Nichtlineare Wellengleichungen
und ihre
algebro-geometrischen Lösungen

K. Unterkofler

Historisches:

1834 J. S. Russell

Airy (1845), Stokes (1847)

1872 Boussinesq, 1876 Rayleigh

1877 Hermite, 1884 Halphen

1895 Korteweg, De Vries

1903 Wallenberg, 1905 Schur

1919 Drach

1923 Burchnall, Chaundy

1955 Fermi, Pasta, Ulam

1965 Zabusky, Kruskal

1967 Gardner, Greene, Kruskal, Miura

Korteweg-de Vries (KdV)-Gleichung:

$$q_t(t,x) + q_{xxx}(t,x) - 6q(t,x)q_x(t,x) = 0.$$

Modell für Wasserwellen mit kleiner Amplitude, kollisionsfreie hydromagnetische Wellen, ionenakustische Wellen in Plasmen, etc.

Eigenschaft von Lösungen:

Da nichtlinear kein Superpositionsprinzip, d.h.

Sind f_1 und f_2 Lösungen, dann sind $f_1 + f_2$ und $c_1 f_1$ keine Lösung mehr.

Linearisierte KdV-Gleichung ($q = u - \frac{1}{6}$):

$$u_t(t,x) + u_{xxx}(t,x) + u_x(t,x) = 0.$$

Der Ansatz ($k = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = 2\pi\nu$)

$$u(t,x) = e^{i(kx-\omega t)}$$

liefert

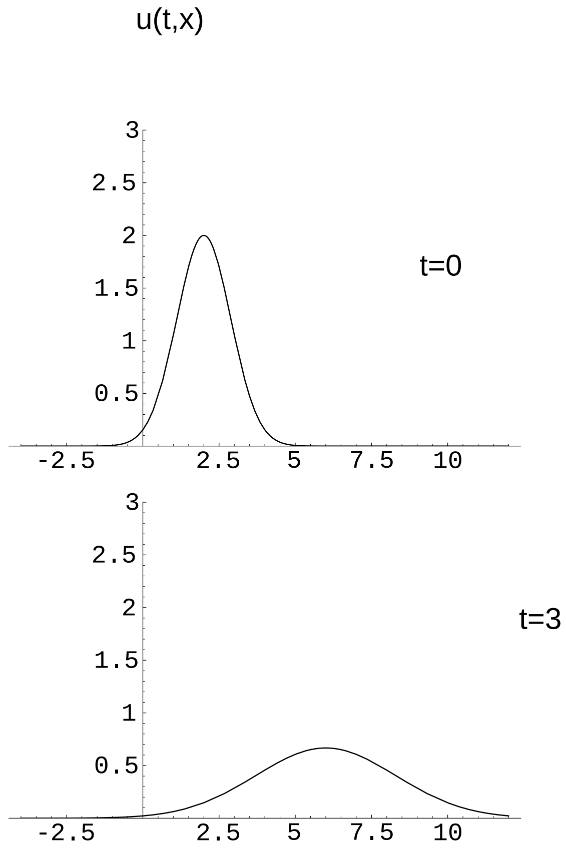
$$\omega(k) = k - k^3.$$

Die Phasengeschwindigkeit ist daher gegeben durch

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2.$$

(v_{ph} und $v_g = d\omega/dk$ sind unterschiedlich)

Die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit v_{ph} von der Wellenlänge bewirkt ein Zerfließen von Wellenpaketen (die Fouriertransformation stellt eine Überlagerung von “ebenen” Wellen mit verschiedenen λ dar):

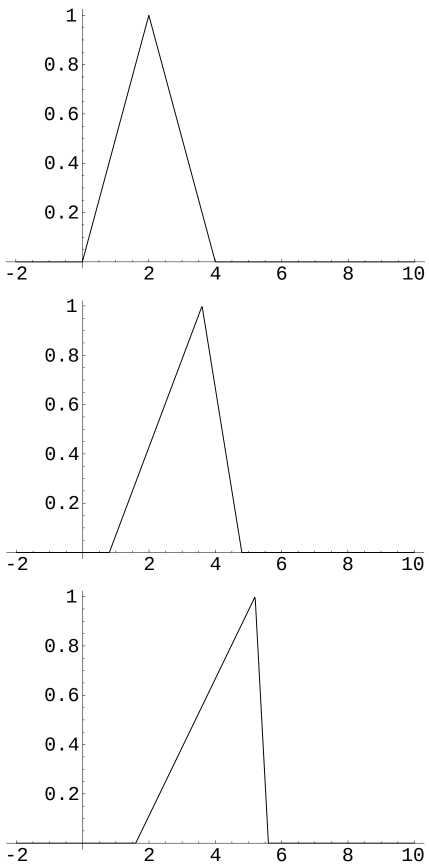


Nichtlinearität in der KdV-Gl. ($q = -(1+v)/6$):

$$v_t(t,x) + \underbrace{(1 + v(t,x))}_{\widehat{=} c} v_x(t,x) = 0.$$

Lösung ($v_{tt} - c^2 v_{xx} = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_t)v = 0$)

