp 6\phi^2\phi_x + \phi_{xxx} . \quad (1.4)$$

c.) Gardner - Gleichung:

$$u_t + \lambda u u_x + \mu u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.5)$$

$(t, x) \in \mathbb{R}^2, u \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

d.) Verallgemeinerte KdV-Gl. [1, 2, 4]:

$$V_t + \lambda V^n V_x + V_{xxx} = 0, \quad (1.6)$$

$(t, x) \in \mathbb{R}^2, V \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$

e.) Burger - Gleichung [1-5]:

$$\phi_t + \lambda \phi \phi_x - \phi_{xx} = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}, \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2),$$

(1.7)

f.) Nicht lineare Schrödinger gl. [1-7]:

$$i u_t + u_{xx} \pm u |u|^2 = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, u \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

(1.8)

Abkürzung:

$$NLS_{\pm}(u) := i u_t + u_{xx} \pm u |u|^2. \quad (1.9)$$

Anwendungen:

Langmuir Plasma wellen,

Nichtlineare Optik,

Langwellige Wellen,

Alpha helix - Modelle in Verbindung
mit Proteinmolekülen.

(vgl [1], ch. 8, [2], p. 198, [3], Sect. 4.3)

8.) Sine - Gordon Gl. [1-7]:

$$\Phi_{tx} = \pm \sin(\Phi), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad (1.10)$$

bzw.

$$u_{tt} - u_{xx} \pm \sin u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad u \in C^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (1.11)$$

Anwendungen: Differentialgeometrie,
langsam variierende Wellen,
Fehlstellen in Kristallen,
Elementarteilchenphysik,

Transmissionslinien von
 Josephson-Überpängen,
 Wellenpakete in bewegten Medien,
 Quantenoptik, statistische Mechanik;
 vgl. [1], dr. 7, [2] p. 199.

h.) Hyperbolische Sine-Gordon Gl. [2, 5]:

$$\Phi_{tx} = \sinh(\Phi), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (1.12)$$

i.) Benjamin-Duo Gl. [1-4]:

$$\begin{aligned}
 V_t + (\lambda + V)V_x + \mu H(V_{xx}) &= 0 \\
 (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},
 \end{aligned} \quad (1.13)$$

wobei

$$H(f)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{x' - x} \quad (1.14)$$

die Hilberttransformation ist. (\int ist
 das Hauptwertintegral (principal value):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x')}{x'-x} := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x-\epsilon} dx' \frac{f(x')}{x'-x} + \int_{x+\epsilon}^{\infty} dx' \frac{f(x')}{x'-x} \right]$$

Gleichung (1.13) ist eine Integrodifferentialgleichung und keine PDG, aber sie kann mit den gleichen Methoden behandelt werden.

Anwendungen: innere Wellen in geschichteten Medien, Gravitationswellen,
(vgl. [1], p. 373, [2] p. 197, [3] Sect. 4.1).

j.) Liouville Gleichung [2, 4]:

$$u_{tx} = e^{\lambda u}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad u \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

Anwendungen: klassische feldtheoretische Modelle

(vgl. [4], p. 61)

k.) Toda Gitter [2,3,5,7,8]:

$$x_{n,tt} = e^{(x_{n+1}-x_n)} - e^{(x_n-x_{n-1})}, \quad x_n \in C^\infty(\mathbb{R}), n \in \mathbb{Z}$$
$$t \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Dies ist ein Differential - Differenzen System.

Anwendungen: Nichtlineare Gitter,
(vgl. [8]).

l.) Kadomtsev - Petviashvili-Gl. [1-5,7]:
(auch 2dim KdV-Gl.)

$$V_t - 6VV_x + V_{xxx} \pm 3(\partial_x^{-1} V_{yy}) = 0, \quad (t,x,y) \in \mathbb{R}^3, \quad (1.17)$$
$$V \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \int_{x_0}^x dx' \partial_y^e V(t,x',y) \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \quad e=1,2,$$

wobei

$$(\partial_x^{-1} f)(t,x,y) := \int_{-\infty}^x dx' f(t,x',y) \quad \text{für}$$

geeignete f 's ist.

Anwendungen: Analog zur KdV-Gl.,

mathematisch die wichtigste von diesen nichtlinearen Gleichungen.

Abkürzungen:

$$KP-I(V) \equiv KP_-(V) := V_t - 6VV_x + V_{xxx} - 3(\partial_x^{-1} V_{yy})$$

$$KP-II(V) \equiv KP_+(V) := V_t - 6VV_x + V_{xxx} + 3(\partial_x^{-1} V_{yy}) \quad (1.19)$$

m) modifizierte Kadomtsev-Petviashvili-I-Gl.:

$$\phi_t - 6\phi^2\phi_x + \phi_{xxx} + 3(\partial_x^{-1} \phi_{yy}) \pm 6\phi_x(\partial_x^{-1} \phi_y) = 0$$

$$(t, x, y) \in \mathbb{R}^3, \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \int_{x_0}^{-x} dx' \partial_y^l \phi(t, x', y) \in C^\infty(\mathbb{R}^3), l=1, 2. \quad (1.20)$$

Anwendungen: Analog m KdV-Gl.

Abkürzung:

$$m \text{ } KP_{\pm}(\phi) := \phi_t - 6\phi^2\phi_x + \phi_{xxx} + 3(\partial_x^{-1} \phi_{yy}) \pm 6\phi_x(\partial_x^{-1} \phi_y).$$

2. Einführung in nichtlineare PDG'en (PDE's)

Wir beschränken uns auf eine Raumdimension.

a.) lineare PDG'en:

Die bekannteste lineare PDG ist die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0. \quad (2.1)$$

(Anmerkung: mit $\hat{t} := t/c$ verschwindet c)

Lösung: (d'Alambert)

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct). \quad (2.2)$$

$\xi_{\pm} := x \pm ct$ sind die charakteristischen Variablen.

f und g sind zwei willkürliche Funktionen.

Beschreibt Wellenausbreitungsprozesse in verschiedenen homogenen Medien.

Voraussetzungen bei der Ableitung:

- (1) keine Dissipation: d.h. invariant unter $t \rightarrow -t$;
- (2) kleine Auslenkungen (Amplituden). Daraus folgt, dass nichtlineare Terme klein und daher vernachlässigbar sind.
- (3) keine Dispersion: d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt nicht von Frequenz und Wellenlänge ab.

Eigenschaften von Lösungen:

(1) Linear: Die Summe von 2 Lösungen ist wieder eine Lösung (Superposition).

(2) Die Lösungen ändern ihre Form nicht und

$f(x-ct)$ geht nach rechts mit der Geschwindigkeit c ;

$g(x+ct)$ geht nach links.

$$\text{Mit } u_t + cu_x = 0, \quad (2.3)$$

$$u(x,t) = f(x-ct), \quad (2.4)$$

(beschreibt nach rechts laufende Lösungen)

Kann man (2.1) schreiben:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = 0. \quad (2.5)$$

Versonach lässt man höhere Ableitungen nicht, so erhält man z. B.:

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0, \quad \text{oder} \quad (2.6)$$

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0, \quad (2.7)$$

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad (2.8)$$

$$u_t + iu_{xx} = 0, \quad \text{etc.} \quad (2.9)$$

Lösungsansatz:

$$u(x,t) = e^{ikx - i\omega t} \quad (2.10)$$

Anmerkung: komplex ist wegen Linearität kein Problem; $u(x,t) + \overline{u(x,t)}$ ist reell!

Damit nun (2.10) Lösung von (2.6) ist
muss

$$\omega = k - k^3 \quad (2.11)$$

gelten.

Diese Beziehung heißt Dispersions-
relation. (k ... Wellenzahl, $k \in \mathbb{R}$; ω ... Frequenz)

Die Phasengeschwindigkeit ist definiert:

$$c_{ph} := \frac{\omega}{k} \stackrel{(2.11)}{=} 1 - k^2. \quad (2.12)$$

Sie beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit
der Welle (Orte konstanter Phase)!

Man sieht: c_{ph} hängt von k ab.

Wellen mit verschiedenen k 's laufen
verschieden schnell.

Das Superpositionsprinzip erlaubt nun
die Addition von verschiedenen Lösungen.

Am besten nimmt man alle und erhält
an Stelle der Summe ein Integral.

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk. \quad (2.13)$$

Anfangswertproblem: Gegeben sei

$$u(x,0) = f(x); \quad \text{man nicht sofort:}$$

$$\text{Wählt man für } A(k): \quad A(k) = \hat{f}(k) \quad (2.14)$$

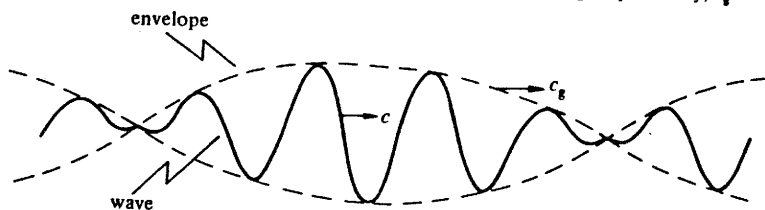
so ist $u(x,t)$ die Lösung des Anfangswertproblems!

Die Gruppengeschwindigkeit c_g ist definiert:

$$c_g := \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2. \quad (2.15)$$

Sie beschreibt die Geschwindigkeit eines Wellenpaketes.

Fig. 1.1 A sketch of a wave packet, showing the wave and its envelope. The wave moves at the phase velocity, c , and the envelope at the group velocity, c_g .



Dispersion heißt nun, dass die Gruppen geschwindigkeit c_g und die Phasen geschwindigkeit c_{ph} verschieden sind. Das Wellenpaket wird mit der Zeit zerfließen.

Eine Lösung der Gleichung (2.7) ist

$$u(x,t) = e^{-k^2 t + ik(x-t)} \quad (2.16)$$

Die harmonische Welle (2.16) nimmt mit der Zeit exponentiell ab. Diese Eigenschaft nennt man Dissipation (vgl. auch Gl. (2.8)).

Lemma 2.1. (Methode der stationären Phase,
vgl. [RS III], Seite 38, 41)

Es sei $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$, $A \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und

$$V(t, x) := \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) e^{ikx - i\omega(k)t}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.17)$$

Definiere $E := \{ \omega'(k) \mid k \in \text{supp}(A) \}$. (2.18)

Dann gilt:

(i) $\forall m \in \mathbb{N} \exists C = C(m, V, E) > 0$, sodass

$$|V(t, x)| \leq C (1 + |x| + |t|)^{-m} \quad (2.19)$$

$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$ mit $(\frac{x}{t}) \notin E$.

(ii) Angenommen $\text{supp}(A) \cap \{k \in \mathbb{R} \mid \omega''(k) = 0\} = \emptyset$.

Dann $\exists C = C(V) > 0$, sodass

$$|V(t, x)| \leq C |t|^{-1/2} \quad \forall |t| > 1, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

Lemma 2.1. beschreibt das Zerfließen eines Wellenpaketes, ein Phänomen das man Dispersion nennt.

Für Gleichung (2.6) gilt: $\omega(k) = k - k^3$,
 $\{k \in \mathbb{R} \mid \omega''(k) = 0\} = \{0\}$.

Ist speziell $0 \notin \text{supp}(A)$, dann folgt aus Gleichung (2.20)

$$v(t, x) = O(|t|^{-1/2}) \quad \text{für } |t| \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

gleichförmig in $x \in \mathbb{R}$.

Anmerkung zur Menge E :

Integrale der Gestalt $\int dk A(k) e^{it f(k)}$

gehen unwirksamer gegen 0 für $|t| \rightarrow \infty$

je rascher die Oszillationen in $e^{it f(k)}$

sich gegenseitig aufheben. Dieses

Wegheben ist für Werte von $f(k)$ am

schwächsten, für die sich $f(k)$ nur

wenig ändert d.h.: $f'(k) = 0$. Man erhält:

$$\begin{aligned} e^{ikx - i\omega(k)t} &= e^{ik_0 x - i\omega(k_0)t} \cdot e^{i(k-k_0)t \cdot \left[\frac{x}{t} - \frac{\omega(k) - \omega(k_0)}{k - k_0} \right]} \\ &= e^{ik_0 x - i\omega(k_0)t} \cdot e^{i(k-k_0)t \left[\frac{x}{t} - \omega'(k_0) + (k-k_0) \omega''(\tilde{k}_0)/2 \right]} \end{aligned}$$

(Entwicklung von $\omega(k) = \omega(k_0) + \omega'(k_0)(k-k_0) + \frac{\omega''(\tilde{k}_0)}{2}(k-k_0)^2$
 $\tilde{k}_0 \in (k_0, k)$, Restglied der Taylorreihe nach Laprange)

Man sieht nun, dass die gegenseitige

Weghebung mitliegt, wenn $\frac{x}{t} = \omega'(k_0)$ und

$k_0 \in \text{supp}(A)$ ist.

b.) Nichtlinearität ohne Dispersion:

$$u_t + (u+1)u_x = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.22)$$

Vgl. mit Gleichung (2.3) ergibt
die formale Lösung

$$u(t,x) = f(x - (u+1)t) \quad (2.23)$$

mit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ willkürlich.

(2.23) ist eine implizite Gleichung
für $u(x,t)$ und im allgemeinen
gleich schwer wie (2.22) zu lösen.

Man erhält diese Lösung auch mit der
Charakteristikenmethode (vgl. Vorlesung
PDG). Auch die allgemeinere

Gleichung
$$v_t + F(v)v_x = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.24)$$

hat
$$v(t,x) = f(x - F(v(t,x))t), \quad (2.25)$$

mit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, als Lösung.

Aber (2.22) und (2.24) können keine globalen Lösungen (d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$) im allgemeinen haben.

Lemma 2.2. ([Sm0], S. 241-244)

Es sei $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F'' > 0$ und

$$V_t + F(V) V_x = 0, \quad t \geq 0, \quad V(0, x) = V_0(x), \quad V_0 \in C^1(\mathbb{R}). \quad (2.26)$$

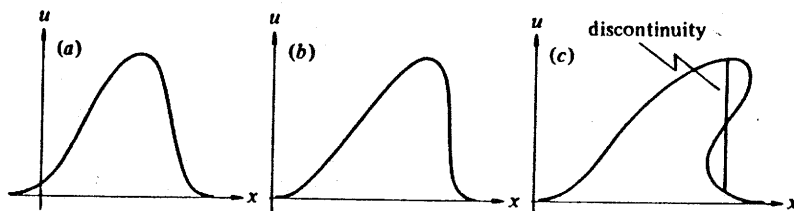
Ist $V_0'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ dann $V \in C^1(\mathbb{R}_+^2)$.

Ist $V_0'(x) < 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dann existiert im allgemeinen eine Lösung $V \in C^1$ nur für $|t|$ klein genug.

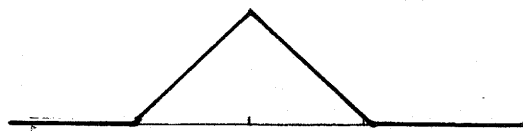
$$\mathbb{R}_+^2 := \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0 \}$$

Man erhält folgendes qualitatives Verhalten:

Fig. 1.2 The evolution of a nonlinear wave as time increases (a) $t = t_1$; (b) $t = t_2 > t_1$; (c) $t = t_3 > t_2$. The wave becomes vertical at one point at $t = t_2$, and thereafter the solution is triple-valued in a region. The solution can be made single-valued by the insertion of a discontinuity (and the smooth 'lobes' are then ignored).



Exakt berechenbar ist:



Anmerkungen:

(i) Die Nichtexistenz globaler Lösungen ist ein typischer nichtlinearer Effekt und ist auch nicht durch die Bedingung $F, v_0 \in C^\infty$ zu beheben.

(ii) Für nichtlineare Wellen gilt nicht das Superpositionsprinzip.

(iii) Intuitiv kann man den Zusammenbruch der Zeitentwicklung von

$$u(x,t) = f(x - (u(x,t) + 1)t)$$

so sehen: größere Werte von $u(x,t)$ bewegen sich schneller; es kommt zum "Überschlagen" der Welle.

