

Kapitel 13

Ergänzungen zur Funktionentheorie

In diesem Kapitel werden Gegenstände behandelt, die eine Weiterführung der Vorlesung "Funktionentheorie" oder der Vorlesung "Spezielle Funktionen" beinhalten.

13.1 Singularitäten komplexer Funktionen

Eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Variablen z kann an einem Punkt z_0 folgende Eigenschaften haben:

Tabelle 13.1: Eigenschaften komplexer Funktionen

mehrdeutig	Logarithmen, Wurzeln, Potenzen mit unganzen Exponenten
eindeutig	holomorph = analytisch = $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = P(z)$ regulär $f(z)$ darstellbar als Potenzreihe $P(z)$ im Gebiet G singulär $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = H(z) + P(z)$ $f(z)$ darstellbar als Laurentreihe im Kreisring um z_0 ausserwesentliche Singularität Pol n -ter Ordnung $H(z) = \sum_{i=-n}^{-1} a_i (z - z_0)^i$ wesentliche Singularität $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$

$H(z)$ heißt der Hauptteil der Laurentreihe. Umfasst dieser endlich viele Glieder, dann heißt z_0 ein **Pol** der Funktion $f(z)$; die niedrigste Potenz (also das n in obiger Formel) gibt die Ordnung des Poles. Wenn $H(z)$ aus unendlich vielen Gliedern besteht, dann heisst z_0 eine **wesentliche Singularität** der Funktion.

13.1.1 Pol n -ter Ordnung an z_0

Wir betrachten das Verhalten der Funktion in einer kleinen Umgebung der singulären Stelle z_0 :

$$z = z_0 + \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \rho \ll 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Das Relief $|f(z)|$ (= die Betragsfunktion)

$$|f(z)| = \frac{a_{-n}}{\rho^n} + \dots$$

gibt Turm mit Zentrum z_0 , s. Abb.13.1 im Notebook K13Pol-WesSing.nb, AnMe13-1-3.pdf Von welcher Seite aus man sich der singulären Stelle nähert, die Funktion wächst immer über alle Grenzen.

13.1.2 Wesentliche Singularität der Wachstumsklasse 1 an $z = 0$

Wieder wird z als Produkt des Betrages ρ mit dem Phasenfaktor $e^{i\varphi}$ ausgedrückt.

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \rho \ll 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}} = e^{\frac{1}{\rho} (\cos \varphi - i \sin \varphi)}. \quad (13.1)$$

Damit ergibt sich für die Betragsfunktion:

$$|f(z)| = e^{\frac{1}{\rho} \cos \varphi} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{für } \cos \varphi < 0, \text{ d.i. für } -\pi \leq \varphi < -\pi/2 \vee \pi \geq \varphi > \pi/2; \\ 1 & \text{für } \cos \varphi = 0, \text{ d.i. für } \varphi = \pm \pi/2; \\ \infty & \text{für } \cos \varphi > 0, \text{ d.i. für } 0 \leq |\varphi| < \pi/2. \end{cases} \quad (13.2)$$

Das obige Resultat bedeutet, dass das Verhalten der Funktion sehr verschieden sein kann, je nachdem von welcher Seite man sich der singulären Stelle nähert. In gewissen Sektoren ist die Funktion sehr brav; in diesen erhält man einen endlichen Wert, der sogar Null sein kann. S. Abb.13.2 im Notebook K13Pol-WesSing.nb, AnMe13-1-3.pdf In der vollen Funktion

$$f(z) = e^{\frac{1}{\rho} \cos \varphi} e^{-i \frac{1}{\rho} \sin \varphi} = e^{\frac{1}{\rho} \cos \varphi} \left[\cos \left(\frac{1}{\rho} \sin \varphi \right) - i \sin \left(\frac{1}{\rho} \sin \varphi \right) \right]$$

gibt der letzte Faktor Anlass zu Oszillationen, die umso wilder werden je kleiner ρ wird.