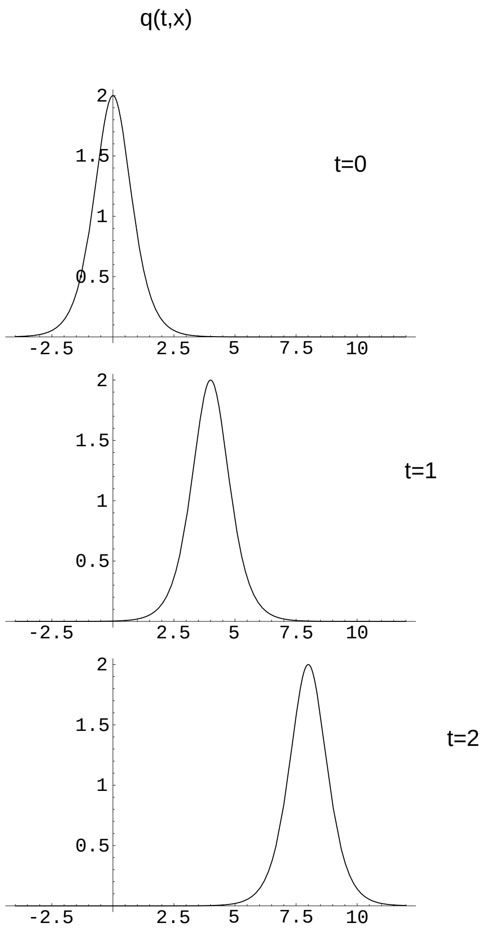
$$v(t,x) = f(x - (1+v)t).$$



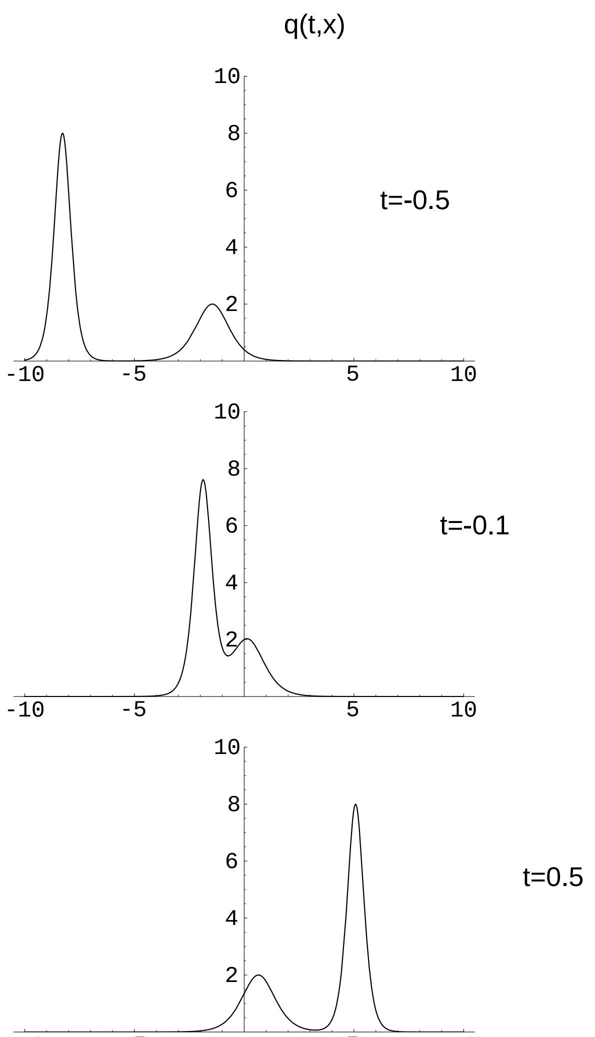
Nichtlinearität bewirkt Steilerwerden und Überschlagen von Wellen.

Das Zusammenspiel von Zerfließen (Dispersion) und Nichtlinearität ermöglicht formstabile Lösungen:

$$q_1(t,x) = -\frac{2}{(\cosh(x-4t))^2},$$



$$q_2(t,x) = -12\frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{[3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t)]^2}.$$



Weitere wichtige nichtlineare Evolutionsgleichungen:

1. Nichtlineare Schrödinger-Gleichung.
   Anwendungen: z.B. nichtlineare Optik.

2. Toda-Gitter-Gleichungen (Flaschka).

3. Klassisches massives Thirring-Modell.

4. Sine-Gordon-Gleichung, Hyperbolische Sine-Gordon-Gleichung.

5. Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung.
   Dies ist eine zweidimensionale Verallgemeinerung der KdV-Gleichung.

Lax-Paare

Es sei $A(t), t \in \mathbb{R}$, eine Familie selbstadjungierter Operatoren in einem Hilbertraum H mit gemeinsamen dichten Definitionsbereich $D \subset H$. Eine zweiparametrige Familie von Operatoren $U(t,s)$, $t,s \in \mathbb{R}$, heißt **unitärer Propagator** für $A(t)$, wenn

(1) $U(t,s)$ ist unitär für alle $s,t \in \mathbb{R}$,
(2) $U(t,t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
(3) $U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$ für alle $r,s,t \in \mathbb{R}$,
(4) $(t,s) \to U(t,s)$ ist stark stetig, d.h. $(t,s) \to U(t,s)\psi$ ist stetig für alle $\psi \in H$,
(5) $U(t,s)\psi \in D$ für alle $\psi \in D$ und feste $s \in \mathbb{R}$. Die Funktion $t \to U(t,s)\psi$ ist differenzierbar für alle $\psi \in D$ und

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t,s)\psi = -iA(t)U(t,s)\psi,$$

d.h. $\psi_t(t) = -iA(t)\psi(t)$ für alle $t,s \in \mathbb{R}$, und $\psi \in D$.

Annahmen:
$q \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ reellwertig, $q, q_x, q_t, q_{tx} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Familie von Schrödingeroperatoren

$$L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + q(\cdot, t).$$

Weiters definiert man

$$P(t) = -4\frac{d^3}{dx^3} + 6q(\cdot, t)\frac{d}{dx} + 3q_x(\cdot, t).$$

Wegen obiger Annahmen gilt:
(i) $L(t)$ ist selbstadjungiert
(ii) $iP(t)$ ist selbstadjungiert

Lemma:
Unter obigen Annahmen besitzt $iP(t)$ einen unitären Propagator $U(t, s)$.

Theorem: q erfülle obige Annahmen und die **KdV-Gleichung**. Dann existiert für $iP(t)$ ein unitärer Propagator $U(t,s)$ und es gilt

$$U(t,s)L(s)U(t,s)^{-1} = L(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

D.h. $L(t)$ ist unitär aq̈uivalent zu $L(s)$ für alle t in $\mathbb{R}$. (Insbesonders sind $L(t)$ und $L(s)$ isospektral für alle $t, s \in \mathbb{R}$.)

P und L heißen Lax-Paar (Peter Lax).

Es gilt (da $\psi_t(t) = -i(iP(t))\psi(t)$)

$$\partial_t L(t) = \partial_t \left(U(t,s)L(s)U(t,s)^{-1} \right)$$

$$= \underbrace{\partial_t U(t,s)U(t,s)^{-1}}_{-i^2 P(t)} L(t) + L(t) \underbrace{U(t,s)\partial_t U(t,s)^{-1}}_{i^2 P(t)}$$

$$= P(t)L(t) - L(t)P(t) = [P(t), L(t)],$$

D. h.

$$L_t(t) - [P(t), L(t)] = 0.$$

Dies ist äquivalent zur KdV-Gleichung, da $L_t(t) = q_t$ und $[P, L] = 6qq_x - q_{xxx}$.
(Allgemein P_{2n+1})

Streutheorie für Schrödinger-operatoren

Theorem: **Jostlösungen**. Für jedes k mit $\mathrm{Im} k \geq 0$ hat die Integralgleichung

$$f_\pm(k,x) = e^{\pm ikx} - \int_x^{\pm\infty} \frac{\sin(k(x-x'))}{k} q(x') f_\pm(k,x') dx'$$

für $q \in L^1(\mathbb{R}, (1+|x|)dx)$ eine eindeutige Lösung, die die Schrödingergleichung

$$-f_\pm'' + q(x) f_\pm = k^2 f_\pm$$

erfüllt.
Analog definiert man $g_\pm(k,x)$, wobei $g_\pm(k,x) = e^{\mp ikx}$, für $x \to \pm\infty$ für $\mathrm{Im} k \leq 0$.