Die Geschwindigkeit nichtlinearer Wellen hängt von der Amplitude $u(x,t)$ ab!

c.) Nicht linearität mit Dispersion: Solitonen

KdV-Gleichung:

$$V_t - 6VV_x + V_{xxx} = 0 \quad (2.27)$$

Spezielle Lösung:

$$V_1(t, x) := V_\infty - 2\kappa_1^2 \left[\cosh(\kappa_1(x + (6V_\infty - 4\kappa_1^2)t) + c) \right]^{-2},$$
$$c, V_\infty \in \mathbb{R}, \kappa_1 \geq 0, (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.28)$$

$$\text{KdV}(V_1) = 0$$

V_1 ist von der Gestalt einer Wanderwelle (travelling wave) d.h.

$$V_1(t, x) = f(x - vt), \quad v \in \mathbb{R} \quad (2.29)$$

mit $v = 4\kappa_1^2 - 6V_\infty$. Es gilt:

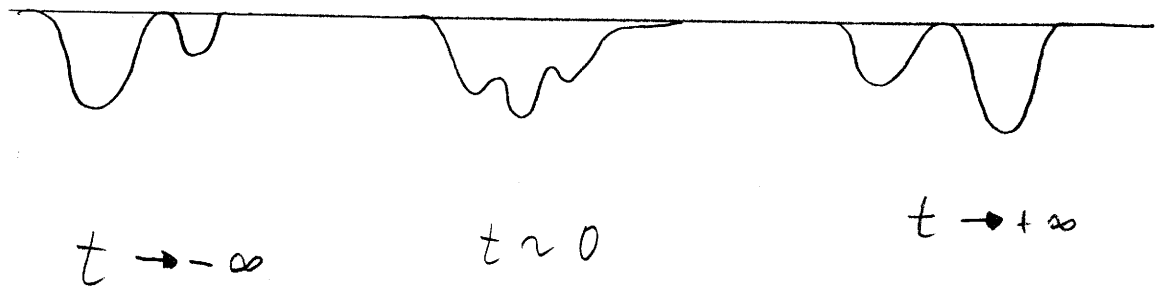
$$V_\infty = V_1(t, \pm\infty) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$V_\infty = V_1(\pm\infty, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, 6V_\infty \neq 4\kappa_1^2$$

Die Welle V_1 läuft nach rechts, genau dann wenn $v > 0$, d.h. $4\kappa_1^2 > 6V_0$, ist, und nach links, genau dann wenn $v < 0$, d.h. $4\kappa_1^2 < 6V_0$ ist. V_1 ist genau dann eine stationäre Welle, wenn $4\kappa_1^2 = 6V_0$ ist.

Speziell ist V_1 eine globale Lösung der KdV-Gleichung (2.27). Sie ist nicht eine dispersive, d.h.: sie zerläuft nicht für $|t| \rightarrow \infty$. Tatsächlich behalten Wanderwellen ihre Form bei.

Anmerkung: Lösungen der Form (2.28) die eine lokalisierte Form haben und zeitlich ihre Gestalt bei behalten nennt man Solitärwellen (solitary waves). Nicht zu verwechseln mit dem Begriff Solitonen als solche Lösungen die asymptotisch ihre Form bei behalten, sogar nach der Wechselwirkung!



Zusammenfassung: Eine geeignete Kombination von Nichtlinearität und Dispersion kann völlig neue qualitative Phänomene ermöglichen: eine Solitärwelle die global definiert ist, und ihre Form behält, d.h. nicht dispersiv ist!

3.) Die Lax Methode.

Wir führen folgende Hypothese ein:

$$(H3.1.) \quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ reellwertig,} \\ V, V_t, V_{tx}, V_x \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$$

Anmerkung: Man kann (H3.1.) abschwächen:

$$(H3.1.)^\bullet \quad V \in C^3(\mathbb{R}^2), \text{ reellwertig, } V(t, \cdot), V_t(t, \cdot), \\ V_x(t, \cdot), V_{tx}(t, \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nun definiert man den 1-dimensionalen Schrödingeroperator

$$H(t) := -\partial_x^2 + V(t, \cdot), \quad \mathcal{D}(H(t)) = H^2(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}, dx)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(H(t)) &= \mathcal{D}(-\partial_x^2) = H^2(\mathbb{R}) = \\ &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid p^2 \hat{f}(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}) \right\}. \end{aligned}$$

Wenn V die Voraussetzungen (H3.1) erfüllt, ist $H(t)$ selbstadjungiert auf $H^2(\mathbb{R}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Definition 3.2 Sei $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ eine
 einparametrische Familie von selbstadjungierten
 Operatoren in einem Hilbertraum \mathcal{H}
 mit einem gemeinsamen Bereich $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$
 $\mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

Eine zweiparametrische Familie von linearen
 Operatoren $U(t,s)$, $s, t \in \mathbb{R}$ in \mathcal{H} heißt
 unitärer Propagator (Evolutionoperator)
 für $A(t)$, genau dann wenn

(i) $U(t,s)$ ist unitär $\forall s, t \in \mathbb{R}.$

(ii) $U(t,t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

(iii) $U(t,s) U(s,r) = U(t,r) \quad \forall r, s, t \in \mathbb{R}$

(iv) $(t,s) \rightarrow U(t,s)$ ist stark stetig in t und s .

(v) $t \rightarrow U(t,s)\Psi$ ist (für festes $s \in \mathbb{R}$) stark
 differenzierbar in t für alle $\Psi \in \mathcal{D}$ und

$$\partial_t U(t,s)\Psi = -i A(t) U(t,s)\Psi, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

Anmerkungen: Aus (i)-(iv) folgt

$$(vi) \quad U(t, s)^* = U(s, t)$$

(vii) $s \rightarrow U(t, s)^* \phi$ ($t \in \mathbb{R}$ fest) ist stark differenzierbar bez. s für alle $\phi \in \mathcal{D}$ und

$$\partial_s U(t, s)^* \phi = i U(t, s)^* A(s) \phi, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Theorem: Sei $H(t)$ die oben definierte 1 parameterige Familie von Schrödinger Operatoren wobei (H3.1) gilt. Dann existiert ein unitärer Propagator.

Die Ableitung der parameterabhängigen Operatoren $H(t)$ nach t ist definiert durch

$$\frac{dH(t)}{dt} f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{H(t+\delta) - H(t)}{\delta} f \quad (3.3)$$

$$\text{In unserem Fall ist: } \frac{dH(t)}{dt} = V_t(t, \cdot) \quad (3.4)$$

Wir nehmen für die Zeitabhängigkeit von $H(t)$ die einfachst mögliche Form an:

$$H(t) = W(t,s) H(s) W(s,t) \quad (3.5)$$

wobei $W(t,s)$ ein unitärer Propagator ist; d.h.: die Operatoren $H(t)$ zu verschiedenen Zeiten sind unitär äquivalent: \Rightarrow Eigenwerte und Spektrum sind zeitunabhängig.

Weiters sei $W(t,s)$ von einer Familie selbstadjungierter Operatoren $B(t)$ erzeugt, so daß

$$i \frac{\partial}{\partial t} W(t,s) = B(t) W(t,s) \quad (3.6)$$

und der Kommutator $[B(t), H(t)]$ dieselbe definiert ist.

Aus (3.5) und (3.6) erhält man

$$\frac{dH(t)}{dt} = -i [B(t), H(t)] \quad (3.7)$$

Vergleicht man mit (3.4) so sieht man dass

$$-i [B(t), H(t)] = m(x,t) \quad (3.8)$$

wobei m eine geeignete Funktion ist.

Falls nun $V_t(t,x) = m(x,t)$ gilt,

so wird die Familie der
Schrödingeroperatoren $H(t)$ durch
die Zeitabhängigkeit (3.5) erzeugt.

Es geht nun darum einen Operator $B(t)$ zu finden.

Wir machen den Ansatz

$$B_n(t) = p^{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n-1} b_k(x,t) p^k + p^k b_k(x,t) \quad (3.9)$$

wobei $p = -i\partial_x$ der Impulsoperator und b_k reelle Funktionen, die noch bestimmt werden, sind.

Da $m(x,t)$ und auch $H(t)$ reell sind, muss iB auch reell sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn nur ungerade

Koeffizienten k in der Summe vorkommen.

Sei nun $n=0$:

Man erhält:

$$iB_0 = \partial_x \quad (3.10)$$

Einsetzen in (3.8) erhält man

$$-i [B_0, H] = -v_x \quad (3.11)$$

Mit Gleichung (3.7) folgt

$$v_t + v_x = 0 \quad (3.12)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt die triviale Folgerung, dass Potentiale

$$v(x,t) = v(x-t)$$

die räumlich verschoben sind, die selbe Physik beschreiben.

Es sei nun $n=1$:

$$iB_1 = -\partial_x^3 + b_1 \partial_x + \partial_{x^1} b_1 \quad (3.13)$$

Damit erhält man in (3.8)

$$\begin{aligned} -i [B_1, H] = & (-4b_{1x} + 3v_x) \partial_x^2 \\ & + (-4b_{1xx} + 3v_{xx}) \partial_x \\ & - b_{1xxx} + v_{xxx} - 2b_1 v_x \end{aligned} \quad (3.14)$$

Damit der Kommutator ein
Multiplikationsoperator ist, muss

$$b_1 = \frac{3}{4}v \text{ sein.} \quad (3.15)$$

Es ergibt sich nun:

$$-i[B_1, H] = \frac{1}{4}(v_{xxx} - 6vv_x) = \frac{dH}{dt} \quad (3.16)$$

und damit

$$-4v_t - 6vv_x + v_{xxx} = 0$$

$t \rightarrow \tilde{t} = -4t/4$ ergibt nun

$$v_{\tilde{t}} - 6vv_x + v_{xxx} = 0 \quad (3.17)$$

d.h. Ist v eine Lösung der KdV-Gleichung
so sind die entsprechenden Schrödinger=
operatoren $H(t)$, für verschiedene
 t 's, untereinander äquivalent. Das Spektrum
ist von t unabhängig, obwohl das
Potential als Funktion von t stark
variieren kann!

Die Operatoren $H(t) =: L(t)$ und

$$iB_{1,v} = -4\partial_x^3 + 6V(t, \cdot)\partial_x + 3V_x(t, \cdot) \quad (3.18)$$

nennt man auch "Lax Paar" $(B_{1,v}, L)$.

Bemerkung: Für $n > 1$ erhält man die sogenannten höheren KdV-Gleichungen.

4. Strentheorie und inverse Strentheorie für 1-dim. Schrödingeroperatoren.

(H.4.1.) $V \in L^1(\mathbb{R}; (1+x^2)dx)$, reellwertig.

Damit wird der selbstadjungierte Schrödingeroperator H in $L^2(\mathbb{R}; dx)$ erklärt:

$$Hf := \tau f, \quad (4.1)'$$

$$\mathcal{D}(H) := \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}) \mid g, g' \in AC_{loc}(\mathbb{R}), \tau g \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$$

wobei τ der folgende Differentialausdruck ist

$$\tau := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

Man kann nun zeigen, dass H halbeschränkt nach unten ist, d.h. $\inf \sigma(H) > -\infty$ und

$$\begin{aligned} \sigma_{ac}(H) &= [0, \infty), \\ \sigma_p(H) &\subset (-\infty, 0), \end{aligned} \quad (4.4)$$

Speziell ist jeder Eigenwert von H einfach und negativ.

Die Jostlösungen werden definiert durch

$$f_{\pm}(z, x) = e^{\pm i k x} - \int_x^{\pm\infty} dy \frac{1}{k} \sin[k(x-y)] V(y) f_{\pm}(z, y) \quad (4.5)$$

$$z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R},$$

$$\text{mit } k(z) := \sqrt{z}, \quad \text{Im } k(z) \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.6)$$

Da $(1+|\cdot|)V \in L^1(\mathbb{R})$ gilt, sind f_{\pm} eindeutig durch diese Gleichung bestimmt. (Die Integralgleichung ist vom Volterra-Typ und kann durch Iteration gelöst werden.)

Man erhält

$$\left(\mathcal{L} f_{\pm}(z) \right) (x) = z f_{\pm}(z, x), \quad z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

z.B.:

$$H f_{\pm}(z) = z f_{\pm}(z) \quad \text{im Distributionensinne}$$

$$(\text{z.B. in } C_0^{\infty}(\mathbb{R})'). \quad (4.8)$$

Analog sind die Lösungen g_{\pm} eindeutig definiert durch

$$g_{\pm}(z, x) = e^{\mp i k x} - \int_x^{\pm \infty} dy \frac{1}{k} \sin[k(x-y)] V(y) g_{\pm}(z, y) \quad (4.9)$$

$$k(z) = z^{1/2}, \quad \text{Im } k(z) \leq 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Anmerkung 4.2: $g_{\pm}(z, x)$ ist komplex konjugiert zu $f_{\pm}(z, x)$, wenn $k(z) = z^{1/2} \in \mathbb{R}$ ist.

Die Wronskideterminante zweier Funktionen f und g ist definiert durch

$$W(f, g)(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \quad (4.10)$$

Damit erhält man

$$W(g_{\pm}(z), f_{\pm}(z)) = \pm 2i k(z), \quad z > 0 \quad (4.11)$$

und auch

$$(\mathcal{L} g_{\pm}(z))(x) = z g_{\pm}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.12)$$

Da \mathcal{L} von 2-ter Ordnung ist, können $\{f_{+}(z), f_{-}(z), g_{+}(z), g_{-}(z)\}$ nicht linear unabhängig sein!

Man erhält:

$$f_{\pm}(z, x) = c_{\mp}(z) f_{\mp}(z, x) + d_{\mp}(z) g_{\mp}(z, x) \quad (4.13)$$

$z > 0$

Für diese Koeffizienten ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2ik(z) d_+(z) &= W(f_-(z), f_+(z)) = 2ik(z) d_-(z), \\ -2ik(z) c_+(z) &= W(f_-(z), g_+(z)), \quad z > 0 \\ -2ik(z) c_-(z) &= W(g_-(z), f_+(z)), \quad z > 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

wobei (4.11) verwendet wurde. Aus (4.14) folgt $d_+ = d_- =: d$. d kann auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ fortgesetzt werden durch

$$d(z) := W(f_-(z), f_+(z)) / 2ik(z), \quad (4.15)$$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Aus (4.5) und (4.9) erhält man

$$W(f_-(z), f_+(z)) = 2ik(z) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\pm ik(z)x} V(x) f_{\mp}(z, x)$$

$z \in \mathbb{C} \quad (4.16)$

Eigenchaften von d , c_{\pm} und

$$W(z) := W(f_-(z), f_+(z)), z \in \mathbb{C}. \quad (4.17)$$

Lemma 4.3. Es gelte (H.1.1.).

(i) W ist analytisch in $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, stetig auf \mathbb{R} und $W(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. (4.18)

(ii) Entweder ist $W(0) \neq 0$ oder $W(0) = 0$ und
 $\lim_{z \rightarrow 0} z^{-1/2} W(z) = i\gamma \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Im} z^{1/2} \geq 0$

Daraus folgt, dass $d(z)$ nur eine endliche Anzahl von Nullstellen in \mathbb{C} hat.

(iii) Sei $d(\lambda_0) = 0$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Dann ist $\lambda_0 < 0$ und

$$\frac{d}{dz} d(z) \Big|_{z=\lambda_0} = \left[2 i k(\lambda_0) \right]^{-1} \int_{\mathbb{R}} dx f_-(\lambda_0, x) f_+(\lambda_0, x) \neq 0 \quad (4.19)$$

d.h. alle Nullstellen von d sind einfach

$$(iv) d(z) = 1 + O(|z|^{-1/2}) \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty \quad (4.20)$$

$$(v) c_{\pm}(\lambda) = O(\lambda^{-1/2}) \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty. \quad (4.21)$$

Beweis von (4.18) Für Wronskideterminanten gilt:

$$W(F, G) W(\phi, \psi) = W(F, \psi) W(\phi, G) - W(F, \phi) W(\psi, G) \quad (4.22)$$

Damit erhält man für $\lambda > 0$

$$W(f_+(\lambda), f_-(\lambda)) W(g_+, g_-(\lambda)) = |W(f_+(\lambda), g_-(\lambda))|^2 + 4\lambda > 0 \quad (4.23)$$

wobei obige Anmerkung 4.2 und (4.11) verwendet wurden. $W(\lambda) \neq 0$ für $\lambda > 0$ wegen (4.23). Auch kann $W(z)$ nicht für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ verschwinden, da dann die Fundamentalsystem f_{\pm} exponentiell für $\pm \infty$ abfallen. H würde einen nichtreellen Eigenwert $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ haben was der Selbstadjungiertheit von H widerspricht. (Iteration von von (4.5) ergibt

$$|f_{\pm}(z, x)| \leq \alpha_{\pm}(z) e^{\mp \operatorname{Im} k(z)x} \quad x \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (4.24)$$

wobei $\alpha_{\pm}(z)$ gleichförmig beschränkt ist, d.h.

$$|\alpha_{\pm}(z)| < C, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Anmerkung 4.4 : Aus (4.8), (4.24) Lemma 4.3 (ii), (iii)

kann die Aussage $\sigma_p(H) \subset (-\infty, 0)$ in (4.4) wie folgt konkretisiert werden:

Alle Eigenwerte von H sind negativ und einfach. Ihre Anzahl ist endlich und durch die Nullstellen von $d(\cdot)$ in $(-\infty, 0)$ gegeben.