13.1.3 Notebook K13PolWesSing.nb: Graphische Darstellung der Singularitäten komplexer Funktionen

s. File AnMe13-1-3.pdf

13.2 Das Residuum

Die in einem Gebiet um die Stelle z_0 eindeutige Funktion $f(z)$ habe an dieser Stelle eine wesentliche Singularität oder einen Pol. Das Residuum ist dann:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz. \quad (13.3)$$

Der Integrationsweg in obigem Integral ist eine geschlossene Kurve um z_0 , die im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. In vielen Fällen ist es nicht nötig, das Integral auszuwerten; dann nämlich, wenn man die Laurentreihe der Funktion $f(z)$ um z_0 kennt. Es gibt sehr nützliche Formeln zur Berechnung des Residuums.

In *Mathematica* berechnet der folgende Befehl das Residuum der Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = z_0$: `Residue[f, {z = z0}]`.

13.2.1 Formeln zur Berechnung des Residuums an Polstellen

Bei einem Pol n-ter Ordnung sieht die Laurentreihe so aus:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)^1} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \quad (13.4)$$

Pol 1. Ordnung

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{z - z_0}, & g(z) &= a_{-1} + a_0(z - z_0) + \dots \\ a_{-1} &= g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \end{aligned} \quad (13.5)$$

Die Funktion $h(z)$ hat an z_0 eine Nullstelle 1. Ordnung; dann hat der unten angegebene Quotient einen Pol 1. Ordnung, wenn $g(z_0) \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{h(z)}, & h(z) &= h_1(z - z_0) + h_2(z - z_0)^2 + \dots \\ a_{-1} &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Die Funktion $f(z) = \pi \cot(\pi z)$ hat an allen Stellen $z = n \in \mathbb{Z}$ Pole erster Ordnung mit dem Residuum 1.

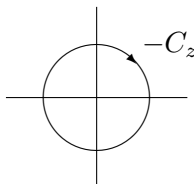
$$\begin{aligned} f(z) &= \pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}, \\ a_{-1} &= \pi \frac{\cos(n\pi)}{(d \sin(\pi z)/dz)_{z=n}} = \pi \frac{\cos(n\pi)}{\pi \cos(n\pi)} = 1. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Pol n-ter Ordnung

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) \right]. \quad (13.8)$$

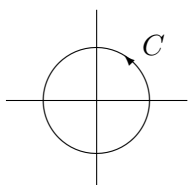
Das Residuum an der Stelle $z_0 = \infty$

Das Residuum einer Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = \infty$ ist über das Integral



$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-C_z} f(z) dz \quad (13.9)$$

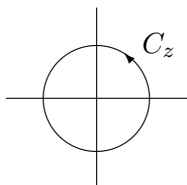
definiert, dessen Weg ein Kreis $-C_z$ mit einem so großen Radius ist, daß zwischen C_z und $z = \infty$ keine andere Singularität von $f(z)$ liegt und diese Funktion dort eindeutig ist. Das Minus vor C_z deutet an, daß dieser Kreis im negativen (also Urrzeigersinn) durchlaufen werden muß, weil das Integrationsgebiet (hier das Äußere des Kreises) immer zur Linken liegen muß. Praktisch wird das Residuum an Unendlich über die Inversion $\zeta = 1/z$ an der Stelle $\zeta = 0$ berechnet:



$$a_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta^2}. \quad (13.10)$$

Die Kurve C ist ein Kreis um $\zeta = 0$, dessen Radius so klein ist, daß er keine andere Singularität einschließt; dieser ist im positiven Sinn (gegen den Uhrzeiger) zu durchlaufen. In der Praxis wird $-\frac{1}{\zeta^2}f(\frac{1}{\zeta})$ in eine Laurentreihe entwickelt. Der Koeffizient von $1/\zeta$ ist dann das gesuchte Residuum.