Es gilt

$$W(g_\pm, f_\pm) = \pm 2ik, \qquad k \in \mathbb{R}$$

und da man nur zwei linear unabhängige Lösungen haben kann, gilt

$$f_\pm(k,x) = c_\mp(k) f_\mp(k,x) + d_\mp(k) g_\mp(k,x).$$

Die konstanten Koeffizienten $c_\mp$ und $d_\mp$ können mittes Wronskideterminaten von Jostlösungen ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} c_\pm &= \mp \frac{W(f_\mp, g_\pm)}{2ik}, \\ d(k) &= d_\pm(k) = \frac{W(f_-, f_+)}{2ik}. \end{aligned}$$

Es sei $q \in L^1_2(\mathbb{R})$. Man definiert $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q$ in $D(L) = \{h \in L^2(\mathbb{R}) | h, h' \in AC_{loc}(\mathbb{R}), -h'' + qh \in L^2(\mathbb{R})\}$.

Lemma. Obiger Schrödingeroperator L ist selbstadjungiert und

1. $\sigma_{ess}(L) = \sigma_{ac}(L) = [0, \infty)$,

2. $\sigma_{sing}(L) = \emptyset$,

3. $\sigma_{pp}(L) \subset (-\infty, 0)$,

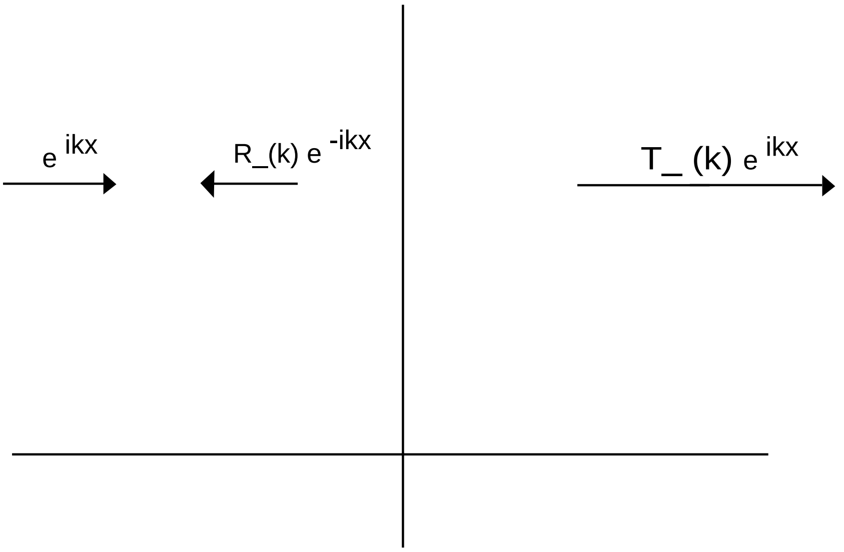
4. $\inf \sigma(L) > -\infty$,

5. alle Eigenwerte sind einfach.

6. L hat nur endlich viele Eigenwerte, die durch die **Nullstellen der Funktion** $d(k)$ gegeben sind, $\sigma_{pp}(L) = \{-\kappa_j^2 | \kappa_j > 0, j = 1, ...N\}$. Die Normierungskonstanten der Jostlös. $f_\pm(i\kappa_j, x)$ werden mit $\gamma_{\pm,j}, j = 1, ...N$ bezeichnet.

Physikalische Lösungen $\psi_\pm(k) = d(k)^{-1} f_\pm(k, x)$. Z.B.

$$\psi_+(k,x) = \begin{cases} \frac{1}{d(k)} e^{ikx} & x \to \infty \\ \frac{c_-(k)}{d(k)} e^{-ikx} + e^{ikx} & x \to -\infty \end{cases}$$
$$= \begin{cases} T_-(k) e^{ikx} & x \to \infty \\ e^{ikx} + R_-(k) e^{-ikx} & x \to -\infty. \end{cases}$$



Dies ergibt für die Koeffizienten der Streumatrix

$$S(k) = \begin{pmatrix} T_-(k) & R_+(k) \\ R_-(k) & T_+(k) \end{pmatrix}$$

($T_\pm(k)$ Transmissionskoeffizienten, $R_\pm(k)$ Reflexionskoeffizienten)

$$T_-(k) = T_+(k) = T(k) = \frac{1}{d(k)},$$

$$R_\pm(k) = \frac{c_\pm(k)}{d(k)}.$$

Die Menge

$$S_\pm = \{R_\pm(k), k \in \mathbb{R}; \kappa_j, \gamma_{\pm,j}, j = 1, ..., N\}$$

bezeichnet man als **Streudaten** $S_\pm$ für L.

Die Bestimmung der Streudaten von q ist eine Abbildung

$$q \longmapsto S_\pm.$$

Die ganze Information von $S_\pm$ ist eigentlich in $f_\pm$, $g_\pm$ und ihren x-Ableitungen enthalten, und kann daher durch Lösen der entsprechenden Volteraintegralgleichungen gewonnen werden.

Inverse Streutheorie

Ausgangspunkt ist die fundamentale Gleichung

$$f_\pm(k,x) = c_\mp(k) f_\mp(k,x) + d(k) g_\mp(k,x),$$

die umgeschrieben lautet

$$\begin{aligned} T(k)e^{\pm ikx} f_\pm(k,x) = \; & R_\mp(k) e^{\pm 2ikx} e^{\mp ikx} f_\mp(k,x) \\ & + e^{\pm ikx} g_\mp(k,x). \end{aligned}$$

Fouriertransformation bezüglich k liefert für die Fouriertransformierte $K_\pm(x,y)$ der Jostlösung die Marchenko-Gleichung:

$$\begin{aligned} & K_\pm(x,y) + \Omega_\pm(x+y) \\ & \pm \int_x^{\pm\infty} K_\pm(x,z)\Omega_\pm(x+y+z)dz = 0, \quad x \gtrless y \end{aligned}$$

wobei

$$\Omega_\pm(s) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_{\pm j}^2 e^{\mp\kappa_j s} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_\pm(k) e^{\pm iks} dk.$$

Es gilt: $q(x) = \mp 2 \frac{d}{dx} K_\pm(x,x)$.