Mit diesen Vorbereitungen können wir die Streumatrix $S(\lambda)$, $\lambda > 0$ in \mathbb{C}^2 die mit dem Paar von Operatoren (H, H_0) gegeben ist untersuchen,

$$H_0 f := \gamma_0 f, \quad \gamma_0 := -\frac{d^2}{dx^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.25)$$

$$\mathcal{D}(H_0) = H^2(\mathbb{R}).$$

Die Streumatrix ist

$$S(\lambda) := \begin{pmatrix} T^e(\lambda) & R^r(\lambda) \\ R^e(\lambda) & T^r(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0 \quad (4.26)$$

wobei

$$T^e(\lambda) = T^r(\lambda) \equiv T(\lambda) := d(\lambda)^{-1} = \frac{2i\lambda^{1/2}}{W(f_-(\lambda), f_+(\lambda))} \quad (4.27)$$

den Transmissionskoeffizienten von H bezüglich H_0 und

$$R^e(\lambda) := c_-(\lambda) d(\lambda)^{-1} = - \frac{W(g_-(\lambda), f_+(\lambda))}{W(f_-(\lambda), f_+(\lambda))}, \lambda > 0 \quad (4.28)$$

$$R^r(\lambda) := c_+(\lambda) d(\lambda)^{-1} = - \frac{W(f_-(\lambda), g_+(\lambda))}{W(f_-(\lambda), f_+(\lambda))}, \lambda > 0 \quad (4.29)$$

die Reflexionskoeffizienten von H bezüglich H_0 mit linken bzw. rechten Einfall sind.

Theorem 4.5. Es gelte (H.4.1) und $\lambda > 0$. Dann ist

$$S(\lambda) \in U(2), \lambda > 0, \quad (4.30)$$

t.B.: $S(\cdot)$ ist unitär $\forall \lambda > 0$. Speziell gilt:

$$\begin{aligned} |T(\lambda)|^2 + |R^e(\lambda)|^2 &= 1 = |T(\lambda)|^2 + |R^r(\lambda)|^2 \quad \lambda > 0 \\ |R^e(\lambda)| &= |R^r(\lambda)|, \quad \lambda > 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

$S(\cdot)$ ist stetig auf $(0, \infty)$.

Beweis: (4.31) folgt aus der Anmerkung (4.11), (4.22) und (4.28), (4.29). Stetigkeit folgt aus (4.5) und (4.9).

Die Phasenverschiebung $\delta(\lambda)$, $\lambda > 0$ von (H, H_0) ist gegeben durch

$$e^{2i\delta(\lambda)} := \det S(\lambda) = T(\lambda) / \overline{T(\lambda)}, \lambda > 0 \quad (4.32)$$

mit $\delta(\lambda) \in \mathbb{R} \forall \lambda > 0$. Da im allgemeinen $\delta(\lambda) \neq 0 \pmod{2\pi}$ ist, ist

$$S(\lambda) \notin SU(2) \quad \text{im allgemeinen} \quad (4.33)$$

Nun sollen noch die Streuwellenfunktionen Ψ_{\pm} (physikalischen Lösungen) von H eingeführt werden.

$$\Psi_{\pm}(\lambda, x) := d(\lambda)^{-1} f_{\pm}(\lambda, x), \quad \lambda > 0, x \in \mathbb{R} \quad (4.34)$$

wegen (4.8) gilt:

$$H \Psi_{\pm}(\lambda) = \lambda \Psi_{\pm}(\lambda), \quad \lambda > 0 \quad (4.35)$$

im Distributionensinn. Mit (4.5), (4.9) (4.13) erhält man

$$\Psi_{+}(\lambda, x) = \begin{cases} d(\lambda)^{-1} e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \\ c_{-}(\lambda) d(\lambda)^{-1} e^{-ikx} + e^{ikx} & x \rightarrow -\infty \end{cases} \\ = \begin{cases} T(\lambda) e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \\ e^{ikx} + R(\lambda) e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (4.36)$$

$$\lambda > 0, \quad k = \lambda^{1/2} > 0$$

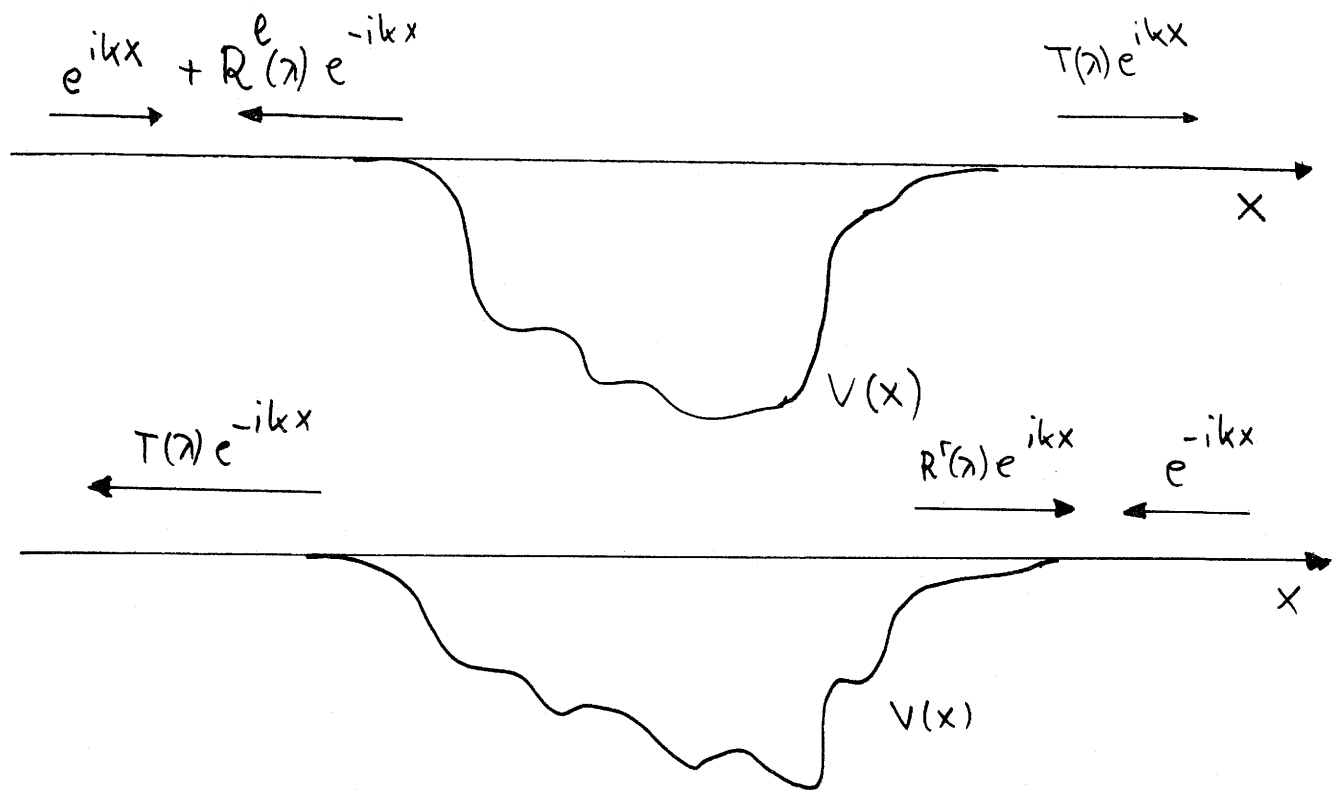
und

$$\Psi_{-}(\lambda, x) = \begin{cases} d(\lambda)^{-1} e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ c_{+}(\lambda) d(\lambda)^{-1} e^{ikx} + e^{-ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (4.37)$$

$$= \begin{cases} T(\lambda) e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ e^{-ikx} + R(\lambda) e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\lambda > 0, \quad k = \lambda^{1/2} > 0.$$

Intuitiv: Reflexion und Transmission von
(stationären) Wellen Ψ_{\pm}



Anmerkung: $S(\lambda)$ ist rechtsseitig stetig in λ , $\lambda \downarrow 0$.

Als nächstes betrachten wir die
Eigenwerte von H .

$$\sigma_p(H) = \{ \lambda_j < 0 \mid 1 \leq j \leq N \} \quad (4.38)$$

$N \in \mathbb{N}_0$. (Wenn $N = 0$, ist $\sigma_p(H) = \emptyset$).

Da alle Eigenwerte $\lambda_j < 0$ sind, kann man $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_N > 0$ einführen, dass

$$\lambda_j = -\alpha_j^2, \quad k(\lambda_j) := k_j = i\alpha_j, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (4.39)$$

Wegen Anmerkung 4.4 und (4.19) gilt

$$d(\lambda_j) = 0, \quad \dot{d}(\lambda_j) \neq 0, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (4.40)$$

Speziell sind wegen (4.15), $f_+(\lambda_j, x)$ und $f_-(\lambda_j, x)$, $1 \leq j \leq N$, linear abhängig,

$$f_-(\lambda_j, x) = \gamma_j f_+(\lambda_j, x), \quad 1 \leq j \leq N, x \in \mathbb{R} \quad (4.41)$$

wobei $\gamma_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da wegen (4.5)

$$f_{\pm}(\lambda_j, x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} e^{\mp \alpha_j x} + o(e^{\mp \alpha_j x}), \quad 1 \leq j \leq N, \quad (4.42)$$

sind sowohl f_+ und f_- exponentiell abfallend für $|x| \rightarrow \infty$, und daher

$$f_{\pm}(\lambda_j, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}), \quad 1 \leq j \leq N. \quad (4.43)$$

Wegen (4.8) gilt auch

$$\mathcal{L} f_{\pm}(\lambda_j) = \lambda_j f_{\pm}(\lambda_j) \in L^2(\mathbb{R}), \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.44)$$

und daher ist

$$f_{\pm}(\lambda_j, \cdot) \in \mathcal{D}(H), \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.45)$$

mit

$$H f_{\pm}(\lambda_j) = \lambda_j f_{\pm}(\lambda_j), \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.46)$$

$f_{+}(\lambda_j)$ (bzw. $f_{-}(\lambda_j)$) ist der Eigenvektor von H zum Eigenwert λ_j , $1 \leq j \leq N$.

Wir definieren nun die Normierungskonstanten $c_{\pm, j}$ durch:

$$c_{\pm, j} := \| f_{\pm}(\lambda_j, \cdot) \|_2^{-1}, \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.47)$$

Damit erhalten wir die Streudaten S_{\pm} für H :

$$S_{\pm} := \{ R^{\pm}(\lambda), \lambda > 0; \alpha_j, c_{\pm j}, 1 \leq j \leq N \} \quad (4.48)$$

Der "direct scattering step" besteht nun aus:

Gegeben sei das Potential V , berechne S_{+} (S_{-}), bzw. mathematisch: bestimme die Abbildung

$$L^1(\mathbb{R}, (1+x^2)dx) \ni V \longmapsto S_{\pm}(V) \quad (4.49)$$

Da die ganze Information in S_{\pm} im Prinzip in $f_{\pm}(\lambda, x)$, $g_{\pm}(\lambda, x)$, $\lambda, x \in \mathbb{R}$ und deren Ableitungen steckt (vgl. (4.28, 4.29) (4.15), (4.40), (4.47)), kann dieser Weg im Prinzip durch Iteration von (4.5) und (4.9) (und deren Ableitungen) gelöst werden.

Anmerkung: S_+ und S_- sind nicht unabhängig

z.B.: (4.41) impliziert

$$c_{+,j}^2 = \gamma_j^2 c_{-,j}^2 \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.50)$$

Beispiel 4.7: $V(x) = 0$, $H = H_0$, $\tau = \tau_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$

$$f_{\pm}(z, x) = g_{\pm}(z, x) = e^{\pm ikx}, \quad k(z) = \sqrt{z}, \quad \pm \operatorname{Im} k(z) \geq 0$$
$$z \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$d(z) = 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad T(\lambda) = 1, \quad \lambda \geq 0,$$

$$c_{\pm}(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad R^{\Gamma}(\lambda) = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad S(\lambda) = 1, \quad \lambda \geq 0$$

Beispiel 4.8: $V(x) = -\mu(\mu+1)\alpha^2 [\cosh(\alpha x + c)]^{-2}$

$$\mu \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

Lösung: siehe Flüge: Practical QM, Problem 39

Als nächstes untersuchen wir das inverse Streuproblem.

Wir gehen von der Variablen λ auf k über, und schreiben die Fortlösungen aus (4.5) und (4.9):

$$F_{\pm}(k, x) := f_{\pm}(k^2, x), \quad G_{\pm}(k, x) := g_{\pm}(k^2, x),$$

$$\operatorname{Im} k \geq 0, \quad k \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.51)$$

Iteriert man (4.5) für $F_{\pm}(k, x)$, und benutzt die Abschätzung

$$\left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right| \leq c_0 (1 + |\xi|)^{-1} e^{|\operatorname{Im} \xi|}, \quad \xi \in \mathbb{C}, \quad (4.52)$$

(c_0 ist eine Konstante)

so erhält man

$$F_{\pm}(k, x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{\pm}^{(n)}(k, x),$$

$$F_{\pm}^{(0)}(k, x) = e^{\pm ikx}, \quad F_{\pm}^{(n)}(k, x) = - \int_{\pm \infty}^{\pm \infty} dx' \frac{1}{k} \sin[k(x-x')] V(x') F_{\pm}^{(n-1)}(k, x')$$

(4.53)

Mit

$$|F_{\pm}^{(n)}(k, x)| \leq c_0' e^{\mp(\operatorname{Im} k)x} (n!)^{-1} \left| \int_x^{\pm\infty} dx' \frac{|x'|}{1+|k||x'|} |V(x')| \right|^n, \\ x \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.54)$$

Dies beweist:

$$|F_{\pm}(k, x)| \leq c_0'' e^{\mp(\operatorname{Im} k)x}, \quad \operatorname{Im} k \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^{\pm} \quad (4.55)$$

Anmerkung: Ist $(1+|\cdot|)V \in L^1(\mathbb{R})$, dann sind $F_{\pm}(k, x)$ analytisch in k für $\operatorname{Im} k > 0$ und stetig für $\operatorname{Im} k \geq 0$ wobei $x \in \mathbb{R}$ fix ist.

Ist $(1+|\cdot|^2)V \in L^1(\mathbb{R})$ dann ist auch

$\frac{\partial}{\partial k} F_{\pm}(k, x)$ stetig (analytisch) für $\operatorname{Im} k \geq 0$.

($\operatorname{Im} k > 0$).

Verwendet man die Abschätzung (4.55)

und setzt in (4.5) ein, so ergibt sich

$$|F_{\pm}(k, x) - e^{\pm ikx}| \leq \frac{c_0}{|k|} \left| \int_x^{\pm\infty} dx' e^{\pm \operatorname{Im} k(x-x')} |V(x')| c_0'' e^{\mp(\operatorname{Im} k)x'} \right| \\ \leq \frac{c_1}{|k|} e^{\mp \operatorname{Im} k x} \left| \int_x^{\pm\infty} dx' |V(x')| \right|, \quad (4.56) \\ k \neq 0$$

bzw.

$$\left| F_{\pm}(k/x) - e^{\pm i k x} \right| \leq C_2 \frac{1 + \max(0, \mp x)}{1 + |k|} e^{\mp \operatorname{Im} k x} \left| \int_x^{\pm \infty} dx' (1 + |x'|) |V(x')| \right|$$

etc. (4.57)

Lemma 4.9.

Sei $\Phi(\xi)$ analytisch in ξ für $\operatorname{Im} \xi > 0$

und es existiere ein $p \in \mathbb{R}$ mit

$$\int d\xi |\Phi(\xi + i\eta)|^2 = O(e^{2p\eta}), \quad \forall \eta > 0. \quad (4.58)$$

Dann konvergiert $\Phi(\cdot + i\eta)$ für $\eta \rightarrow 0$ in $L^2(\mathbb{R}, d\xi)$ gegen ein Element $\Phi(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}, d\xi)$ genau

dann, wenn

$$s\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R d\xi \Phi(\xi) e^{-i\xi q} = 0, \quad \forall q < -p. \quad (4.59)$$

Anmerkung: Dies ist eine Variation des

Paley - Wiener Theorems.

Nun wird Lemma 4.9 auf
 $[F_{\pm}(k, x) - e^{\pm ikx}]$ angewendet.