Satz: Wenn eine eindeutige Funktion nur eine endliche Zahl von Singularitäten aufweist, dann ist die Summe der Residuen (das an Unendlich eingeschlossen !) gleich Null. Denn die Summe der Residuen aller im Endlichen gelegenen Pole ist:



$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_z} f(z) dz$$

Dieses Integral zusammen mit (13.9) gibt in Summe Null.

Übungsaufgabe: Berechnen Sie alle Residuen der Funktion $z^3/((z-1)(z-2)(z-3))$ und deren Summe.

13.3 Der Cauchysche Residuensatz

$f(z)$ ist meromorph in G (f ist eindeutig, hat nur Pole z_1, z_2, \dots, z_n als isolierte Singularitäten). C ist eine geschlossene Kurve, die ganz in G liegt. Dann gilt der **Cauchysche Residuensatz**:

$$\oint_{\pm C} f(z) dz = \pm 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f(z), z = z_i). \quad (13.11)$$

C wird dabei im positiven (Gegenuhrzeigersinn) durchlaufen; $-C$ im negativen (Uhrzeigersinn) durchlaufen.

13.3.1 Auswertung eines reellen Integrals mittels des Residuensatzes

Das folgende reelle Integral kann mittels des Residuensatzes berechnet werden:

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-ka}, \quad k > 0, \quad a > 0. \quad (13.12)$$

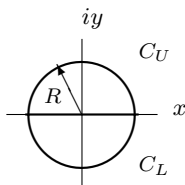


Abbildung 13.1: Integrationswege in der z -Ebene: Längs der reellen Achse von $-R$ nach R ; Halbkreise in der oberen bzw. unteren Hälfte der z -Ebene

Für ein endliches $R > a > 0$ und $k > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(R) &= \int_{-R}^R \frac{e^{ikx}}{x^2 + a^2} dx + \int_{C_U} \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2} dz \\ &= \mathcal{J}_1(R) + \mathcal{J}_2(R) \\ &= 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{ikz}}{(z+ia)(z-ia)}, z = ia \right) = 2\pi i \frac{e^{-ka}}{2ia}. \end{aligned}$$

C_U ist der Halbkreis vom Radius R in der oberen Hälfte der z -Ebene. Beim Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ wird $\mathcal{J}_1(R)$ das gesuchte reelle Integral \mathcal{J} ; $\mathcal{J}_2(R)$ strebt gegen Null, wie im nächsten Paragraphen gezeigt wird.

Ist $k < 0$, dann muss man als Integrationsweg für $\mathcal{J}_1(R)$ wieder die reelle Achse, für $\mathcal{J}_2(R)$ den Halbkreis C_L in der unteren Hälfte der z -Ebene nehmen. Da dieser Weg negativen Umlaufssinn hat, ist das Integral gleich $-2\pi i$ mal dem Residuum an der Stelle $z = -ia$. Die beiden Resultate lassen sich zusammenfassen zu

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-|k|a}, \quad k = \text{reell}, \quad a > 0. \quad (13.13)$$

Dieses Resultat kann noch verallgemeinert werden auf reelles $a \neq 0$.

13.4 Das Lemma von Jordan

Dieses Lemma dient der Abschätzung von Integralen, die eine Exponentialfunktion enthalten, wobei der Integrationsweg ein Halbkreis C_U (oder C_L) in der oberen (unteren) komplexen Halbebene oder auch ein ganzer Kreis sein kann, s. Abb. 13.1.

Das **Lemma von Jordan**:

Voraussetzungen:

Gegeben eine komplexe Funktion $h(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

1.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = 0, \quad \text{für } 0 \leq \arg(z) \leq \pi.$$

Diese Konvergenz ist gleichmäßig, kann aber beliebig schwach sein. Es gilt jedenfalls:

$$|h(z)| < \varepsilon \quad \text{für } |z| > R_0(\varepsilon). \quad (13.14)$$

2. $h(z)$ ist analytisch für $|z| > C = \text{const.}$

3. $k > 0$ oder $\lim_{z \rightarrow \infty} k(z) > 0$, für $0 \leq \arg(z) \leq \pi$.