Zeitentwicklung

q sei eine reellwertige Lösung der KdV-Gleichung. Weiters erfülle $\psi_0(k,x)$ die Differentialgleichung

$$L(0)\psi_0 = -\psi_0'' + q(\cdot,0)\psi_0 = k^2\psi_0.$$

Dann existiert eine eindeutige reellwertige Lösung $\psi(k,x,t)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \psi(k,x,0) &= \psi_0(k,x), \\ L(t)\psi &= -\psi_{xx} + q(\cdot,t)\psi = k^2\psi, \\ P(t)\psi &= -4\psi_{xxx} + 6q\psi_x + 3q_x\psi \\ &= 2(q+2k^2)\psi_x - q_x\psi = \psi_t. \end{aligned}$$

Asymptotisch gilt: $\psi_t = 4k^2\psi_x$.

Theorem. Es sei q eine Lösung der KdV-Gleichung. Dann entwickeln sich die Streudaten $S_\pm(t)$ als Funktion von t folgendermaßen

$$\begin{aligned} S_\pm(t) = \{&\exp(\pm 8ik^3t)R_\pm(k,0); k \in \mathbb{R}; \\ &\kappa_j(0), \exp(\pm 4\kappa_j^3 t)\gamma_{\pm,j}(0), 1 \le j \le N\}. \end{aligned}$$

Der Transmissionkoeffizient ist zeitunabhängig, $T(k,t) = T(k,0)$.

Lemma. Alle reflexionslosen Potentiale q, $q \in L^1_2(\mathbb{R})$ sind von der Form

$$q_N(x) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\left(\det(1+\Lambda_N(x))\right).$$

$\Lambda_N(x)$ ist eine $N \times N$ Matrix mit den Elementen

$$\Lambda_{j,\ell} = \frac{\gamma_{+,j}\gamma_{+,\ell}}{(\kappa_j+\kappa_\ell)}\exp(-(\kappa_j+\kappa_\ell)x)$$

Dies folgt aus $\Omega_\pm(s) = \sum_{j=1}^N c^2_{\pm,j}e^{\mp\kappa_j s}$ und dem Ansatz

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{\pm,j}(x)e^{\mp\kappa_j y}$$

in der Marchenko-Gleichung.

Theorem. Die N-Soliton-Lösung der KdV-Gleichung ist von obiger Form, wobei Λ_N nun von t abhängt und daher durch

$$\Lambda_{j,l} = \frac{\gamma_{+,j}(0)\gamma_{+,l}(0)}{(\kappa_j+\kappa_l)}\exp(4(\kappa_j^3+\kappa_l^3)t) \\ \times\exp(-(\kappa_j+\kappa_l)x)$$

ersetzt wird.

Der Rekursionszugang für die KdV-Hierarchie

$$L_2 = \frac{d^2}{d\,x^2} + q_0(x),$$
$$P_r = \frac{d^r}{d\,x^r} + p_{r-2}(x)\frac{d^{r-2}}{d\,x^r - 2} + \cdots + p_0(x),$$

wobei $[P_r, L_2]$ ein Multiplikationsoperator sein soll.

Auf dem algebraischen Kern von L_2 ist P_r von der Form

$$P_r\Big|_{\mathrm{ker}(L_2 - z)} = \Big(F_r(z,x)\frac{d}{dx} + G_r(z,x)\Big),$$

da $\psi_{xx} = (z - q_0)\psi, \psi_{xxx} = (z - q_0)\psi_x - q_{0,x}\psi$, etc. bewirkt.

Daraus folgt

$$G_r(z,x) = -\frac{1}{2} F_{r,x}$$

und

$$F_r(z,x) = \sum_{\ell=0}^{n} f_{n-\ell}(x) z^{\ell}, \qquad f_0 = 1, \quad r = 2\,n+1.$$

Für die Koeffizienten $\{f_\ell(x)\}_{0 \le \ell \le n+1}$ des Polynoms $F_r(z,x)$ ergibt sich die Rekursion

$$f_0 = 1, \qquad 2 f_{\ell,x}(x) = \frac{1}{2}\, f_{\ell-1,xxx}(x) \\ + 2\, q_0(x)\, f_{\ell-1,x}(x) + q_{0,x}(x)\, f_{\ell-1}(x).$$

Man kann P_r daher so schreiben

$$P_r = \sum_{\ell=0}^{n} \Big(-\frac{1}{2}\, f_{n-\ell,x} + f_{n-\ell} \frac{d}{d\,x} \Big) L_2^{\ell}, \ \ r = 2\,n+1,$$

wobei gilt

$$[P_r, L_2] = 2 f_{n+1,x}.$$

Das Paar (L_2, P_r) ist das Lax-Paar für die KdV-Hierarchie. Die **stationäre KdV-Hierarchie** ist gegeben durch

$$[P_r, L_2] = 0, \quad r = 2\,n + 1, \quad \text{bzw.} \quad f_{n+1,x} = 0.$$

Per Definitionem heißen Lösungen $q_0(x)$ irgendeiner stationären KdV-Gleichung **algebro-geometrische (finite-gap, n-Band)** Potentiale.

$[P_r, L_2] = 0$ ist gleichwertig mit

$$\frac{1}{2}\,F_{r,xxx} - 2(z - q_0)\,F_{r,x} + q_{0,x}\,F_r = 0.$$

Multipliziert man mit F_r und integriert, erhält man

$$R_r(z) = -\frac{1}{2}\,F_{r,xx}\,F_r + \frac{1}{4}F_{r,x}^2 + (z - q_0)\,F_r^2,$$

wobei die Integrationskonstante $R_r(z)$ ein Polynom in z vom Grad $2\,n + 1$ ist

$$R_r(z) = \prod_{m=0}^{2n} (z - E_m), \quad \{E_m\}_{0 \le m \le 2n} \subset \mathbb{R}.$$

Theorem. (Burchnall und Chaundy.) Es gelte $f_{n+1,x} = 0$, d.h. $[P_r, L_2] = 0$. Dann erfüllen die zwei miteinander kommutierenden Differentialoperatoren P_r, L_2 eine polynomiale Beziehung

$$P_r^2 - R_r(L_2) = 0,$$
$$R_r(z) = \prod_{m=0}^{2n} (z - E_m), \quad r = 2n + 1.$$

Dies führt zur hyperelliptischen Kurve $\mathcal{K}_n$

$$\mathcal{K}_{(r-1)/2} : \quad y^2 - R_r(z) = 0,$$
$$R_r(z) = \prod_{m=0}^{2n} (z - E_m), \quad r = 2n + 1$$

mit (arithmetischen) Geschlecht $n = (r - 1)/2$.