$F_{\pm}(k, x)$ ist analytisch für $\text{Im } k > 0$
 (für jedes feste $x \in \mathbb{R}$) und stetig
 auf $\text{Im } k = 0$. Mit (4.56) gilt:

$$F_{\pm}(k, x) - e^{\pm ikx} = O(|k|^{-1}) \text{ für } |k| \rightarrow \infty \text{ (4.60)}$$

$\text{Im } k = 0$

gleichförmig in $x \in \mathbb{R}$.

$$\int_{\mathbb{R}} dx |F_{\pm}(x+i\eta, x) - e^{\pm i(x+i\eta)x}|^2 = O(e^{-2\eta x}) \text{ (4.61)}$$

$$\forall \eta > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Damit erhält man mit Lemma 4.9:

$$K_{\pm}(x, y) := (2\pi)^{-1} \text{s-lim}_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} dk [F_{\pm}(k, x) - e^{\pm ikx}] e^{\mpiky} = 0$$

für $y \leq x$. (4.62)

$$K_{\pm}(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}, dy), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (4.63)}$$

Nimmt man die inverse Fouriertransformation von (4.62) erhält man

$$\begin{aligned}
 F_{\pm}(k, x) - e^{\pm ikx} &= \delta \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dy k_{\pm}(x, y) e^{\pmiky} \\
 &= \pm s \lim_{R \rightarrow \infty} \int_X^{\pm R} dy k_{\pm}(x, y) e^{\pmiky} \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

und damit

$$F_{\pm}(k, x) = e^{\pm ikx} \pm s \lim_{R \rightarrow \infty} \int_X^{\pm R} dy k_{\pm}(x, y) e^{\pmiky} \quad (4.65)$$

$$\text{Im } k \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Anmerkung Die wichtigste Eigenschaft der Kerne $k_{\pm}(x, y)$ in (4.65) ist, dass sie unabhängig von k sind! Diese Darstellung wird in der Literatur auch Levin-Darstellung genannt.

Führt man

$$k_{\pm}(x, y) = \frac{1}{2} B_{\pm}\left(x, \frac{y-x}{2}\right) \quad (4.66)$$

ein, so kann (4.65) geschrieben werden

$$F_{\pm}(k, x) = e^{\pm ikx} \cdot \left[1 \pm \int_0^{\pm\infty} dz B_{\pm}(x, z) e^{\pm 2ikz} \right], \quad (4.67)$$

$\text{Im } k \geq 0, x \in \mathbb{R}$

Setzt man nun (4.65) in (4.5) ein, um eine Integralgleichung für

k_{\pm} zu erhalten, ergibt sich:

$$\int_x^{\infty} dy k_{\pm}(x, y) e^{iky} = - \int_x^{\infty} dx' \frac{1}{k} \sin[k(x-x')] v(x') e^{ikx'} - \int_x^{\infty} dx' \frac{1}{k} \sin[k(x-x')] v(x') \int_{x'}^{\infty} dx'' k_{\pm}(x', x'') e^{ikx''} =: I_1 + I_2 \quad (4.68)$$

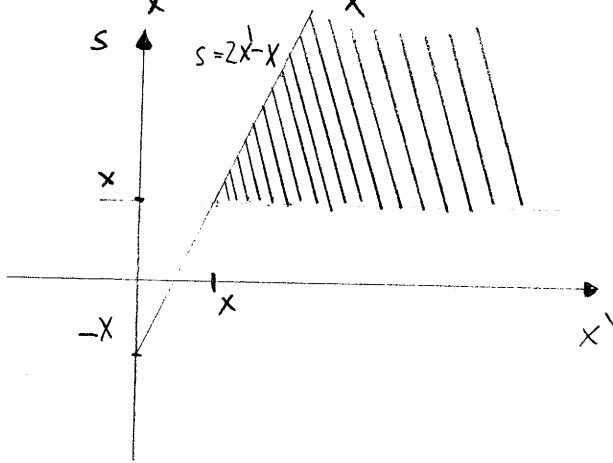
Benutzt man

$$\frac{1}{k} \sin[k(x'-x)] e^{ikx'} = \frac{1}{2} \int_{x'-x}^{2x'-x} ds e^{iks} \quad (4.69)$$

$$\frac{1}{k} \sin[k(x'-x)] e^{ikx''} = \frac{1}{2} \int_{x-x'+x''}^{x'-x+x''} ds e^{iks} \quad (4.70)$$

erhält man in (4.68)

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_x^\infty dx' v(x') \int_x^{2x'-x} ds e^{iks} = \frac{1}{2} \int_x^\infty ds e^{iks} \int_{\frac{x+s}{2}}^\infty dx' v(x') \quad (4.71)$$



Die Vertauschung der Integrationsgrenzen ist möglich, da $V \in L^1(\mathbb{R})$, $\text{Im } k > 0$; (Theorem von Fubini).

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_x^\infty dx' v(x') \int_{x'}^\infty dx'' K_+(x', x'') \int_{x-x'+x''}^{x'-x+x''} ds e^{iks} \\ = \frac{1}{2} \int_x^\infty ds e^{iks} \left[\int_x^{(x+s)/2} dx' v(x') \int_{s+x-x'}^{x'-x+x''} dx'' K_+(x', x'') \right. \\ \left. + \int_{(x+s)/2}^\infty dx' v(x') \int_{x'}^{s+x'-x} dx'' K_+(x', x'') \right] \quad (4.72)$$

wobei von

$$x \leq x' \leq \infty, \quad x' \leq x'' < \infty, \quad x - x' + x'' \leq s \leq x' - x + x''$$

$$\text{auf } x \leq s \leq \infty, \quad x \leq x' \leq \frac{x+s}{2}, \quad s + x - x' \leq x'' \leq s + x' - x$$

$$x \leq s \leq \infty, \quad \frac{x+s}{2} \leq x' \leq \infty, \quad x' \leq x'' \leq s + x - x$$

Diese Vertauschung der Grenzen kann im Nachhinein gerecht fertigt werden, nachdem hinreichende Schranken für $K_+(x', x'')$ erhalten wurden, vgl. Gleichung (4.77).

Setzt man (4.71) und (4.72) in (4.68) ein, und berechnet die inverse Fouriertransformation so erhält man:

$$\begin{aligned}
 K_+(x, y) &= \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} dx' V(x') + \frac{1}{2} \int_x^{(x+y)/2} dx' V(x') \int_{y+x-x'}^{y+x'-x} dx'' K_+(x', x'') \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} dx' V(x') \int_{x'}^{y+x'-x} dx'' K_+(x', x''), \quad -\infty < x \leq y < \infty
 \end{aligned}
 \tag{4.73}$$

(4.73) kann nun iteriert werden,

$$K_+(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} K_+^{(n)}(x, y), \tag{4.74}$$

$$K_+^{(0)}(x, y) := \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} dx' V(x'),$$

$$\begin{aligned}
 K_+^{(n+1)}(x, y) &:= \frac{1}{2} \int_x^{(x+y)/2} dx' V(x') \int_{y+x-x'}^{y+x'-x} dx'' K_+^{(n)}(x', x'') \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} dx' V(x') \int_{x'}^{y+x'-x} dx'' K_+^{(n)}(x', x''),
 \end{aligned}
 \tag{4.75}$$

$n \in \mathbb{N}_0$

Man erhält nun die Schranke

$$|k_+^{(n)}(x, y)| \leq \frac{1}{n!} R_0((x+y)/2) N(x)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.76)$$

und daher

$$|k_+(x, y)| \leq \frac{1}{2} R_0((x+y)/2) e^{N(x)}, \quad (4.77)$$

wobei

$$N(x) := \int_x^\infty dx' (x' - x) |V(x')|, \quad R_0(z) := \int_z^\infty dx' |V(x')| \quad (4.78)$$

Aus Gleichung (4.73) erhält man:

$$k_+(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty dx' V(x'), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.79)$$

und daher gilt:

$$-2 \frac{d}{dx} k_+(x, x) = V(x) \quad \text{für a.e. } x \in \mathbb{R} \quad (4.80)$$

Für $k_-(x, y)$ kann analog vorgegangen werden:

$$k_-(x, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dx' V(x'), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.81)$$

$$2 \frac{d}{dx} k_-(x, x) = V(x) \quad \text{für a.e. } x \in \mathbb{R} \quad (4.82)$$

Die entsprechenden Gleichungen (4.73), (4.80), (4.82)

lauten für $B_{\pm}(x, y)$:

$$B_{\pm}(x, y) = \pm \int_{x+y}^{\pm\infty} dx' V(x') + \int_0^y dx'' \int_{x+y-x''}^{\pm\infty} V(x') B_{\pm}(x', x'') \quad (4.83)$$

$$x \in \mathbb{R}, y \geq 0,$$

$$B_{\pm}(x, 0) = \pm \int_x^{\pm\infty} dx' V(x'), \quad x \in \mathbb{R} \quad (4.84)$$

$$V(x) = -\partial_x B_+(x, 0) = \partial_x B_-(x, 0) \quad \text{für a.e. } x \in \mathbb{R}. \quad (4.85)$$

Man kann auch zeigen, dass B_{\pm} die
"Wellengleichung" erfüllt

$$\partial_x [B_{\pm, y}(x, y) - B_{\pm, x}(x, y)] \mp V(x) B_{\pm}(x, y) = 0, \quad (4.86)$$

$$y \geq 0$$

bzw.

$$k_{\pm, xx}(x, y) - k_{\pm, yy}(x, y) = \pm V(x) k_{\pm}(x, y) \quad (4.87)$$

$$y \geq x$$

Bis jetzt haben wir immer noch das direkte Streifenproblem behandelt. Nun wollen wir den umgekehrten Schritt machen.

Wir definieren

$$s(k) := S(\lambda), \quad \lambda = k^2 \geq 0, \quad k \geq 0, \quad (4.88)$$

$$t(k) := T(\lambda), \quad r_i^e(k) := R_i^e(\lambda), \quad k \geq 0$$

und dann setzen wir $s(k)$ für $k \leq 0$ fort durch

$$t(-k) := \overline{t(k)}, \quad r_i^e(-k) = \overline{r_i^e(k)}, \quad k \geq 0 \quad (4.89)$$

vgl. auch Anmerkung 4.2.

Als nächstes führen wir

$$m_{\pm}(k, x) = e^{\mp ikx} F_{\pm}(k, x), \quad \operatorname{Im} k \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.90)$$

$$n_{\pm}(k, x) = t(k) e^{\pm ikx} F_{\mp}^e(k, x), \quad \operatorname{Im} k \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.91)$$

ein. Wegen (4.55) sind $m_{\pm}(k, x)$ analytisch für $\operatorname{Im} k > 0$ und stetig für $\operatorname{Im} k = 0$ und gleichmäßig beschränkt.

$$m_{\pm}(k, x) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right) \quad \text{für } |k| \rightarrow \infty, \operatorname{Im} k \geq 0. \quad (4.92)$$

Desgleichen ist $n_{\pm}(k, x)$ meromorph für $\text{Im} k > 0$ mit einfachen Polen an den Stellen $k_j = ix_j$, $1 \leq j \leq N$ (vgl. (4.39)) und stetig auf $\text{Im} k = 0$.

Wegen (4.19) und (4.27), können die Residuen von $n_{\pm}(k, x)$ leicht berechnet werden:

$$\begin{aligned} \text{Res } n_{\pm}(k, x) \Big|_{k=ix_j} &= \text{Res } t(k) \Big|_{k=ix_j} e^{\mp ix_j x} F_{\mp}(ix_j, x) = \\ &= \left[i \int_{\mathbb{R}} dx' F_{+}(ix_j, x') F_{-}(ix_j, x') \right]^{-1} e^{\mp ix_j x} F_{\mp}(ix_j, x) \\ &= -i \cdot C_{\pm, j}^2 \cdot e^{\mp 2ix_j x} m_{\mp}(ix_j, x), \quad 1 \leq j \leq N \\ &\quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.93)$$

vgl. (4.47), (4.51). Weiters ist

$$n_{\pm}(k, x) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right) \quad \text{für } |k| \rightarrow \infty, \text{Im} k \geq 0 \quad (4.94)$$

Wir schreiben nun Gleichung (4.13) als

$$n_{\pm}(k, x) = r_{\pm}^{\pm}(k) e^{\pm 2ikx} m_{\pm}(k, x) + m_{\pm}(-k, x) \quad (4.95)$$

$k, x \in \mathbb{R}$

Wegen (4.20) (4.21), (4.28) erhält man

$$r_{\pm}^{\pm}(k) = s\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} dt A_{\pm}(t) e^{\mp 2ikt}, \quad k \in \mathbb{R} \quad (4.96)$$

Für (4.67) erhält man

$$m_{\pm}(k, x) = 1 \pm \int_0^{\pm\infty} dy B_{\pm}(x, y) e^{\pm 2iky}$$

$\text{Im } k \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad B_{\pm}(x, y) = 0 \quad y \lesseqgtr 0 \quad (4.97)$

und von der Meromorphieität von

$n_{\pm}(k, x)$ für $\text{Im } k > 0$ zusammen mit

(4.94) erhält man

$$n_{\pm}(k, x) = 1 + s\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dy \widetilde{B}_{\pm}(x, y) e^{\pm 2iky} \quad (4.98)$$

$\text{Im } k \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$

wobei (wie im Fall von $B_{\pm}(x, y)$ vgl. Seite 19, 21)

$$\widetilde{B}_{\pm}(x, \cdot) \in L^2((0, \pm\infty), dy) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.99)$$

Es besteht jedoch ein wichtiger Unterschied:
Während $m_{\pm}(k, x)$ analytisch für $\text{Im } k > 0$

ist, woraus $B_{\pm}(x, y) = 0$, $y \lesseqgtr 0$ folgt, ist wenn $n_{\pm}(k, x)$ meromorph für $\text{Im } k > 0$, mit Polen erster Ordnung an den Stellen $k_j = i x_j$, $1 \leq j \leq N$. Deshalb ergibt das Kontour = Integral (z.B.: Cauchy-Theorem) im

Beweis von Lemma 4.9 nicht null. Man erhält $2\pi i \sum \text{Residuen}$ (innerhalb von Δ)

Angewendet auf $\tilde{B}_{\pm}(x, y)$, $y \lesseqgtr 0$ erhält man

$$\tilde{B}_{\pm}(x, y) = -2i \sum_{j=1}^N \text{Res } n_{\pm}(k, x) \Big|_{k=i x_j} e^{\mp 2 x_j y} \quad (4.100)$$

$x \in \mathbb{R}, y \lesseqgtr 0$

Wegen (4.93) ergibt sich

$$\tilde{B}_{\pm}(x, y) = -2 \sum_{j=1}^N c_{\pm, j}^2 e^{\mp 2 x_j (x+y)} m_{\pm}(i x_j, x) =$$

$$= -2 \sum_{j=1}^N c_{\pm, j}^2 e^{\mp 2 x_j (x+y)} \left[1 \pm \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pm R} dt B_{\pm}(x, t) e^{\mp 2 x_j t} \right],$$

$x \in \mathbb{R}, y \lesseqgtr 0$ (4.101)

Nimmt man die Fouriertransformierte von (4.95) so erhält man

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dk [n_{\pm}(k, x) - 1] e^{\pm 2iky} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dk [m_{\pm}(-k, x) - 1] e^{\pm 2iky} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dk r_{\pm}^{\epsilon}(k) e^{\pm 2ik(x+y)} [m_{\pm}(k, x) - 1 + 1], y \in \mathbb{R} \quad (4.102)$$

und daher

$$\tilde{B}_{\pm}(x, -y) = B_{\pm}(x, y) + A_{\pm}(x+y) \pm \int_{\mathbb{R}} dz B_{\pm}(x, z) A_{\pm}(x+y+z), y \in \mathbb{R}. \quad (4.103)$$

Verwendet man (4.101), $B_{\pm}(x, y) = 0$ für $y \lesssim 0$

so ergibt sich insgesamt:

$$B_{\pm}(x, y) \pm \int_0^{\pm\infty} dz B_{\pm}(x, z) \omega_{\pm}(x+y+z) + \omega_{\pm}(x+y) = 0 \quad (4.104) \quad y \geq 0$$

wobei

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}(z) &= 2 \sum_{j=1}^N c_{\pm j}^2 e^{\mp 2\alpha_j z} + A_{\pm}(z) \\ &= 2 \sum_{j=1}^N c_{\pm j}^2 e^{\mp 2\alpha_j z} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} dk r_{\pm}^{\epsilon}(k) e^{\pm 2ikz} \quad (4.105) \end{aligned} \quad , z \in \mathbb{R}.$$

Schreibt man (4.104) und (4.105) für die Größe $k_{\pm}(x, y)$, erhält man:

$$k_{\pm}(x, y) \pm \int_x^{\pm\infty} dz k_{\pm}(x, z) \Omega_{\pm}(z+y) + \Omega_{\pm}(x+y) = 0, \quad (4.106)$$

$x \leq y$

wobei

$$\Omega_{\pm}(t) := \sum_{j=1}^N c_{\pm, j}^2 e^{\mp x_j t} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dk r_{\pm}^r(k) e^{\pm ikt}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.107)$$

Die Gleichung (4.106) heißt Marchenko-Gleichung.