Dann gilt folgende **Behauptung**:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \int_{C_U} e^{ikz} h(z) dz \right| = 0. \quad (13.15)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} z = R e^{i\varphi} &= R (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad dz = i R e^{i\varphi} d\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \\ \left| \int_{C_U} e^{ikz} h(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{ikR \cos \varphi} e^{-kR \sin \varphi} h(R e^{i\varphi}) R e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \\ &\leq R\varepsilon \int_0^\pi e^{-kR \sin \varphi} d\varphi = 2\varepsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

In $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ gilt $\sin \varphi \geq 2\varphi/\pi$. Damit wird das obige Integral durch ein anderes ersetzt, das elementar ausgewertet werden kann.

$$\int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin \varphi} d\varphi < \int_0^{\pi/2} e^{-2kR\varphi/\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2kR} [-e^{-2kR\varphi/\pi}]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2kR} (1 - e^{-kR}).$$

Damit ergibt sich endgültig:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \int_{C_U} e^{ikz} h(z) dz \right| < \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{k} (1 - e^{-kR}) \sim \lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon = 0. \quad \square$$

Im Integral, das im vorhergehenden Paragraph ausgewertet wurde, ist:

$$f(z) = \frac{e^{ikz}}{z^2 + a^2}, \quad \text{also} \quad h(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} \xrightarrow[|z| \rightarrow \infty]{} 0.$$

Ist in Formel (13.15) $k < 0$, dann divergiert das Integral längs des Weges C_U für $R \rightarrow \infty$. Daher muss man den Integrationsweg C_L verwenden und erhält dann wieder den Grenzwert 0 für $R \rightarrow \infty$. Denn wir benötigen immer:

$$e^{-kR \sin \varphi} \underset{R \rightarrow \infty}{<} C \Rightarrow k \sin \varphi \geq 0, \Rightarrow$$

$$k > 0 \Rightarrow \sin \varphi \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi \hat{=} C_U;$$

$$k < 0 \Rightarrow \sin \varphi \leq 0 \Rightarrow 0 \geq \varphi \geq -\pi \hat{=} C_L.$$

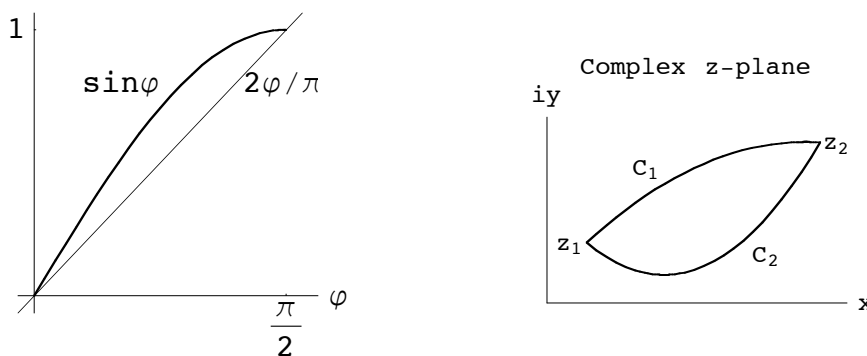


Abbildung 13.2: Links: Vergleich der Funktionen $\sin \varphi$ und $2\varphi/\pi$.