Durch Einführung des Deformationsparameters $t_r \in \mathbb{R}$ in q_0 (d.h.$q_0(x) \to q_0(x, t_r)$), erhält man die Gleichungen der **zeitabhängigen KdV-Hierarchie**

$$\frac{d}{dt_r} L_2(t_r) - [P_r(t_r), L_2(t_r)] = 0,$$

bzw.

$$\mathrm{KdV}_r(q_0) = q_{0,t_r} - 2 f_{n+1,x} = 0,$$

bzw.

$$\begin{aligned}\mathrm{KdV}_r(q_0) = q_{0,t_r} - \frac{1}{2}\, F_{r,xxx} + 2\,(z - q_0)\, F_{r,x} \\ - q_{0,x}\, F_r = 0, \quad r = 2\,n + 1.\end{aligned}$$

Der stationäre KdV-Formalismus

Positive Divisoren auf $\mathcal{K}_{(r-1)/2}$ vom Grad $n = (r-1)/2$ werden wie folgt bezeichnet $\mathcal{D}_{P_1,\dots,P_n} : \mathcal{K}_{(r-1)/2} \to \mathbb{N}$

$$P \to \mathcal{D}_{P_1,\dots,P_n}(P) = \begin{cases} m, & \text{falls } P \ m \text{ mal in} \\ & \{P_1,\dots,P_n\} \\ 0, & \text{falls } P \notin \{P_1,\dots,P_n\} \end{cases}$$

Man betrachte die normierte Eigenfunktion $\psi(P,x,x_0)$ von L_2 und P_r

$$L_2\psi(P,x,x_0) = z\,\psi(P,x,x_0),$$
$$P_r\psi(P,x,x_0) = y(P)\,\psi(P,x,x_0).$$

$\psi(P,x,x_0)$ heißt stationäre Baker-Akhiezer-Funktion der KdV-Hierarchie. Die eng damit zusammenhängende meromorphe Funktion $\phi(P,x,x_0)$ ist definiert durch

$$\phi(P,x) = \frac{\psi_x(P,x,x_0)}{\psi(P,x,x_0)}$$

und daher gilt

$$\psi(P,x,x_0) = \exp\Big(\int_{x_0}^{x} d\,x'\phi(P,x')\Big).$$

Die fundamentale Größe $\phi(P,x)$ kann mit Hilfe des Rekursionsformalismus bestimmen werden

$$\phi(P,x) = \frac{y(P)+\frac{1}{2}D_{n,x}(z,x)}{D_n(z,x)} = \frac{N_{n+1}(z,x)}{y(P)-\frac{1}{2}D_{n,x}(z,x)},$$

wobei

$$\begin{aligned} D_n(z,x) &= F_r(z,x), \\ N_{n+1}(z,x) &= (z-q_0)F_r(z,x) - \frac{1}{2}F_{r,xx}(z,x). \end{aligned}$$

Die Größen $D_n(z,x)$, $N_{n+1}(z,x)$ sind Polynome in z

$$\begin{aligned} D_n(z,x) &= \prod_{j=1}^{n}(z-\mu_j(x)), \\ N_{n+1}(z,x) &= \prod_{\ell=0}^{n}(z-\nu_\ell(x)). \end{aligned}$$

Definiert man

$$\hat{\mu}_j(x) = \Big(\mu_j(x), D_{n,x}(\mu_j(x),x)/2\Big) \in \mathcal{K}_n,$$
$$\hat{\nu}_\ell(x) = \Big(\nu_\ell(x), -D_{n,x}(\nu_\ell(x),x)/2\Big) \in \mathcal{K}_n$$

ergibt sich für den Divisor $\Big(\phi(P,x)\Big)$ von $\phi(P,x)$

$$\Big(\phi(P,x)\Big) = \mathcal{D}_{\hat{\nu}_0(x),\ldots,\hat{\nu}_n(x)}(P) - \mathcal{D}_{P_\infty,\hat{\mu}_1(x),\ldots,\hat{\mu}_n(x)}(P).$$

D.h. $\hat{\nu}_0(x),\ldots,\hat{\nu}_n(x)$ sind $n+1$ Nullstellen von $\phi(P,x)$ und $P_\infty, \hat{\mu}_1(x),\ldots,\hat{\mu}_n(x)$ die $n+1$ Pole.

Es gilt

$\phi(P,x)$ erfüllt die Riccati-Gleichung:
$\phi_x(P,x) + \phi(P,x)^2 = z - q_0(x)$.
$$\phi(P,x)\,\phi(P^*,x) = -\frac{N_{n+1}(z,x)}{D_n(z,x)}.$$

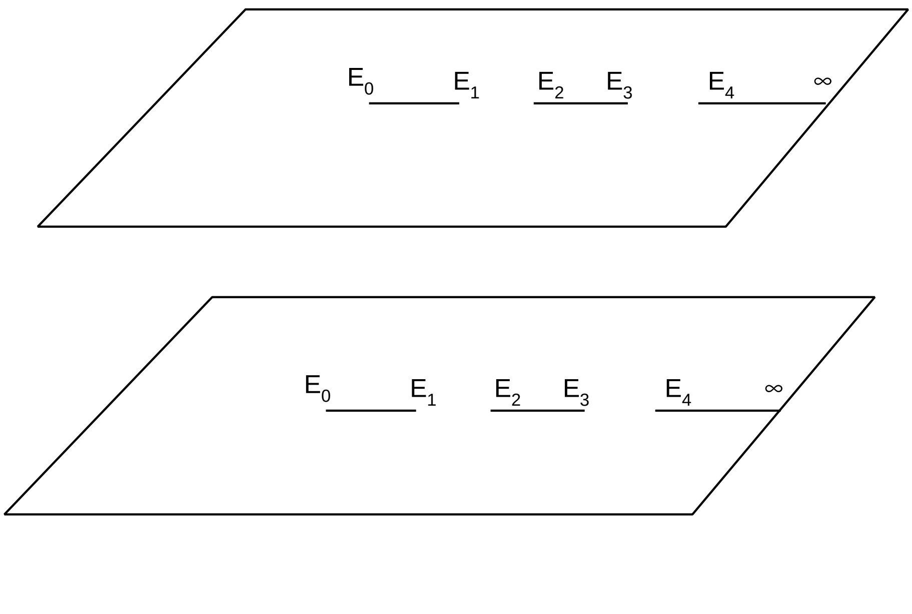
$$(L - z)\psi = 0, (P_{2n+1} - y)\psi = 0, P = (z, y) \in \mathcal{K}_n.$$

$$\psi(P, x, x_0)\, \psi(P^*, x, x_0) = \frac{D_n(z, x)}{D_n(z, x_0)}.$$

$$\psi_x(P, x, x_0)\psi_x(P^*, x, x_0) = -\frac{N_{n+1}(z, x)}{D_n(z, x_0)}.$$

$$\psi(P, x, x_0) = \left(\frac{D_n(z, x)}{D_n(z, x_0)}\right)^{1/2} \times \exp\left\{y(P) \int_{x_0}^{x} d\, x' D_n(z, x')^{-1}\right\}.$$