Gleichung (4.104) und (4.105) bzw. (4.106) und (4.107)

sind die Grundlagen für die inverse

Streutheorie. Sind die Streudaten

S_+ (bzw. S_-) aus (4.48) gegeben, so sind

w_+ (bzw. w_-) und Ω_+ (bzw. Ω_-) vollständig

bestimmt und man kann die Gleichungen

(4.104) oder (4.106) eindeutig für $B_+(x, y)$

(bzw. $B_-(x, y)$ oder $k_+(x, y)$ (bzw. $k_-(x, y)$) durch

Iterationen lösen.

Das Potential V , das zu diesen Streudaten S_{\pm} gehört, berechnet man mit den Gleichungen (4.85) oder (4.80), (4.82)

$$V(x) = \mp 2 \frac{d}{dx} k_{\pm}(x, x) \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R} \quad (4.108)$$

oder

$$V(x) = \mp 2 \partial_x B_{\pm}(x, 0_{\pm}) \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R} \quad (4.109)$$

Man sieht auch in den Gleichungen (4.105), (4.107), dass die Kenntnis der Streumatrix $S(\lambda)$, bzw. der Reflexionskoeffizienten $r^{\pm}(k)$ allein nicht ausreicht um das Potential eindeutig zu bestimmen, falls Eigenwerte existieren.

Auch müssen die Normierungskonstanten $C_{\pm, j} > 0$, die zu den Eigenwerten $\lambda_j = -\alpha_j^2$, $1 \leq j \leq N$, gehören festgelegt werden.

Für die Frage der Eindeutigkeit von $V(x)$, das heißt, ist $V(x)$ welches mittels (4.108), (4.109) berechnet wird das einzige Potential, das die Streudaten S_{\pm} liefert oder existieren auch noch andere, sei auf Dodd [1] p. 188 Theorem 4.3 verwiesen.

5. Reflexionslose Potentiale

In diesem Abschnitt werden alle reflexionsfreien Potentiale betrachtet, d.h. alle Potentiale die zu einer Streumatrix der Form

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} T(\lambda) & 0 \\ 0 & T(\lambda) \end{pmatrix} = T(\lambda) \cdot \mathbb{1}, \lambda \geq 0, \quad (5.1)$$
$$R^{\pm}(\lambda) = 0, \quad |T(\lambda)| = 1, \lambda \geq 0$$

führen.

Speziell ist dann

$$r^{\pm}(k) = 0, \quad k \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

und die Integralgleichungen (4.104) bzw. (4.106) können daher explizit gelöst werden. Wir betrachten nur (4.106) Dann ergibt (5.2)

$$\underline{R}_{\pm}(t) = \sum_{j=1}^N c_{\pm, j}^2 e^{\mp \kappa_j t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

und

$$0 = \sum_{j=1}^N c_{-j}^2 e^{\mp \alpha_j(x+y)} + k_{\pm}(x, y) \pm \sum_{j=1}^N c_{\pm j}^2 \int_x^{\pm\infty} dz k_{\pm}(x, z) e^{\mp \alpha_j(z+y)} \quad (5.4)$$

$x \geq y.$

Daraus ergibt man, daß $k_{\pm}(x, y)$ von der Form

$$k_{\pm}(x, y) = \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{\pm, j}(x) e^{\mp \alpha_j y}, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (5.5)$$

ist.

Man definiert

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{\pm}(x) &:= (\tilde{k}_{\pm, 1}(x), \dots, \tilde{k}_{\pm, N}(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \tilde{d}_{\pm}(x) &:= (-c_{\pm, 1}^2 e^{\mp \alpha_1 x}, \dots, -c_{\pm, N}^2 e^{\mp \alpha_N x}), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.6) \\ \tilde{\Lambda}_{N, \pm}(x) &:= \left[c_{\pm, j}^2 (\alpha_j + \alpha_\ell)^{-1} e^{\mp (\alpha_j + \alpha_\ell) x} \right]_{j, \ell=1}^N, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(5.5) eingesetzt in (5.4) kann nun in folgender Form geschrieben werden:

$$\left[1 + \tilde{\Lambda}_{N, \pm}(x) \right] \tilde{k}_{\pm}(x) = \tilde{d}_{\pm}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.7)$$

z.B.)

$$\tilde{k}_{\pm, j}(x) + c_{\pm, j}^2 e^{\mp x_j x} \sum_{e=1}^N \frac{e^{\mp x_e x}}{x_j + x_e} \tilde{k}_{\pm, e}(x) = -c_{\pm, j}^2 e^{\mp x_j x}, \quad (5.8)$$

$$1 \leq j \leq N, \quad x \in \mathbb{R}$$

Man hat daher nur ein lineares Gleichungssystem für die N Unbekannten $\tilde{k}_{\pm, j}(x)$ zu lösen!

Lemma 5.1. $\det [1 + \tilde{\Lambda}_{N, \pm}(x)] > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Man definiert die Diagonalmatrix

$$D_{\pm} := \left[c_{\pm, j}^{-1} \delta_{j,e} \right]_{j,e=1}^N \quad (5.9)$$

und betrachtet die Ähnlichkeitstransformation

$$\Lambda_{N, \pm}(x) := D_{\pm} \tilde{\Lambda}_{N, \pm}(x) D_{\pm}^{-1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.10)$$

$$= \left[c_{\pm, j} c_{\pm, e} \frac{e^{\mp (x_j + x_e) x}}{x_j + x_e} \right]_{j,e=1}^N.$$

Die Matrix $\Lambda_{N,\pm}(x)$ ist positiv definit, da

$$\begin{aligned}
 (\vec{z}, \Lambda_{N,\pm}(x) \vec{z}) &= \sum_{j,e=1}^N z_j z_e c_{\pm,j} c_{\pm,e} \frac{e^{\mp(x_j+x_e)x}}{x_j+x_e} = \\
 &= \pm \int_x^{\pm\infty} dx' \sum_{j,e=1}^N z_j z_e c_{\pm,j} c_{\pm,e} e^{\mp(x_j+x_e)x'} \\
 &= \pm \int_x^{\pm\infty} dx' \left[\sum_{j=1}^N z_j c_{\pm,j} e^{\mp x_j x'} \right]^2 > 0 \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

$$\forall \vec{z} = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

Da Ähnlichkeits transformationen die Determinante invariant lassen,

$$\text{d.h. } \det[1 + \tilde{\Lambda}_{N,\pm}(x)] = \det[1 + \Lambda_{N,\pm}(x)], \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.12)$$

folgt das gewünschte Resultat. \square

Daher kann man (5.7) mit der Kramer'schen Regel lösen, und man erhält

$$\tilde{k}_{\pm,j}(x) = \det(1 + \tilde{\Lambda}_{N,\pm,j}(x)) / \det(1 + \tilde{\Lambda}_{N,\pm}(x)), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.13)$$

wobei $\tilde{\Delta}_{N,\pm,j}(x)$ die Matrix $\tilde{\Delta}_{N,\pm}(x)$ ist,
in welcher die j -te Spalte durch den
Vektor $\tilde{d}_{\pm}(x)$ ersetzt würde.

Definiert man (vgl. (4.65) und (5.5))

$$\begin{aligned}
 F_{\pm}(k,x) &= e^{\pm ikx} \pm \int_x^{\pm\infty} dy \cdot k_{\pm}(x,y) e^{\pmiky} \\
 &= \left\{ 1 \mp \sum_{j=1}^N (\alpha_j - ik)^{-1} \tilde{k}_{\pm,j}(x) e^{\mp\alpha_j x} \right\} e^{\pm ikx} \\
 &\quad k, x \in \mathbb{R},
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

dann gilt:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L} F_{\pm}(k))(x) &= k^2 F_{\pm}(k,x) \\
 \mathcal{L} &:= -\frac{d^2}{dx^2} + V(x).
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Andererseits ergibt die direkte Berechnung

$$\begin{aligned}
 [(\mathcal{L} - k^2) F_{\pm}(k)](x) &= \left\{ \mp \sum_{j=1}^N (\alpha_j - ik)^{-1} [(\mathcal{L} + \alpha_j^2) \tilde{k}_{\pm,j}(x)] e^{\mp\alpha_j x} \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^N \tilde{k}_{\pm,j}(x) e^{\mp\alpha_j x} \right] + V(x) \right\} e^{\pm ikx} = 0, \quad k, x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Wendet man $\gamma + \alpha_j^2$ auf die j -te Gleichung in (5.8) erhält man

$$\left((\gamma + \alpha_j^2) \tilde{k}_{\pm, j} \right) (x) + c_{\pm, j}^2 e^{\mp \alpha_j x} \sum_{e=1}^N (\alpha_j + \alpha_e)^{-1} e^{\mp \alpha_e x} \left((\gamma - \alpha_e^2) \tilde{k}_{\pm, e} \right) (x) = 0$$

$x \in \mathbb{R}, \quad (5.17)$

d.h.:

$$\left[1 + \tilde{\Gamma}_{N, \pm} (x) \right] \left((\gamma + \alpha^2) \tilde{k}_{\pm} \right) (x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.18)$$

wobei

$$(\gamma + \alpha^2) \tilde{k}_{\pm} = \left((\gamma + \alpha_1^2) \tilde{k}_{\pm, 1}, \dots, (\gamma + \alpha_N^2) \tilde{k}_{\pm, N} \right). \quad (5.19)$$

Da $\left[1 + \tilde{\Gamma}_{N, \pm} (x) \right]^{-1}$ existiert (Lemma 5.1)

folgt

$$\left(\gamma + \alpha_j^2 \right) \tilde{k}_{\pm, j} (x) = 0, \quad 1 \leq j \leq N \quad (5.20)$$

Mit (5.16) ergibt dies Aus (4.108) folgt

$$V(x) = \pm 2 \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^N \tilde{k}_{\pm, j} (x) e^{\mp \alpha_j x} \right], \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.21)$$

Man definiert nun

$$k_{\pm, j} (x) = c_{\pm, j}^{-1} \tilde{k}_{\pm, j} (x), \quad 1 \leq j \leq N, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.22)$$

$$d_{\pm, j} (x) = -c_{\pm, j} e^{\mp \alpha_j x}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.23)$$

$$k_{\pm} (x) := \left(k_{\pm, 1} (x), \dots, k_{\pm, N} (x) \right), \quad d_{\pm} (x) := \left(d_{\pm, 1} (x), \dots, d_{\pm, N} (x) \right), \quad (5.24)$$

und schreibt nun (5.7) als

$$\left[1 + \Delta_{N, \pm}^{(x)} \right] k_{\pm}(x) = d_{\pm}(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.25)$$

Analog erhält man für (5.5)

$$k_{\pm}(x, x) = - \sum_{j=1}^N k_{\pm, j}(x) d_{\pm, j}(x) \quad (5.26)$$

$$= - \left((1 + \Delta_{N, \pm}^{(x)})^{-1} d_{\pm}(x), d_{\pm}(x) \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Benutzt man, daß

$$\frac{d}{dx} \ln \left\{ \det \left[1 + \Delta_{N, \pm}^{(x)} \right] \right\} = \text{Tr} \left\{ \left[1 + \Delta_{N, \pm}^{(x)} \right]^{-1} \Delta_{N, \pm}^{(x)} \right\} \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.27)$$

und

$$\left[\Delta_{N, \pm}^{(x)} \right]_{e, m} = \mp c_{\pm, e} c_{\pm, m} e^{\mp (x_e + x_m) x}, \quad 1 \leq e, m \leq N, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.28)$$

und

$$\Delta_{N, \pm}^{(x)} = \mp \begin{pmatrix} d_{\pm, 1}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{\pm, N}(x) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{\pm, 1}(x) & \dots & d_{\pm, N}(x) \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.29)$$

So erhält man

$$\begin{aligned} & \pm \frac{d}{dx} \ln \left\{ \det [1 + \Lambda_{N, \pm}(x)] \right\} = \\ & = - \operatorname{Tr} \left\{ (1 + \Lambda_{N, \pm}(x))^{-1} \begin{pmatrix} d_{\pm, 1}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{\pm, N}(x) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{\pm, 1}(x) & \dots & d_{\pm, N}(x) \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ & = - \left((1 + \Lambda_{N, \pm}(x))^{-1} d_{\pm}(x), d_{\pm}(x) \right) = k_{\pm}(x, x), x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Insgesamt erhält man

Theorem 5.2. Alle reflexionslosen Potentiale V mit $V \in L^1(\mathbb{R}, (1+x^2)dx)$ sind vom Typ

$$V_N(x) = \mp 2 \frac{d}{dx} k_{\pm}(x, x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left\{ \det [1 + \Lambda_{N, \pm}(x)] \right\} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.31)$$

Anmerkung 5.3: Man kann sogar zeigen, daß

$$V_N(x) = -4 \sum_{j=1}^N \alpha_j \psi_j(x)^2 < 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.32)$$

gilt, wobei

$$\psi_j(x) := \|k_{\pm, j}\|^{-1} k_{\pm, j}(x), \quad 1 \leq j \leq N, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{ist} \\ \text{und daher } \psi_j \in \mathcal{D}(H) \quad \text{und} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L} \psi_j)(x) &= -x_j^2 \psi_j(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad H \psi_j = -x_j^2 \psi_j \\
 \text{ist.} & \quad 1 \leq j \leq N. \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

Beispiel 5.5. $N=1$

$$\begin{aligned}
 V_1(x) &= -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left[1 + c_{1,\pm}^2 e^{\mp 2x_1 x} (2x_1)^{-1} \right] \\
 &= -2 x_1^2 \left\{ \cosh \left[x_1 x \mp \frac{1}{2} \ln (c_{1,\pm}^2 (2x_1)^{-1}) \right] \right\}^{-2}, \quad x \in \mathbb{R}. \\
 & \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

Anmerkung 5.6 Gleichung (5.27) folgt aus
 der Berechnung

$$\det [1+A] = \exp \left\{ \text{Tr} [\ln (1+A)] \right\}, \quad (5.36)$$

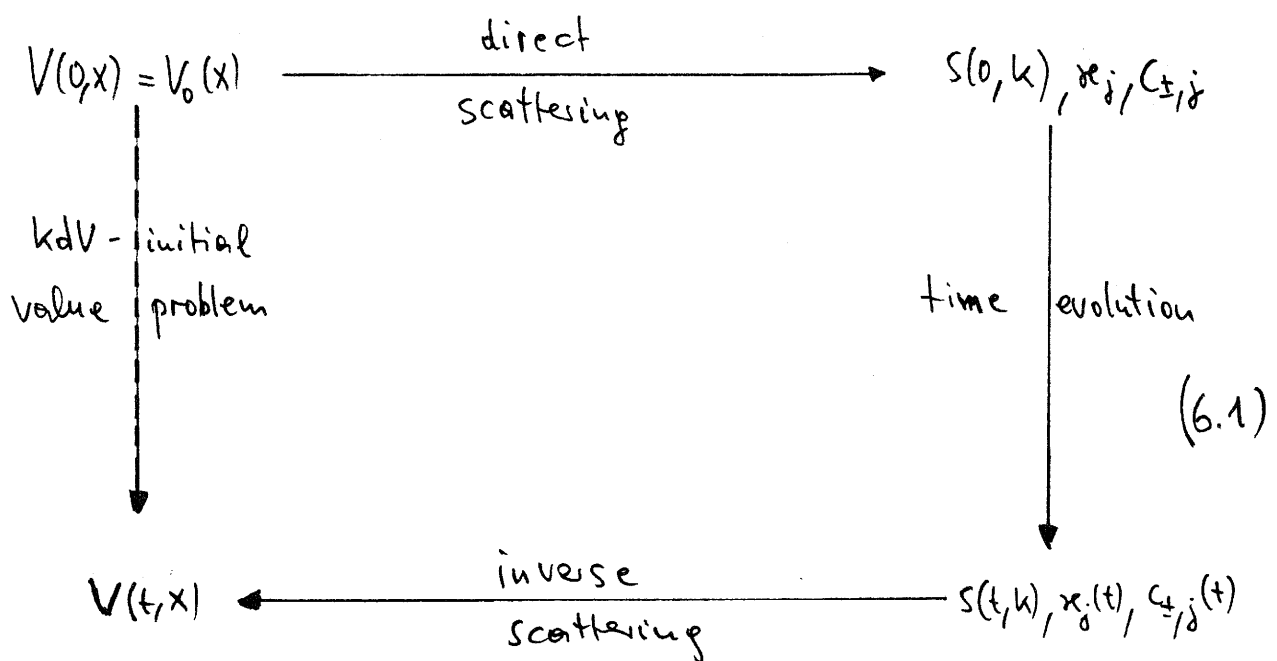
$$1+A \geq \varepsilon > 0$$

$$\det (1+A) = \prod_1^N (1+\lambda_j)$$

$$\text{tr} (1+A) = \sum_1^N (1+\lambda_j)$$

6. Die inverse Streutheorie Methode angewendet auf die KdV-Gleichung

Die grundlegende Idee von C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal und R. M. Miura zur Lösung des Anfangswertproblems der KdV-Gleichung (d.h.: finde die Lösung $V(t, x)$ der KdV(V) = 0, welche $V(0, x) = V_0(x)$ wobei V_0 eine gegebene Funktion für $t = 0$ ist) ist im folgenden Diagramm dargestellt:



Beispiel 6.1 linearisierte KdV-Gleichung

$$V_t + V_{xxx} = 0, \quad V(0, x) = V_0(x), \quad V_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Fouriertransformierte: $V_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dk A(k) e^{-ikx}$,

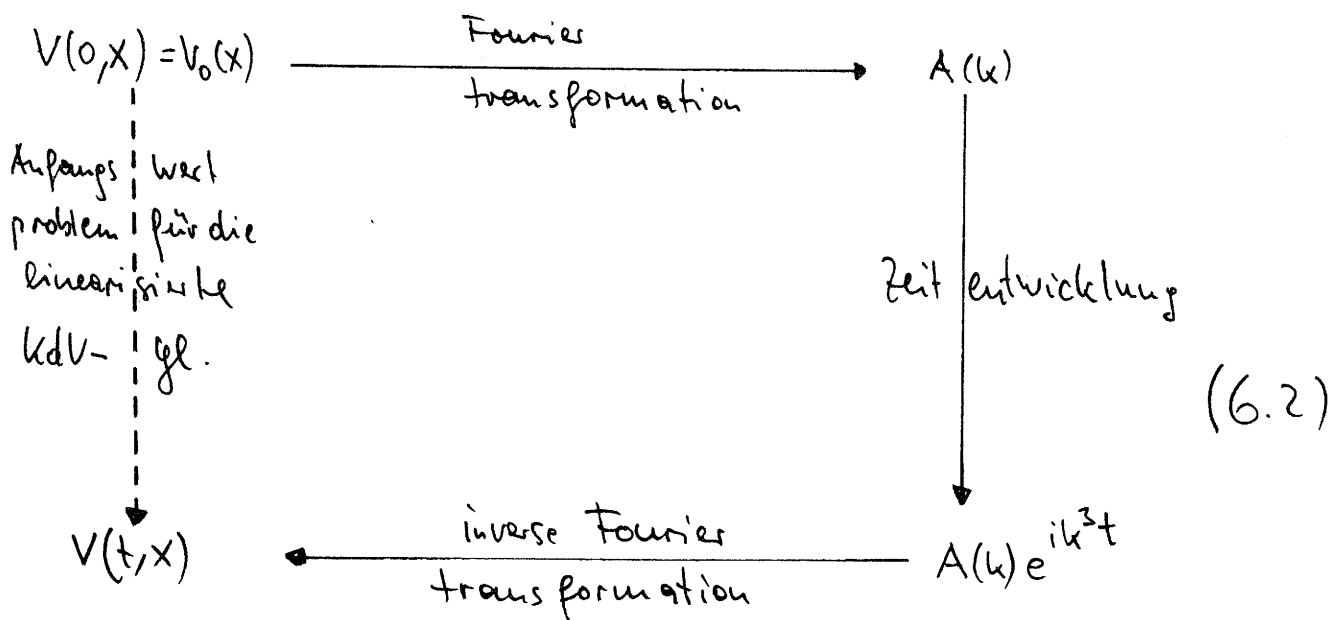
$$V(t, x) = \int_{\mathbb{R}} dk A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

eingesetzt in

$V_t + V_{xxx} = 0$ liefert $\omega(k) = -k^3$, d.h.,

$$V(t, x) = \int_{\mathbb{R}} dk A(k) e^{ik^3 t} e^{ikx}$$

Das zu (6.1) analoge Diagramm ist:



Der einzige Schritt, der in Diagramm (6.1) noch fehlt, ist die Bestimmung der Zeitentwicklung oder Streudaten S_{\pm} (vgl. (4.48)).

Angenommen $V(t, x)$ erfülle die Hypothese

(H.6.2). Verfülle (H.3.1) und
 $V(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}; (1+x^2) dx) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Definiere

$$\mathcal{T}(t) := -\frac{d^2}{dx^2} + V(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.3)$$

den Differentialausdruck der mit dem Schrödingeroperator in $L^2(\mathbb{R})$ verknüpft ist

$$H(t) := -\partial_x^2 + V(t, \cdot), \quad \mathcal{D}(H(t)) = H^2(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R}, \quad (6.4)$$

und nehme an, dass $V(t, x)$ die KdV-Gl. erfüllt, d.h.

$$\text{KdV}(V) = 0. \quad (6.5)$$

Als nächstes betrachtet man die Distributionenlösungen $\Psi(t, k, x)$ von

$$\left(\mathcal{T}(t) \Psi(t, k, x) \right) (x) = k^2 \Psi(t, k, x), \quad t, k(t)^2, x \in \mathbb{R}. \quad (6.6)$$

Da $V \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, kann man auch $\Psi(k) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $k \in C^\infty(\mathbb{R})$ annehmen. Damit erhält man

$$\Psi_{xxx} - V_x \Psi + (k^2 - V) \Psi_x = 0 \quad (6.7)$$

$$\Psi_{xxt} + (2kk_t - V_t) \Psi + (k^2 - V) \Psi_t = 0 \quad (6.8)$$

Definiert man

$$R(t, x) := \Psi_t(t, x) + V_x(t, x) \Psi(t, x) - 2[V(t, x) + 2k(t)^2] \Psi_x(t, x) \\ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.9)$$

(Zur Motivation dieser Definition sei auf
Bemerkung 6.4 verwiesen)

und berechnet man

$$\partial_x W(R, \Psi) = \partial_x (R \Psi_x - R_x \Psi) = \\ = \Psi^2 \cdot [2kk_t - k \dot{V}(V)], \quad (6.10)$$

wobei man (6.6) - (6.8) zur Vereinfachung verwendet.
Benutzt man nun (6.5) erhält man schließlich

$$\partial_x W(R, \Psi)(t, x) = 2k(t) \dot{k}(t) \Psi(t, x)^2, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.11)$$

(wobei " $\dot{\cdot}$ " $\equiv \partial_t \cdot$)

Lemma 6.3 Angenommen $V \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$,
 reellwertig, $k \Delta V = 0$ und sei $\psi_0(k) \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine
 reellwertige Distributionenlösung von
 $(H(0) - k^2) \psi_0(k) = 0, k^2 \in \mathbb{R}$. Dann hat

$(H(t) - k^2) \psi(t, k) = 0, t \in \mathbb{R}$ eine eindeutige,
 reellwertige, Distributionenlösung $\psi(k) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
 die

$$\psi_t(t, k, x) = -4\psi_{xxx}(t, k, x) + 6V(t, x)\psi_x(t, k, x) + 3V_x(t, x)\psi(t, k, x),$$

erfüllt oder gleichwertig wenn man (6.6) benutzt $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ (6.12)

$$\psi_t(t, k, x) = 2 \cdot [V(t, x) + 2k^2] \psi_x(t, k, x) - V_x(t, x) \psi(t, k, x),$$

mit der Anfangswertbedingung $(t, x) \in \mathbb{R}^2, (6.13)$

$$\psi(0, k, x) = \psi_0(k, x), k^2, x \in \mathbb{R}. \quad (6.14)$$

Hier ist $k^2 \in \mathbb{R}$ unabhängig von t . Weiters gilt:
 Sind $\psi(t, k, x), \tilde{\psi}(t, k, x), (t, k^2, x) \in \mathbb{R}^3$ zwei solche
 Distributionenlösungen von $(H(t) - k^2) \psi(t, k) = 0$
 mit Anfangswertfunktionen $\psi_0(k, x)$, bzw. $\tilde{\psi}_0(k, x)$
 dann gilt für ihre Wronskideterminante

$$W(\psi(t, k), \tilde{\psi}(t, k)) = W(\psi_0(k), \tilde{\psi}_0(k)), t \in \mathbb{R} \quad (6.15)$$

und ist daher unabhängig von $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

Beweis: Man betrachtet folgende Volterra-Integralgleichung:

$$\Psi(t, k, x) = c(t, k) \cos(kx) + d(t, k) \frac{1}{k} \sin(kx) + \int_0^x dx' \frac{1}{k} \sin[k(x-x')] V(t, x') \Psi(t, k, x'), \quad (6.16)$$

$c(\cdot, \cdot), d(\cdot, \cdot) \in C^\infty$ und reellwertig, $(t, k^2, x) \in \mathbb{R}^3$.

Hieraus erhält man, dass $\Psi \in C^\infty$ in Bezug auf alle Variablen ist und

$$(H(t) - k^2) \Psi(t, k) = 0 \quad (6.17)$$

im Distributionensinne gilt, z.B.:

$$(H(t) - k^2) \Psi(t, k, x) = 0 \quad (t, k^2, x) \in \mathbb{R}^3. \quad (6.18)$$

Man betrachtet nun die Funktion $\underline{\Psi}$

definiert durch

$$\underline{\Psi}(t, k, x) := 2[V(t, x) + 2k^2] \Psi_x(t, k, x) - V_x(t, x) \Psi(t, k, x), \quad (t, k^2, x) \in \mathbb{R}^3. \quad (6.19)$$

Mit (6.5) erhält man

$$\underline{\Psi}_{xx} - (V - k^2) \underline{\Psi} = V_t \Psi. \quad (6.20)$$

Andererseits gilt

$$\Psi_{txx} - (v - k^2) \Psi_t = v_t \Psi \quad (6.21)$$

und daher

$$\left[\mathcal{L}(t) (\Psi - \Psi_t) \right] (t, k, x) = k^2 (\Psi - \Psi_t) (t, k, x) \quad (6.22)$$

$$(t, k^2, x) \in \mathbb{R}^3.$$

Von $\Psi_t(t, k, 0) = \dot{c}(t, k)$

$$\Psi_{tx}(t, k, 0) = \dot{d}(t, k)$$

$$\Psi(t, k, 0) = -v_x(t, 0) c(t, k) + 2[v(t, 0) + 2k^2] d(t, k),$$

$$\Psi_x(t, k, 0) = \left\{ 2[v(t, 0) + 2k^2][v(t, 0) - k^2] - v_{xx}(t, 0) \right\} c(t, k) + v_x(t, 0) d(t, k), \quad (t, k^2) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.23)$$

erhält man schließlich

$$\Psi_t(t, k, x) = \mathcal{L}(t, k, x), \quad (t, k^2, x) \in \mathbb{R}^3 \quad (6.24)$$

(und daher gilt (6.13)) genau dann wenn

$$\begin{pmatrix} \dot{c}(t, k) \\ \dot{d}(t, k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_x(t, 0) & 2[v(t, 0) + 2k^2] \\ 2[v(t, 0) + 2k^2][v(t, 0) - k^2] - v_{xx}(t, 0) & v_x(t, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(t, k) \\ d(t, k) \end{pmatrix} \quad (t, k^2) \in \mathbb{R}^2. \quad (6.25)$$

Da das lineare System (6.25) immer Lösungen hat, ist (6.12) - (6.14) bewiesen. Die Tatsache, dass (6.15) x unabhängig ist ist trivial und

$$\partial_t W(\psi(t, k), \tilde{\psi}(t, k)) = 0, \quad (t, k^2) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.26)$$

folgt durch "straight forward" Rechnung.

Bemerkung 6.4.

(i) Lemma 6.3 beweist, dass

$$-\psi_{xx} + V\psi = k^2\psi \quad \text{und}$$

$$\psi_t = -4\psi_{xxx} + 6V\psi_x + 3V_x\psi$$

$$= 2[V + 2k^2]\psi_x - V_x\psi$$

(6.27)

(bzw. $t(t)\psi = k^2\psi$ und $\psi_t = B_V(t)\psi$ im Distributionensinne vgl (3.18))

kompatibel sind. Speziell stimmt die Zeitentwicklung (6.12) von ψ mit der von Sektion 3 in Verbindung mit dem Lax - Paar eingeführten überein

$$\psi_t = -4\psi_{xxx} + 6V\psi_x + 3V_x\psi \iff$$

$$\psi_t = B_V(t)\psi \quad \text{im Distributionensinne.}$$

(ii) Dies ist auch die Motivation zur Definition von $R(t, x)$ in (6.9)

(6.13) besagt, dass

$$R(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.28)$$

wenn Ψ (6.27) erfüllt. Dann folgt

mit (6.11)

$$2k(t) \dot{k}(t) = 0, \quad \dot{\lambda}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (6.29)$$

wobei $\lambda = k^2$, d.h. λ ist t unabhängig.

Nun diskutiert man das diskrete Spektrum

$$H(t) f_{\pm}(t, \lambda_j) = \lambda_j f_{\pm}(t, \lambda_j), \quad f_{\pm}(t, \lambda_j) \in \mathcal{D}(H(t)),$$

$$\lambda_j = -\alpha_j^2, \quad \alpha_j > 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (6.30)$$

$$c_{\pm, j}(t) = \|f_{\pm}(t, \lambda_j)\|_2^{-1}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Man definiert

$$\Psi_j(t, x) := \frac{f_{\pm}(t, \lambda_j, x)}{\|f_{\pm}(t, \lambda_j, x)\|_2}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \leq j \leq N \quad (6.31)$$

dann sind die $\Psi_j(t)$ normalisierte

Eigenfunktionen von $H(t)$,

$$\| \psi_j(t, \cdot) \|_2 = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \in \mathbb{N}, \quad (6.32)$$

$$\text{Und } \psi_j(t, x) = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{c_{\pm, j}(t)} e^{\mp \alpha_j x}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \in \mathbb{N}. \quad (6.33)$$

Verwendet man (6.33) in (6.13) und läßt $x \rightarrow \pm\infty$,
so erhält man

$$\dot{c}_{\pm, j}(t) e^{\mp \alpha_j x} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} 4k_j^2 (\mp \alpha_j) c_{\pm, j}(t) e^{\mp \alpha_j x} + o(e^{\mp \alpha_j x}),$$

$$k_j = i \alpha_j, \quad 1 \leq j \in \mathbb{N} \quad (6.34)$$

und daher

$$\dot{c}_{\pm, j}(t) = \pm 4 \alpha_j^3 c_{\pm, j}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \in \mathbb{N} \quad (6.35)$$

mit der Lösung

$$c_{\pm, j}(t) = e^{\pm 4 \alpha_j^3 t} c_{\pm, j}(0), \quad t \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \in \mathbb{N}. \quad (6.36)$$

Nun kommen wir zum kontinuierlichen Spektrum

Definiert man

$$\Psi_{\pm}(t, k, x) := \Psi_{\pm}(t, \lambda, x), \quad \lambda = k^2 \geq 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.37)$$

(vgl. (4.36), (4.37)) dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi_{+}(t, k, x) &= \begin{cases} t(t, k) e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \\ e^{ikx} + r(t, k) e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \end{cases} \\ \Psi_{-}(t, k, x) &= \begin{cases} t(t, k) e^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ e^{-ikx} + r^{\vee}(t, k) e^{ikx} & x \rightarrow +\infty \end{cases} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Setzt man nun (6.38) in (6.13) ein und nimmt $x \rightarrow \pm\infty$, so erhält man einen Widerspruch da (6.38) und (6.12) bzw (6.13) nicht vergleichbar sind. Der einfache Ausweg ist statt $\Psi_{\pm}(t, k, x)$ die Funktionen

$$\widehat{\Psi}_{\pm}(t, k, x) := c_{\pm}(t, k) \Psi_{\pm}(t, k, x), \quad (t, k, x) \in \mathbb{R}^3, \quad c_{\pm} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2) \quad (6.39)$$

zu betrachten und dann $c_{\pm}(t, k)$ so zu bestimmen, dass $\widehat{\Psi}_{\pm}(t, k, x)$ mit (6.12) bzw. (6.13) kompatibel wird.