Rechts: Zwei Integrationswege für den Monodromiesatz

13.5 Der Monodromiesatz

Bei der Auswertung von Integralen und der Diskussion der Eigenschaften von Lösungen, die durch Integrale dargestellt werden, ist es oft wichtig, den Integrationsweg zu verändern, ihn zu deformieren oder zu verschieben. Dabei ist der folgende Satz ein wichtiges Hilfsmittel, der **Monodromiesatz**; Ein komplexes Integral ändert seinen Wert nicht, wenn der Integrationsweg C_1 kontinuierlich in den Weg C_2 deformiert wird derart, dass der Anfangspunkt z_1 und der Endpunkt z_2 unverändert bleiben und dass bei der Deformation keine Singularität des Integranden überstrichen und kein Verzweigungsschnitt überquert wird. \square Dieses hier etwas unscharf formulierte Theorem beweist man, indem man den Cauchyschen Integralsatz oder Residuensatz anwendet auf das Gebiet, das von dem geschlossenen Weg $C_1 - C_2$ eingegrenzt wird; dieses hat unter den angegebenen Voraussetzungen den Wert Null.

Eine Verschiebung eines Anfangspunkts (z.B. von z_1 zu z'_1) (oder auch Endpunkts) ist nur dann zulässig, wenn das Integral über einen Weg, der die beiden Punkte verbindet, den Wert Null hat. z.B. ist :

$$\int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz = \left| \begin{array}{l} \text{mit } C_1 : z_1 = -\infty + i0, \quad z_2 = \infty + i0, \\ \text{und } C_2 : z'_1 = -\infty + ia, \quad z'_2 = \infty + ia. \end{array} \right.$$

$$= \int_{z'_1}^{z'_2} e^{-z^2} dz.$$

Der Integrationsweg C_1 ist die reelle Achse, der Weg C_2 ist eine dazu parallele Gerade, die um die Strecke a verschoben ist. Die Gleichheit der beiden obigen Integrale wird im Hilfssatz 1 von §10.3.4 bewiesen.

13.5.1 Anwendungen des Monodromiesatzes

Reelle Integrale vom Typ $\int_{-\infty}^{\infty} \sin^n x/x^k dx$, $k \leq n$, beide positive ganze Zahlen :

$$\mathcal{J}(n, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^k} dx = \int_{C_0} \frac{\sin^n z}{z^k} dz = \frac{1}{2i} \int_{C_0} \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^n}{z^k} dz$$

Unter der Bedingung $k \leq n$ ist der Integrand auf der ganzen reellen Achse regulär. Der Integrationsweg wird an der Stelle $z = 0$ nach unten verborgen; das gibt den Integrationsweg C_0 , s. Abb.13.3, links. Das Integral wird ein komplexes, aber da $z = 0$ nicht mehr auf dem Integrationsweg liegt, kann man ohne Probleme den Sinus durch imaginäre e -Potenzen ersetzen, den binomischen Lehrsatz anwenden und für jeden Term ein einzelnes Integral bekommen. Jedes dieser Integrale wird einzeln mittels des Residuensatzes ausgewertet. Dazu wird der Weg C_0 je nach dem Vorzeichen der Exponentialfunktion durch Hinzufügen von C_U oder C_L zu einem geschlossenen Weg erweitert.



Abbildung 13.3: Integrationswege in der z -Ebene: Längs der reellen Achse von $-R$ nach $-\rho$ und von ρ nach R ; Halbkreise (Radius R) in der oberen C_U bzw. unteren Hälfte C_L der z -Ebene. Halbkreise (Radius ρ) in der unteren Hälfte (linkes Bild) bzw. in der oberen Hälfte (rechtes Bild)

Das vorhin aufgestellte Integral wird für den Fall $n = k = 1$ weiter ausgeführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(1, 1) &= \int_{C_0} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{2i} \int_{C_0} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{z} dz = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{C_0+C_U} \frac{e^{iz}}{z} dz - \frac{1}{2i} \int_{C_0-C_L} \frac{e^{-iz}}{z} dz = \\ &= \frac{2\pi i}{2i} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, z=0\right) - 0 = \pi \cdot 1. \end{aligned}$$

Der Wert ρ des Radius des kleinen Halbkreises ist unwesentlich, solange $0 < \rho < R$. Die Deformation von C_0 muss gar kein Halbkreis sein; wesentlich ist, dass der Weg C_0 irgendwie den Punkt $z = 0$ umgeht.