Interpretation



Die Dynamik der Nullstellen $\mu_j(x)$ und $\nu_\ell(x)$ von $D_n(z,x)$ und $N_{n+1}(z,x)$ ist gegeben durch

Lemma

$$\mu_{j,x}(x) = \frac{-2\, y(\widehat{\mu}_j(x))}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \Big(\mu_j(x) - \mu_k(x)\Big)}, \quad 1 \le j \le n.$$

$$\nu_{\ell,x}(x) = \frac{-2\Big(\nu_\ell(x) - q_0(x)\Big) y(\widehat{\nu}_j(x))}{\prod\limits_{\substack{m=0\\m\neq \ell}}^{n} \Big(\nu_\ell(x) - \nu_m(x)\Big)}, \quad 0 \le \ell \le n.$$

Aus den Nullstellen $\mu_j(x)$ und $\nu_\ell(x)$ kann das Potential $q_0(x)$ durch Spurformeln gewonnen werden.

$$q_0(x) = \sum_{m=0}^{2\,n} E_m - 2\sum_{j=1}^{n} \mu_j(x),$$

$$q_0(x) = 2\sum_{\ell=0}^{n} \nu_\ell(x) - \sum_{m=0}^{2\,n} E_m.$$

Der zeitabhängige KdV-Formalismus

Ausgangspunkt ist eine stationäre n-Band KdV-Lösung

$$\mathrm{KdV}_{2\,n+1}(q_0^{(0)}) = -2\,f_{n+1,x} = 0,$$

Das Ziel ist die Konstruktion einer Lösung der r-ten KdV-Gleichung

$$\mathrm{KdV}_r(q_0) = 0, \quad q_0(x, t_{0,r}) = q_0^{(0)}(x),$$

D.h.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,t_r} L_2(t_r) - [\tilde{P}_r(t_r), L_2(t_r)] &= 0, \\ [P_{2\,n+1}(t_{0,r}), L_2(t_{0,r})] &= 0. \end{aligned}$$

Als Konsequenz erhält man

$$\begin{aligned} [P_{2\,n+1}(t_r), L_2(t_r)] &= 0, \\ P_{2\,n+1}(t_r)^2 &= R_{2\,n+1}(L_2(t_r)) \\ &= \prod_{m=0}^{2\,n} \Big(L_2(t_r) - E_m\Big), \end{aligned}$$

da die KdV-Flüsse isospektrale Deformationen von $L_2(t_{0,r})$ sind.

$$q_{0,t_r} = \frac{1}{2}\,\tilde{F}_{r,xxx} - 2(z - q_0)\,\tilde{F}_{r,x} + q_{0,x}\,\tilde{F}_r,$$

$$D_n(z,x,t_r) = \prod_{j=1}^{n} (z - \mu_j(x,t_r)),$$
$$N_{n+1}(z,x,t_r) = \prod_{\ell=0}^{n} (z - \nu_\ell(x,t_r)),$$

$$\phi(P,x,t_r) = \frac{y(P) + \frac{1}{2}D_{n,x}(z,x,t_r)}{D_n(z,x,t_r)} = \frac{N_{n+1}(z,x,t_r)}{y(P) - \frac{1}{2}D_{n,x}(z,x,t_r)}.$$

Analog werden die Dirichlet- und Neumann-Daten definiert

$$\hat{\mu}_j(x,t_r) = \Big(\mu_j(x,t_r), D_{n,x}(\mu_j(x,t_r),x,t_r)/2\Big) \in \mathcal{K}_n,$$
$$\hat{\nu}_\ell(x,t_r) = \Big(\nu_\ell(x,t_r), -D_{n,x}(\nu_\ell(x,t_r),x,t_r)/2\Big) \in \mathcal{K}_n.$$

Der Divisor $\Big(\phi(P,x,t_r)\Big)$ von $\phi(P,x,t_r)$ ist gegeben durch

$$\Big(\phi(P,x,t_r)\Big) = \mathcal{D}_{\hat{\nu}_0(x,t_r),\dots,\hat{\nu}_n(x,t_r)}(P) \\ - \mathcal{D}_{P_\infty,\hat{\mu}_1(x,t_r),\dots,\hat{\mu}_n(x,t_r)}(P).$$

Die zeitabhängige BA-Funktion durch

$$\psi(P,x,x_0,t_r,t_{0,r}) = \exp\bigg\{ \int_{x_0}^{x} d\,x'\phi(P,x',t_r) \\ + \int_{t_{0,r}}^{t_r} d\,s\Big(\tilde{F}_r(z,x_0,s)\phi(P,x_0,s) - \frac{1}{2}\tilde{F}_{r,x}(z,x_0,s)\Big)\bigg\}.$$

$\phi(P,x,t_r)$ und $\psi(P,x,x_0,t_r,t_{0,r})$ erfüllen

$$\phi_{t_r} = \partial_x\Big(\tilde{F}_r(z,x,t_r)\phi - \frac{1}{2}\tilde{F}_{r,x}(z,x,t_r)\Big),$$
$$\psi_{t_r} = \Big(\tilde{F}_r(z,x,t_r)\phi(P,x,t_r) - \frac{1}{2}\tilde{F}_{r,x}(z,x,t_r)\Big)\psi,$$

d.h.
$(L_2 - z)\psi = 0, (P_{2n+1} - y)\psi = 0, \psi_{t_r} = \tilde{P}_r\psi).$

Die Dynamik der Nullstellen $\mu_j(x,t_r)$ und $\nu_\ell(x,t_r)$ von $D_n(z,x,t_r)$ und $N_{n+1}(z,x,t_r)$ wird durch die Dubrovin-Gleichungen beschrieben