Setzt man (6.39) in (6.13) und nimmt $x \rightarrow \pm\infty$, so erhält man

$$C_+(t,k) \dot{t}(t,k) + \dot{C}_+(t,k) t(t,k) = 4ik^3 C_+(t,k) t(t,k), \quad (6.40)$$

$$C_+(t,k) \left[\dot{r}^e(t,k) e^{-ikx} \right] + \dot{C}_+(t,k) \left[e^{ikx} + r^e(t,k) e^{-ikx} \right] \\ =_{x \rightarrow -\infty} 4k^2 C_+(t,k) \left[ik e^{ikx} + r^e(t,k) (-ik) e^{-ikx} \right]. \quad (6.41)$$

Daraus folgt für

$$\dot{C}_+ = 4ik^3 C_+, \quad \text{d.h.} \quad C_+(t,k) = e^{4ik^3 t} C_+(0,k). \quad (6.42)$$

Aus (6.40) und (6.41) wird dann

$$\dot{t}(t,k) = 0, \quad \text{d.h.} \quad t(t,k) = t(0,k), \quad (t,k) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.43)$$

und

$$\dot{r}^e = -8ik^3 r^e, \quad \text{d.h.} \quad r^e(t,k) = e^{-8ik^3 t} r^e(0,k), \quad (t,k) \in \mathbb{R}^2$$

Auf die gleiche Weise erhält man durch die Betrachtung von $\Psi_-(t,k,x)$ (6.44)

$$\dot{r}^r = 8ik^3 r^r, \quad \text{d.h.} \quad r^r(t,k) = e^{8ik^3 t} r^r(0,k), \quad (t,k) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.45)$$

Insgesamt haben wir daher bewiesen
 Theorem 6.5 Unter der Hypothese (H.6.2)
 und der Voraussetzung, dass $V(t, x)$ die
 KdV-Gl. erfüllt, d.h. $\text{KdV}(V) = 0$, erhält man:
 Die Streudaten $S_{\pm}(t)$ die zum Paar
 $(H(t), H_0)$ gehören entwickeln sich zeitlich
 wie folgt:

$$S_{\pm}(t) = \left\{ r^{\pm}(t, k), k \in \mathbb{R}; x_j(t), c_{\pm, j}(t), 1 \leq j \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \left\{ e^{\pm 8ik^3 t} r^{\pm}(0, k), k \in \mathbb{R}; x_j(0), e^{\pm 4x_j^3 t} c_{\pm, j}(0), 1 \leq j \in \mathbb{N} \right\},$$

$$t \in \mathbb{R} \quad (6.46)$$

Der Transmissionskoeffizient ist t unabhängig,
 d.h.

$$t(t, k) = t(0, k) \quad (t, k) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.47)$$

Damit ist der letzte Schritt im Diagramm
 (6.1) vollzogen. Ist daher die
 Anfangsfunktion $V(0, x) = V_0(x)$ so erhält
 man die dazugehörigen Streudaten

$$S_{0, \pm} := \left\{ r_0^{\pm}(k), k \in \mathbb{R}, x_{0, j}, c_{0, \pm, j}, 1 \leq j \in \mathbb{N} \right\}$$

Nun benutzt man $S_{0\pm}$ als Anfangsdaten für $S_{\pm}(t)$ für $t=0$ und $S_{\pm}(t)$ sind daher vollständig durch $V_0(x)$ gegeben ((6.46)).

In Verbindung mit dem direkten und dem inversen Streuproblem in (6.1) scheint nun die Konstruktion von (asymptotisch abfallenden für $x \rightarrow \pm \infty$) Lösungen $V(t,x)$ der KdV-Gl. für gegebene (asymptotisch abfallende) Anfangswerte $V_0(x)$, $t=0$.

Die Zeitentwicklung in (6.46) ist jedoch nur eine notwendige Bedingung, dass $V(t,x)$ die KdV-Gl. erfüllt, aber nicht hinreichend. In der Tat, man weiß ja nicht einmal, ob das Anfangswertproblem der KdV-Gl. überhaupt eine Lösung hat.

Die Lösung dieser Frage ist aber einfach. Da man explizit einen Kandidaten $V(t,x)$ für eine Lösung kennt

$$V(t, x) = \mp 2 \frac{d}{dx} k_{\pm}(t, x, x) \quad (6.48)$$

Wobei (vgl. (4.106), (4.107))

$$k_{\pm}(t, x, y) \pm \int_x^{x+y} dz k_{\pm}(t, x, z) \Omega_{\pm}(t, z+y) + \int \Omega_{\pm}(t, x+y) = 0, \quad (6.49)$$

$$\Omega_{\pm}(t, z) = \sum_{j=1}^N c_{\pm, j}(0) e^{\pm 8\alpha_j^3 t \mp \alpha_j z} + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dk r_{\pm}(0, k) e^{\pm 8ik^3 t \pm ikz},$$

$t, x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (6.50)$

Setzt man einfach (6.48) in die KdV-Gl. ein und verifiziert durch ausrechnen $\text{KdV}(V) = 0$.

Mit dieser Überprüfung hat man dann das Anfangswertproblem der KdV-Gl. gelöst.

Betrachtet man noch einmal Diagramm (6.1)

so sieht man, dass eine nichtlineare Gleichung durch drei lineare ersetzt wurde.

Anmerkung: Die Überprüfung durch einsetzen ist prinzipiell möglich, aber schrecklich. Üblicherweise verwendet man das Zakharov-Shabat-Schema.

7. Solitonen und Solitonenartige Lösungen

Definition 7.1 Eine N -Soliton-Lösung $V_N(t, x)$ der KdV-Gleichung ist definiert durch (6.50) - (6.52) mit $r_e^{(0, k)} = 0, k \in \mathbb{R}$. Alle anderen Lösungen der KdV-Gleichung die (H.6.2) erfüllen heißen Solitonenartige Lösungen.

Theorem 7.2: Die N -Soliton-Lösungen $V_N(t, x)$ der KdV-Gleichung haben die Form

$$V_N(t, x) = -2 \partial_x^2 \ln \left\{ \det [1 + \Delta_{N, \pm}(t, x)] \right\}, (t, x) \in \mathbb{R}^2, (7.1)$$

wobei

$$\Delta_{N, \pm}(t, x) = \left[\begin{array}{ccc} c_{\pm, j}^{(0)} c_{\pm, l}^{(0)} (\lambda_j + \lambda_l)^{-1} e^{\mp (\lambda_j + \lambda_l)x} & \pm 4(\lambda_j^3 + \lambda_l^3)t & \\ & e & \end{array} \right]_{j, l=1}^N$$

$N \in \mathbb{N}, (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (7.2)$

Um nun (7.1) für $t \rightarrow \pm \infty$ zu untersuchen führt man

$$S(x, v) := -\frac{v}{2} \left\{ \cosh \left[(v^{1/2}/2)x \right] \right\}^{-2}, \quad v > 0, x \in \mathbb{R} \quad (7.3)$$

ein und beachtet, daß (vgl. (5.35))

$$V_1(t, x) = S(x - 4x_1^2 t - \delta_1, 4x_1^2), \quad \delta_1 = (2x_1)^{-1} \ln \left[\frac{C_{1+}(0)^2}{2x_1} \right],$$

$$(t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (7.4)$$

Damit erhält man nun

Theorem 7.3. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| V_N(t, x) - \sum_{j=1}^N S(x - 4x_j^2 t - \delta_j^\pm, 4x_j^2) \right| \right) = 0, \quad (7.5)$$

wobei

$$\delta_j^+ := (2x_j)^{-1} \ln \left\{ \frac{C_{j+}(0)^2}{2x_j} \cdot \left[\begin{array}{l} 1, \quad j=N \\ \prod_{e=j+1}^N (x_j - x_e)^2 (x_j + x_e)^{-2}, \quad 1 \leq j \leq N-1 \end{array} \right] \right\}$$

$$\delta_j^- := (2x_j)^{-1} \ln \left\{ \frac{C_{j-}(0)^2}{2x_j} \cdot \left[\begin{array}{l} 1, \quad j=1 \\ \prod_{e=1}^N (x_j - x_e)^2 (x_j + x_e)^2, \quad 2 \leq j \leq N \end{array} \right] \right\} \quad (7.6)$$

Der Beweis ist, obwohl elementar, recht lang, (vgl. § 5).

Bemerkung 7.4. Die Gleichung (7.5) zeigt, dass jede N -Soliton-Lösung asymptotisch in eine Überlagerung (Superposition) von N -Soliton-Wellen des Typs (7.4) für $t \rightarrow \pm\infty$ übergeht.

Diese N -Solitär-Wellen werden voneinander getrennt durch ihre verschiedenen Geschwindigkeiten $2c_j^2$. Das Verhalten von $V_N(t, x)$ stimmt für $t \pm \infty$, bis auf die Phasenverschiebungen δ_j^\pm , überein. Die asymptotische Form der Lösung ist daher invariant. (Die schnellste Solitär-Welle startet links von allen anderen für $t \rightarrow -\infty$ und überholt dann alle, so dass sie dann rechts von allen anderen für $t \rightarrow +\infty$ ist.)

Im Falle der solitonartigen Lösungen (mit $r^k(0, k) \neq 0$) ist das Verhalten komplizierter.

Theorem 7.5. Es sei $V \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ und $k dV(V) = 0$ und $V(0, \cdot) \in S(\mathbb{R})$. Weiters seien

$$S_+(t) = \left\{ r^k(0, k) e^{8ik^3 t}, k \in \mathbb{R}, x_j, c_{+,j}(0) e^{4x_j^3 t}, 1 \leq j \leq N \right\} \quad (7.7)$$

die Streudaten von V und definiere die entsprechende N -Soliton-Lösung V_N durch (7.1) mit den entsprechenden Streudaten

$$S_{+,N}(t) = \left\{ 0, x_j, c_{+,j}(0) e^{4x_j^3 t}, 1 \leq j \leq N \right\}. \quad (7.8)$$

Fixiere $\epsilon > 0$. Dann gilt.

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\sup_{|x| > \epsilon t} |V(t, x) - V_N(t, x)| \right) = 0. \quad (7.9)$$

Die Kombination von Th. 7.3 und 7.5 ergibt:

Theorem 7.6 Angenommen V erfülle die Voraussetzungen für Th. 7.5. Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\sup_{|x| > \epsilon t} \left| V(t, x) - \sum_{j=1}^N s(x - 4x_j^2 t - \delta_j^+, 4x_j^2) \right| \right) = 0 \quad (7.10)$$

Ergänzung: Kap. 2

Die Miura-Transformation

$$(H.8.1) \quad V, \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ reellwertig, } \partial_x^n V, \partial_x^n \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \\ n = 0, 1$$

Die Miura-Transformation ist nun definiert durch

$$V_j(t, x) := \phi(t, x)^2 + (-1)^j \phi_x(t, x), \quad (8.1) \\ (t, x) \in \mathbb{R}^2, j=1, 2$$

Damit erhält man folgende bemerkenswerte Identität

$$KdV(V_j) = [2\phi + (-1)^j \partial_x] m KdV(\phi) \quad j=1, 2 \quad (8.2)$$

Lemma 2. Angenommen ϕ erfülle (H.8.1) und die mKdV-gl. d.h. $mKdV(\phi) = 0$.

Dann erfüllt $V_j, j=1, 2$ definiert durch

$$(8.1) \quad V_j \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap C^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ und die} \\ \text{KdV-Gleichung, d.h.}$$

$$m KdV(\phi) = 0 \implies KdV(V_j) = 0, j=1, 2 \quad (8.3)$$

Beispiele:

Fig. 4.3 $w(x,t) = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{(3 \cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t))^2}$

Fig. 4.5

Fig. 4.6

Fig. 4.7

Fig. 4.8

the two-soliton solution. (The details in the above calculation are left as an exercise.)

Here we digress to describe some properties of the solution, and to explain why it is a 'two-soliton' solution. To do this we shall present both numerical results obtained directly from solution (4.36), and some asymptotic results valid as $t \rightarrow \pm \infty$. Since the solution is valid for all positive and negative t , we may examine the development of the profile both before and after the formation of the initial profile, (4.35), specified at $t = 0$. The wave profile, plotted as a function of x at five different times, is shown in Fig. 4.3. (Note that we have chosen to plot $-u$ rather than u ; this allows a direct comparison to be made with the application of the KdV equation to water waves that was described in §1.3.)

The solution depicts two waves (which are almost solitary) where the taller one catches the shorter, coalesces to form a single wave — our initial profile at $t = 0$ — and then reappears to the right and moves away from

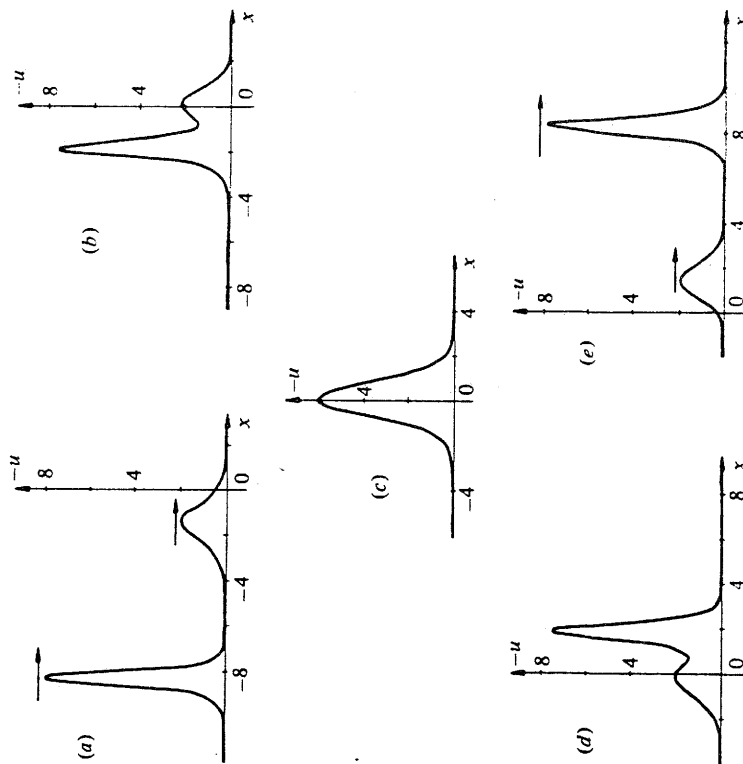


Fig. 4.3 The two-soliton solution with $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x$ (see (c)); (a) $t = -0.5$; (b) $t = -0.1$; (d) $t = 0.1$; (e) $t = 0.5$. Note that $-u$ is plotted against x .

the shorter one as t increases. This interaction might seem, at first sight, to be a purely linear process but this is not so. A more careful examination of the plots shows that the taller wave has moved *forward*, and the shorter one *backward*, relative to the positions they would have reached if the interaction was indeed linear. This important observation is seen particularly clearly in Fig. 4.4 where the paths of the wave crests are represented in the (x, t) -plane. In fact it is the appearance of phase shifts which is the hallmark of this type of nonlinear interaction. Each well-defined solitary-like wave which occurs as $t \rightarrow \pm \infty$, and which interacts in this special way, is called a *soliton*; we have therefore described the two-soliton solution.

The character of this solution is also made evident by examining the asymptotic behaviour of $u(x, t)$ as $t \rightarrow \pm \infty$. For example, if we introduce $\xi = x - 16t$, then solution (4.36) can be expressed as

$$u(x, t) = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2\xi + 24t) + \cosh(4\xi)}{\{3 \cosh(\xi - 12t) + \cosh(3\xi + 12t)\}^2}$$

which can be expanded as $t \rightarrow \pm \infty$, at ξ fixed. This asymptotic limit ensures that we follow the development of the wave which moves at a

Fig. 4.4 The paths of the two wave crests, before and after the interaction. The region where the dominant interaction occurs is inside the circle. The dotted lines show the paths of the wave crests if linear superposition were to apply.

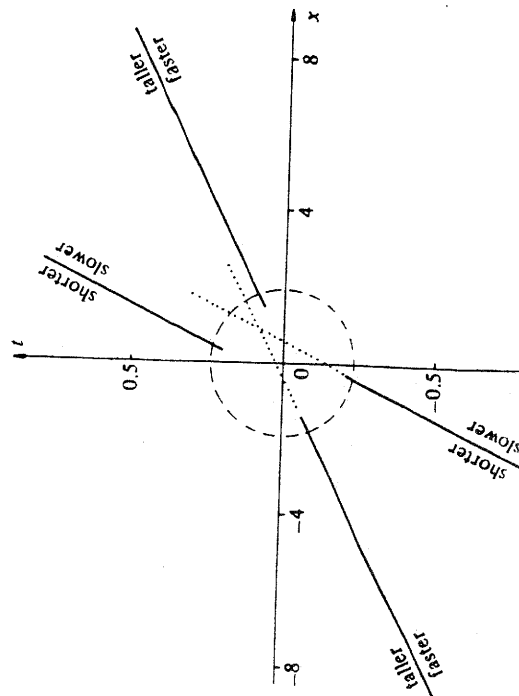
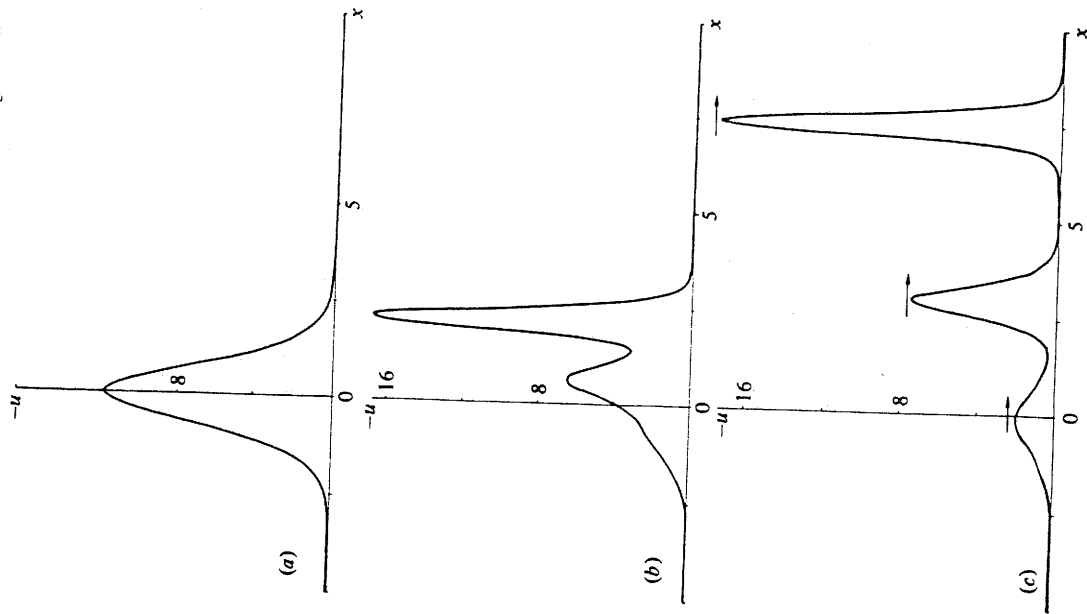


Fig. 4.5 The three-soliton solution with $u(x, 0) = -12 \operatorname{sech}^2 x$ (see (a)); (b) $t = 0.05$; (c) $t = 0.2$. Note that $-u$ is plotted against x .



solution ($N = 3$; $u(x, 0) = -12 \operatorname{sech}^2 x$) are given in Fig. 4.5, where the emerging solitons are of amplitudes 18, 8 and 2.