Das Integral $\mathcal{J}(1, 1)$ kann auch auf anderem Wege berechnet werden: Man integriert die komplexe Funktion e^{iz}/z entlang der Randkurve des in Abb.13.3 gezeigten Halbkreisringgebietes. Dabei läßt man den Radius ρ des kleinen Halbreises gegen Null gehen und erhält den Wert $-\pi i$ für dieses Teilintegral. Der Wert des Teilintegrals über den großen Halbkreis ergibt beim Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ Null gemäß dem Lemma von Jordan, §13.4. Diese Berechnungsmethode ist aber für den allgemeineren Fall $\mathcal{J}(n,k)$ nicht verwendbar.

Das Fourierintegral eines Pulses und seine Auswertung

Das Signal hat in der Zeit t die Form eines Rechteckimpulses der Höhe c und der Dauer τ :

$$f(t) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } t < 0, \\ c & \text{für } 0 < t < \tau, \\ 0 & \text{für } \tau < t \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (13.16)$$

Die Fourieramplitude ist:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{c}{2\pi} \int_0^{\tau} e^{-i\omega t} dt = \frac{ic}{2\pi} [e^{-i\omega\tau} - 1], \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Die Fourierdarstellung des Zeitsignals kann wieder nach der im vorhergehenden Paragraph dargestellten Methode ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{ic}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau} - 1}{\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{ic}{2\pi} \int_{C_0} \frac{e^{i\omega(t-\tau)} - e^{i\omega t}}{\omega} d\omega \\ &= \frac{ic}{2\pi} \int_{C_0} \frac{e^{i\omega(t-\tau)}}{\omega} d\omega - \frac{ic}{2\pi} \int_{C_0} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega \end{aligned}$$

Beide Integrale werden mittels des Residuensatzes ausgewertet; hierzu wird ein geschlossener Integrationsweg geschaffen, indem C_0 durch C_U (C_L) ergänzt wird, je nachdem ob die Zeitfunktion im Exponenten positiv (oder negativ) ist. Dies ergibt genau das anfangs definierte Zeitsignal.

13.6 Verfahren zur Summation von unendlichen Reihen

In diesem Paragraphen werden mehrere Verfahren beschreiben, mit deren Hilfe unendliche Reihen aufsummiert werden können. Diese machen es möglich, eine unendliche Reihe als geschlossenen analytischen Ausdruck, als endliche Summen oder durch neue unendliche Reihen, die schneller als die ursprüngliche konvergieren auszudrücken. Wir werden folgende Verfahren behandeln:

1. Summation von Reihen durch Residuen
2. Die Formel von Plana
3. Summation unter Benutzung von Partialbruchzerlegungen

13.6.1 Summation von Reihen durch Residuen

Wir betrachten die komplexe Funktion

$$f(z) = g(z)h(z) = \pi \cot(\pi z) h(z). \quad (13.17)$$

Deren erster Faktor

$$g(z) = \pi \cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

hat folgende Eigenschaften:

1. $g(z)$ hat einfache Pole für alle ganzzahligen Werte $z = n \in \mathbb{N}$; deren Residuen haben den Wert 1. Damit blendet $g(z) h(z)$ die Funktionswerte zu ganzzahligen Argumenten $h(n)$ heraus, wie diese in einer unendlichen Reihe auftreten können.

2. Wenn $|z|$ gegen Unendliche strebt, geht $g(z)$ immer gegen 1:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 1 \quad \forall z = x + iy. \quad (13.18)$$

Für diese Abschätzung wird der Bruch auf zwei Weisen angeschrieben, je nachdem, ob z in der oberen oder unteren Hälfte der komplexen z -Ebene liegt.