Lemma

$$\mu_{j,x}(x,t_r) = \frac{-2\,y(\hat{\mu}_j(x,t_r))}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big(\mu_j(x,t_r)-\mu_k(x,t_r)\Big)},$$

$$\mu_{j,t_r}(x,t_r) = \frac{-2\,\tilde{F}_r(\mu_j(x,t_r),x,t_r)y(\hat{\mu}_j(x,t_r))}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big(\mu_j(x,t_r)-\mu_k(x,t_r)\Big)},$$

$$\nu_{\ell,x}(x,t_r) = \frac{-2\Big(\nu_\ell(x,t_r)-q_0(x,t_r)\Big)y(\hat{\nu}_\ell(x,t_r))}{\prod\limits_{\substack{m=0\\m\neq \ell}}^{n}\Big(\nu_\ell(x,t_r)-\nu_m(x,t_r)\Big)},$$

$$\nu_{\ell,t_r}(x,t_r) = \frac{-2\,\tilde{N}_r(\nu_\ell(x,t_r),x,t_r)y(\hat{\nu}_\ell(x,t_r))}{\prod\limits_{\substack{m=0\\m\neq \ell}}^{n}\Big(\nu_\ell(x,t_r)-\nu_m(x,t_r)\Big)}.$$

Theorem. Die Abel-Abbildung linearisiert die KdV-Flüsse

$$\begin{aligned}
&\underline{\alpha}_{P_0}(\mathcal{D}_{\underline{\hat{\mu}}(x,t_r)}) = \underline{\alpha}_{P_0}(\mathcal{D}_{\underline{\hat{\mu}}(x_0,t_{0,r})}) + \underline{U}_0^{(2)}(x - x_0) \\
&\qquad + \underline{\tilde{U}}_{2r}^{(2)}(t_r - t_{0,r}), \\
&\tilde{\Omega}_{P_\infty,2r}^{(2)} = \sum_{s=0}^{r} \tilde{c}_{r-s}(2s+1)\omega_{P_\infty,2s}^{(2)}, \\
&\underline{\tilde{U}}_{2r}^{(2)} = (\tilde{U}_{2r,1}^{(2)}, \dots, \tilde{U}_{2r,n}^{(2)}), \\
&\tilde{U}_{2r,j}^{(2)} = \int_{b_j} \tilde{\Omega}_{P_\infty,2r}^{(2)}, \quad 1 \le j \le n.
\end{aligned}$$

Dies ergibt für die Its-Matveev-Formel

$$\begin{aligned}
&q_0(x,t_r) = E_0 + \sum_{j=1}^{n} (E_{2j-1} + E_{2j} - 2\lambda_j) \\
&\quad - 2\partial_x^2 \ln\Big(\theta(\underline{\Xi}_{P_0} - \underline{A}_{P_0}(P_\infty) + \underline{\alpha}_{P_0}(\mathcal{D}_{\underline{\hat{\mu}}(x,t_r)}))\Big).
\end{aligned}$$

Gegeben seien die Zykel $\{a_j, b_j\}_{j=1}^n$. Dann bezeichnet $\{\omega_j\}_{j=1}^n$ eine normierte Basis der holomorphen Differentiale auf $\mathcal{K}_n$ ($\eta_j = \frac{z^{j-1}}{y} dz$)

$$\int_{a_j} \omega_k = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Die b-Perioden von ω_k definieren die Matrix

$$\tau_{j,k} = \int_{b_j} \omega_k, \quad j, k = 1, \ldots, n.$$

Damit definiert man in das Gitter L_n in $\mathbb{C}^n$

$$L_n = \{\underline{z} \in \mathbb{C}^n \mid \underline{z} = \underline{N} + \tau \underline{M},\ \underline{N}, \underline{M} \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Die Jacobi-Mannigfaltigkeit $J(\mathcal{K}_n)$ von $\mathcal{K}_n$ ist nun gegeben durch

$$J(\mathcal{K}_n) = \mathbb{C}^n / L_n,$$

und die Abel-Abbildung durch

$$\begin{aligned} &\underline{A}_{P_0} \colon \mathcal{K}_n \to J(\mathcal{K}_n), \\ &\quad P \mapsto \underline{A}_{P_0}(P) = (A_{P_0,1}(P), \ldots, A_{P_0,n}(P)) \\ &\qquad = (\int_{P_0}^P \omega_1, \ldots, \int_{P_0}^P \omega_n) \, (\mathrm{mod}\ L_n) \end{aligned}$$

und

$$\underline{\alpha}_{P_0}\colon \operatorname{Div}(\mathcal{K}_n) \to J(\mathcal{K}_n),$$
$$\mathcal{D} \mapsto \underline{\alpha}_{P_0}(\mathcal{D}) = \sum_{P \in \mathcal{K}_n} \mathcal{D}(P) \underline{A}_{P_0}(P),$$

wobei $P_0 \in \mathcal{K}_n$ ein fester Basispunkt ist.

Die Riemannsche Theta-Funktion für $\mathcal{K}_n$ ist definiert durch

$$\theta(\underline{z}) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^n} \exp\Big(2\pi i(\underline{n}, \underline{z}) + \pi i(\underline{n}, \tau \underline{n})\Big), \quad \underline{z} \in \mathbb{C}^n.$$

Der Vektor der Riemannschen Konstanten $\underline{\Xi}_{P_0} = (\Xi_{P_{0,1}}, \ldots, \Xi_{P_{0,n}})$ ist gegeben durch

$$\Xi_{P_{0,j}} = \frac{1}{2}(1 + \tau_{j,j}) - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} \int_{a_\ell} \omega_\ell(P) \int_{P_0}^{P} \omega_j, \quad 1 \le j \le n.$$

Die normierten Differentiale zweiter Gattung sind definiert durch $\omega^{(2)}_{P_\infty,0}$

$$\omega^{(2)}_{P_\infty,0} = -\frac{1}{2y}\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)dz$$
$$\underset{\zeta\to 0}{=} (\zeta^{-2} + \mathrm{O}(1))d\zeta \text{ für } P \to P_\infty,$$

wobei die Konstanten $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,\dots,n$ durch die Normierung

$$\int_{a_j} \omega^{(2)}_{P_\infty,0} = 0, \quad j = 1,\dots,n$$

bestimmt sind. Es gilt

$$\int_{P_0}^{P} \omega^{(2)}_{P_\infty,0} \underset{\zeta\to 0}{=} -\zeta^{-1} + e_{0,0} + \mathrm{O}(\zeta) \text{ as } P \to P_\infty$$

mit einer Konstanten $e_{0,0} \in \mathbb{C}$. Der Vektor der b-Perioden von $\omega^{(2)}_{P_\infty,0}/(2\pi i)$ wird bezeichnet mit

$$\underline{U}^{(2)}_0 = (U^{(2)}_{0,1},\dots,U^{(2)}_{0,n}),$$
$$U^{(2)}_{0,j} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b_j} \omega^{(2)}_{P_\infty,0},\ j = 1,\dots,n.$$