4.6 Description of the solution when $h(k) \neq 0$

So far we have restricted our discussion to reflectionless initial profiles, but it is clear that a more general choice of $u(x, 0)$ will give rise to a non-zero $h(k)$. Unfortunately, when $h(k) \neq 0$, it is not possible to solve the Marchenko equation for K in closed form. We must content ourselves with a description of the solution based on numerical or asymptotic analyses, or preferably both. In this section we shall give a brief outline of the problem associated with the choice $u(x, 0) = -U_0 \delta(x)$ (see example (i) in §§3.2 and 3.4), and also we shall present numerical solutions with $u(x, 0) = -U_0 \operatorname{sech}^2 x$, for two values of U_0 which do not take the form $N(N + 1)$ where N is a positive integer.

Example (i): delta-function initial profile

In this example we choose

$$u(x, 0) = -U_0 \delta(x),$$

where U_0 is a constant (which we shall assume for the moment is positive), and $\delta(x)$ is Dirac's delta function. From §3.2 we know that there is a single discrete eigenvalue $\lambda = -\kappa_1^2$, where $\kappa_1 = \frac{1}{2}U_0$ ($U_0 > 0$), and

$$\psi_1(x) = \sqrt{\kappa_1} \exp(\mp \kappa_1 x), \quad x \gtrless 0,$$

(see equation (3.12), et seq.). The continuous spectrum exists, with

$$h(k) = -U_0 / (U_0 + 2ik),$$

(see equation (3.14)), and so we have the time evolution of the scattering data as

$$c_1(t) = \sqrt{\kappa_1} \exp(4\kappa_1^2 t) \quad \text{and} \quad b(k; t) = \frac{-U_0 \exp(8ik^3 t)}{U_0 + 2ik}.$$

The function F can therefore be expressed as

$$F(X; t) = \kappa_1 \exp(8\kappa_1^2 t - \kappa_1 X) - \frac{U_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(8ik^3 t + ikX)}{U_0 + 2ik} dk, \quad (4.38)$$

but now the Marchenko equation for K cannot be solved completely. However, it is clear that the solution for u will incorporate the single soliton associated with the discrete eigenvalue $\kappa_1 = \frac{1}{2}U_0$; that is

$$u(x, t) \sim -\frac{1}{2}U_0^2 \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2}U_0(x - U_0^2 t - x_1) \right\} \quad (4.39)$$

as $t \rightarrow +\infty$ with $x - U_0^2 t$ fixed. The phase shift, x_1 , is given by

$$\exp(2\kappa_1 x_1) = c_1^2(0)/2\kappa_1 \quad \text{or} \quad x_1 = -U_0^{-1} \log 2.$$

In other words, the asymptotic solution (4.39) is generated by the contribution to F from the first term in expression (4.38); the integral term is zero where solution (4.39) is valid.

The rôle of the integral in F can be examined by considering the limit as $t \rightarrow +\infty$ for $x < 0$; in this region of (x, t) -space the soliton is exponentially small. Although the calculation is beyond the scope of this text, we note that the integral term in expression (4.38) may be written as

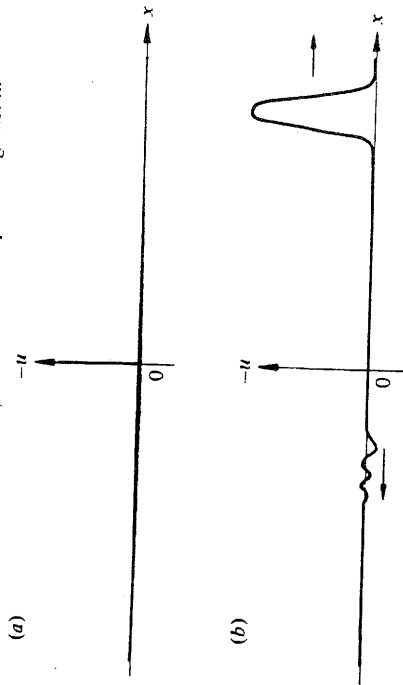
$$-\frac{U_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{i(X^3/t)^{1/2}(8\lambda^3 + \lambda)\}}{U_0(t/X)^{1/2} + 2i\lambda} d\lambda$$

where $k = \lambda(X/t)^{1/2}$. This transformation indicates that the solution should be conveniently expressed in terms of the similarity variable $Xt^{-1/3}$, and t , as $t \rightarrow +\infty$. This is the case: the solution turns out to be an oscillatory dispersive wave which propagates to the left with an amplitude which decays like $t^{-1/3}$ as $t \rightarrow +\infty$. (The relationship of this wave to the oscillatory part of the Airy function is seen to be quite close, particularly when it is noted that, since the wave is of vanishingly small amplitude, it must satisfy

$$u_t + u_{xxx} = 0,$$

approximately: see equations (1.4) and (1.8).) The solution is sketched in Fig. 4.6 where again we have plotted $-u$ in order to represent a soliton of elevation.

Fig. 4.6 The delta-function initial profile (see (a)). The solution at a later time is sketched in (b). Note that $-u$ is plotted against x .



Finally, if the delta function is of positive amplitude (i.e. if $U_0 < 0$) then no discrete eigenvalue exists (see §3.2, example (i)). There is no soliton, and thus only the dispersive-wave component arises in the solution for $t > 0$: the delta function collapses, and develops into a dispersive wave train. Since this solution corresponds to an initial wave-profile with a negative amplitude in the context of water waves, the result agrees with Russell's observations (see §1.2, and example (iii) below).

Example (ii): a negative sech^2 initial profile

This example, and the next one, will be described solely in terms of some numerical results obtained by integrating the KdV equation itself. (For numerical methods see Chap. 7.) Here we choose

$$u(x, 0) = -4 \operatorname{sech}^2 x,$$

and from §3.2, example (ii), we have that the total number of discrete eigenvalues is

$$[(U_0 + \frac{1}{4})^{1/2} - \frac{1}{2}] + 1,$$

where [] denotes the integral part. Thus, with $U_0 = 4$, we shall have two discrete eigenvalues and therefore a solution with two solitons. But, since $U_0 = 4$ can not be expressed as $N(N+1)$, for integral N , the solution will also include a dispersive-wave component. This solution is depicted in Fig. 4.7 at three different times; the appearance of two solitons is shown in the last graph. More generally, it can be shown (Segur, 1973) that an upper bound on the number of solitons, N , is given by

$$N \leq 1 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \{1 + \operatorname{sgn} u(x, 0)\} u(x, 0) dx. \quad \rightarrow 2$$

Example (iii): a positive sech^2 initial profile

Whenever $u(x, 0) > 0$ the solution of the KdV equation will develop without the emergence of a soliton. The initial pulse will collapse and degenerate into a wave train which disperses into $x < 0$. In this example we take

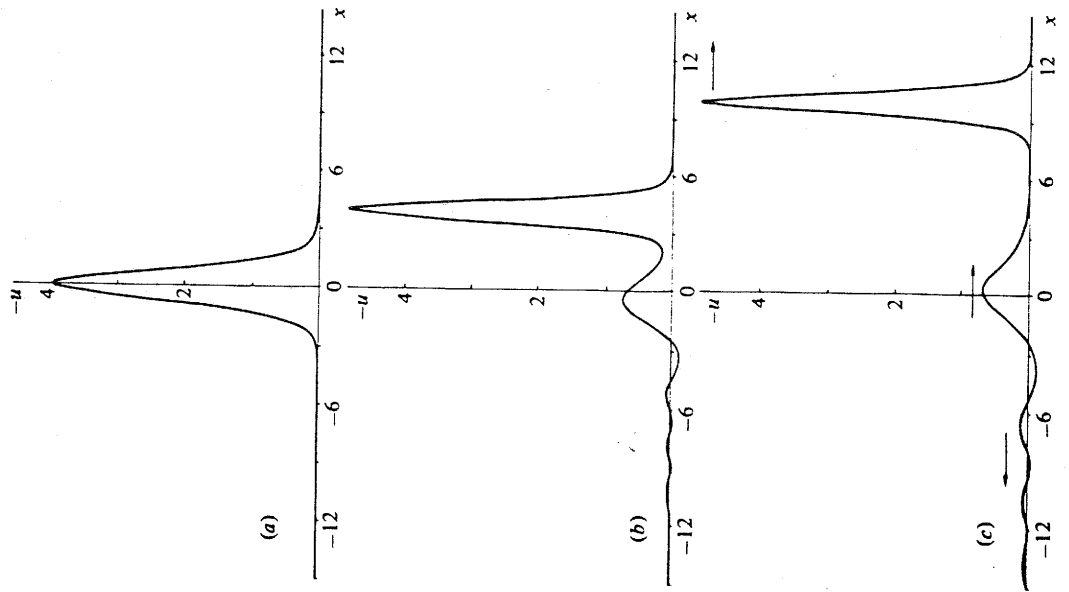
$$u(x, 0) = \operatorname{sech}^2 x,$$

and the corresponding solution is given in Fig. 4.8. The relationship to the Airy function is particularly striking in the final graph which, upon turning the graph upside down (i.e. with u against $-x$), closely resembles the Ai function (see Abramowitz & Stegun, 1964).

We conclude this chapter by returning to the question of how to define a soliton. (The reader will remember that, in §1.3, we attempted to describe

the properties which would distinguish a soliton from other wave-like phenomena.) Now that we have shown the connection between the KdV equation and a scattering problem, we present a less vague definition. In particular, since the solitons (as described in §1.3) are associated with the constant discrete eigenvalues of the system – indeed there is a one-to-one correspondence between them – we might propose the following definition:

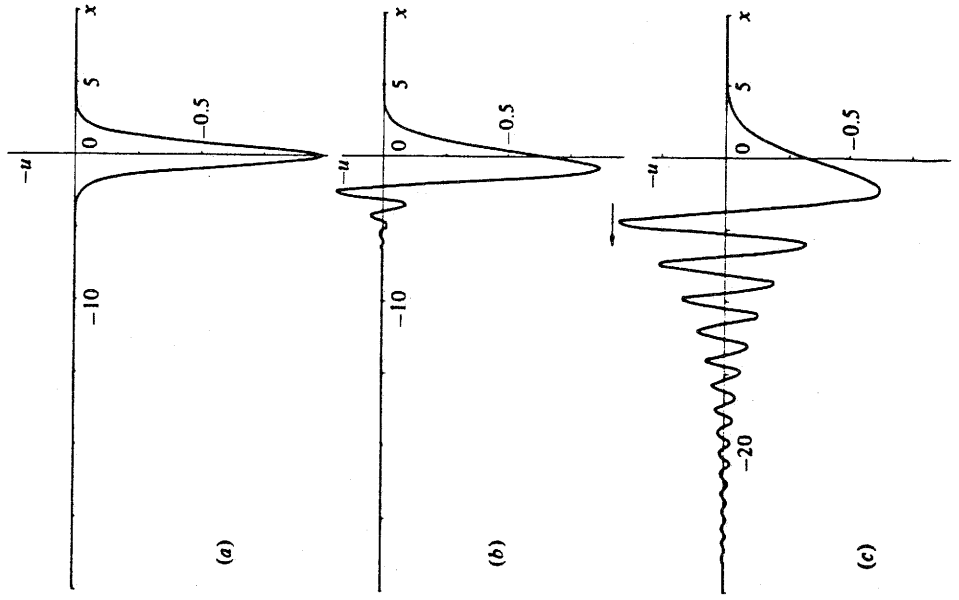
Fig. 4.7 Solution with two solitons and a dispersive wave, where $u(x,0) = -4 \operatorname{sech}^2 x$ (see (a)); (b) $t = 0.4$; (c) $t = 1.0$. Note that $-u$ is plotted against x .



A soliton is that component of the solution of a nonlinear evolution equation which depends only upon one constant discrete eigenvalue (of the underlying scattering problem) as $t \rightarrow \pm \infty$.

One interesting aspect of this proposal is that it clarifies what is meant by the 'identity' of the soliton (see §1.3): it is that property which maintains the constancy of the discrete eigenvalues. Indeed, we can use the value of the appropriate discrete eigenvalue itself as the identifier. However, we can see that the permanent and localised natures of the wave at infinity

Fig. 4.8 Solution with dispersive wave only, where $u(x,0) = \operatorname{sech}^2 x$ (see (a)); (b) $t = 0.1$; (c) $t = 0.5$. Note that $-u$ is plotted against x .



Literatur

- [1] Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C.: Solitons and Nonlinear Wave Equations. London, Academic Press, 1982.
<https://www.amazon.de/dp/0122191226/>
- [2] Drazin P.G., Johnson R.S.: Solitons. Cambridge University Press, 1989.
<https://www.amazon.de/dp/B01LXY7134/>
- [3] Ablowitz M., Segur H.: Solitons and the Inverse Scattering Transform. SIAM, vol. 4, Philadelphia, 1981.
- [4] Calogero F., Degasperis A.: Spectral Transform and Solitons I. North Holland, Amsterdam, 1982.
- [5] Eilenberger: Solitons. Springer, 1981.
- [6] Newell A.C.: Solitons in Mathematics and Physics. SIAM, Philadelphia, 1985.
- [7] Novikov S., Manakov S. V., Pitaevskii L. P., Zakharov V.E.: Theory of Solitons. New York, Consultants Bureau, 1984.
- [8] Toda M.: Theory of nonlinear lattices. Springer, 2nd ed., 1989.
- [Bi] Bishop A.R., Schneider T.: Solitons and Condensed Matter Physics. Springer, 1981.
- [Eck] Eckhaus W., Harten A. van: The inverse scattering transformation and the Theory of Solitons. North Holland, Amsterdam, 1983.
- [Fad] Faddeev L. D., Takhtajan L. A.: Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons. Springer, 1987.
- [Mat] Matsuno Y.: Bilinear Transformation Method Academic Press, 1984.
- [Mar] Marchenko, V. A.: Nonlinear equations and operator algebras. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1988.
- [Raj] Rajaraman R.: Solitons and Instantons. North Holland, Amsterdam, 1982.
- [Reb] Rebbi C., Soliani G.: Solitons and Particle Physics. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.
- [RS I] Reed, M., Simon, B. : Methods of modern mathematical physics Vol.I Functional analysis (1972), Academic Press.
- [RS II] Vol. II Fourier analysis, self-adjointness (1975)
- [RS III] Vol. III Scattering theory (1979)
- [RS IV] Vol.IV Analysis of operators (1978)
- [DR] T. Dauxois, M. Peyrard: Physics of Solitons, Cambridge University Press (2006) Seite 33ff, <https://www.amazon.de/dp/0521143608/>
- [Smo] Joel Smoller: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (258)) Springer (1983)
<https://www.amazon.de/dp/1461269296/>
- [K] Kasman, A: Glimpses of Soliton Theory, AMS (2010) <https://www.amazon.de/dp/0821852450/>
- [GH] Soliton Equations and their Algebro-Geometric Solutions: Volume 1, F. Gesztesy, H. Holden, Cambridge University Press (2003)
<https://www.amazon.de/dp/0521753074/>