$\omega^{(2)}_{P_\infty,2q}$ bezeichne die normierten Differentiale zweiter Gattung mit einem Pol bei P_∞ mit Haupteil $\zeta^{-2q-2}d\zeta$ und

$$\tilde{\Omega}^{(2)}_{P_\infty,2r} = \sum_{q=0}^{r} (2q+1)\tilde{c}_{r-q}\omega^{(2)}_{P_\infty,2q}, \quad \tilde{c}_0 = 1,$$

wobei die Konstanten $\tilde{c}_q$ die Konstanten von $\tilde{F}_r$ sind. Dann gilt

$$\int_{a_j} \tilde{\Omega}^{(2)}_{P_\infty,2r} = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\int_{P_0}^{P} \tilde{\Omega}^{(2)}_{P_\infty,2r} \underset{\zeta\to 0}{=} -\sum_{q=0}^{r} \tilde{c}_{r-q}\zeta^{-2q-1} + \tilde{e}_{r,0} + O(\zeta)$$

für $P \to P_\infty$

mit einer Konstanten $\tilde{e}_{r,0} \in \mathbb{C}$.

Algebro-geometrische Lösungen der Boussinesq-Hierarchie

$$L_3 = \frac{d^3}{dx^3} + q_1 \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} q_{1,x} + q_0,$$

$$P_m\Big|_{\ker(L_3 - z)} = \Big(F_m \frac{d^2}{dx^2} + \Big(G_m - \frac{1}{2} F_{m,x}\Big)\frac{d}{dx} + H_m\Big),$$

$(m = 3n + \epsilon,\ \epsilon \in \{1, 2\})$ wobei

$$H_m(z,x) \ = \tfrac{1}{6} F_{m,xx} + \tfrac{2}{3} q_1 F_m - G_{m,x}.$$

Bsq-Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= 2\, G_{m,xxx} + 2\, q_1 G_{m,x} + q_{1,x} G_m \\
&\quad - 3\,(z - q_0) F_{m,x} + 2\, q_{0,x} F_m, \\
0 &= \frac{1}{6} F_{m,xxxxx} + \frac{5}{6} q_1 F_{m,xxx} + \frac{5}{4} q_{1,x} F_{m,xx} \\
&\quad + \Big(\frac{3}{4} q_{1,xx} + \frac{2}{3} q_1^2\Big) F_{m,x} + \Big(\frac{1}{6} q_{1,xxx} \\
&\quad + \frac{2}{3} q_1 q_{1,x}\Big) F_m + 3(z - q_0) G_{m,x} - q_{0,x} G_m.
\end{aligned}$$

Integration nach Multiplikation der ersten Gleichung mit G_m, der zweiten mit $-F_m$ und Summation ergibt $S_m(z)$. Integration nach Multiplikation der ersten Gleichung mit $\left(\frac{2}{3}\,q_1 F_m G_m - (z-q_0)F_m^2\right)$, der zweiten mit $\left(\frac{1}{3}\,F_{m,xx}F_m - \frac{1}{4}\,F_{m,x}^2 + \frac{1}{3}\,q_1 F_m^2 + G_m^2\right)$ und Summation ergibt $T_m(z)$.

Theorem. Das Burchnall-Chaundy-Polynom des Paares (L_3, P_m) lautet

$$P_m^3 + P_m\,S_m(L_3) - T_m(L_3) = 0$$

und die algebraische Kurve hat die Form

$$y^3 + y\,S_m(z) - T_m(z) = 0.$$

Ausdruck für das Produkt der drei Lösungen

$$D_{m-1} = \epsilon(r)\Big((z - q_0 - \frac{1}{6}q_{1,x})F_m^3 - G_m^3 + \frac{1}{4}G_m F_{m,x}^2 - q_1 F_m^2 G_m + \frac{1}{2}G_m^2 F_{m,x} - \frac{1}{8}F_{m,x}^3 - \frac{1}{6}q_1 F_m^2 F_x - F_m G_m G_{m,x} + \frac{1}{2}F_m F_{m,x} G_{m,x} - \frac{1}{2}F_m G_m F_{m,xx} + \frac{1}{4}F_m F_{m,x} F_{m,xx} - F_m^2 G_{m,xx} - \frac{1}{6}F_m^2 F_{m,xxx}\Big),$$

$D_{m-1}(z,x)$ und $N_m(z,x)$ sind Polynome in z

$$D_{m-1}(z,x) = \prod_{j=1}^{m-1}\Big(z - \mu_j(x)\Big),$$

$$N_m(z,x) = \prod_{\ell=0}^{m-1}(z - \nu_\ell(x)).$$

Theorem

$$q_0(x,t_r) = 3\,\partial_{\underline{U}_3^{(2)}}\partial_x \ln(\theta(\underline{z}(P_\infty,\underline{\hat{\mu}}(x,t_r)))) + (3/2)w,$$
$$q_1(x,t_r) = 3\,\partial_x^2 \ln(\theta(\underline{z}(P_\infty,\underline{\hat{\mu}}(x,t_r)))) + 3u,$$

wobei

$$\partial_{\underline{U}_3^{(2)}} = \sum_{j=1}^{m-1} U_{3,j}^{(2)} \frac{\partial}{\partial z_j}$$

die Richtungsableitung bezüglich des Vektors der b-Perioden $\underline{U}_3^{(2)}$ ist

$$\underline{U}_3^{(2)} = (U_{3,1}^{(2)},\ldots,U_{3,m-1}^{(2)}),$$
$$U_{3,j}^{(2)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b_j} \omega_{P_\infty,3}^{(2)}, \quad 1 \le j \le m-1.$$

Die $\omega_{P_\infty,3}^{(2)}$ sind die *DZG*, welche holomorph auf $\mathcal{K}_{m-1}\backslash\{P_\infty\}$ sind. Sie haben einen Pol der Ordnung 3 bei P_∞

$$\omega_{P_\infty,3}^{(2)}(P) \underset{\zeta\to 0}{=} \Big(\zeta^{-3} + O(1)\Big)d\zeta.$$

DZG (normiert)

$$\omega_{P_\infty,2}^{(2)}(P) \underset{\zeta\to 0}{=} \Big(\zeta^{-2} + u + w\zeta + O(\zeta^2)\Big)d\zeta.$$