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| = \left| \frac{e^{ix} e^{-y} + e^{-ix} e^y}{e^{ix} e^{-y} - e^{-ix} e^y} \right|; \\ \operatorname{Im}(z) \geq 0: \quad |g(z)| &= \left| \frac{1 + e^{2ix} e^{-2y}}{1 - e^{2ix} e^{-2y}} \right| \xrightarrow{y \rightarrow +\infty}, \quad 0 \leq \arg(z) \leq \pi; \\ \operatorname{Im}(z) \leq 0: \quad |g(z)| &= \left| \frac{1 + e^{-2ix} e^{2y}}{1 - e^{-2ix} e^{2y}} \right| \xrightarrow{y \rightarrow -\infty}, \quad 0 \geq \arg(z) \geq -\pi. \end{aligned}$$

Der zweite Faktor von $f(z)$, also $h(z)$, genügt folgenden Voraussetzungen:

1. $h(z)$ ist meromorph für alle z : d.h. $h(z)$ ist in der ganzen komplexen Ebene eindeutig und hat dort nur Pole als Singularitäten.
2. $h(z)$ hat J Pole z_j , $j = 1, 2, \dots, J$. Diese sind alle verschieden von den Polen von $g(z)$, d.h. $z_j \notin \mathbb{N}$. J kann auch unendlich sein.
3. Für genügend grosse z geht $h(z)$ mit wachsendem $|z|$ gegen Null:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} h(R e^{i\phi}) = o\left(\frac{1}{R}\right), \quad -\pi \leq \phi \leq \pi. \quad (13.19)$$

Das folgende Integral wird nach dem Cauchyschen Residuensatz ausgewertet:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R_n} f(z) dz = \sum_{n=-N}^N h(n) + \sum_{j=1}^J \operatorname{Res}(f(z), z = z_j). \quad (13.20)$$

Die Integrationen erfolgen über Kreise, deren Radien mit wachsendem n monoton anwachsen, aber so gewählt werden, dass diese durch keinen Pol laufen (s. Abb.13.4). Ein Wert $R = n + 1/2$ gewährleistet dieses für die Pole von $g(z)$. Dies Werte müssen gegebenenfalls so modifiziert werden, dass auch kein Pol von $h(z)$ getroffen wird. Nach den obigen Voraussetzungen geht die Folge von Integralen auf der linken Seite obiger Gleichung gegen Null:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{|z|=R_n} f(z) dz = 0. \quad (13.21)$$

Auf der rechten Seite ergibt die erste Summe die unendliche Reihe, deren Summe gesucht ist. Die zweite Summe ergibt einen neuen Ausdruck für diese gesuchte Summe; man hofft, dass dieser einfacher ist oder schneller konvergiert als die ursprüngliche Reihe:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = - \sum_{j=1}^J \operatorname{Res}(f(z), z = z_j) = - \sum_{j=1}^J \pi \cot(\pi z_j) \operatorname{Res}(h(z), z = z_j). \quad (13.22)$$

Analog findet man:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h(n) = - \sum_{j=1}^J \operatorname{Res}\left(\frac{\pi h(z)}{\sin(\pi z)}, z = z_j\right); \quad (13.23)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n e^{i\alpha}) = - \sum_{j=1}^J \operatorname{Res}\left(h(z) \frac{2\pi i e^{iz\alpha}}{e^{2\pi iz} - 1}, z = z_j\right). \quad (13.24)$$

Bei der Anwendung dieser Formeln muss man sich immer überzeugen, dass die Bedingung (13.21) erfüllt ist !

13.6.2 Beispiele zur Summation durch Residuen

s. 1 handschriftliches Blatt, AnMeH2.pdf

13.6.3 Notebook: Summation der Fourierreihe durch Mathematica. Vergleich der Zeiten für das Zeichnen von Kurven

s. 2 Seiten Notebook K13FRSum.nb, File AnMe13-1-6.pdf .

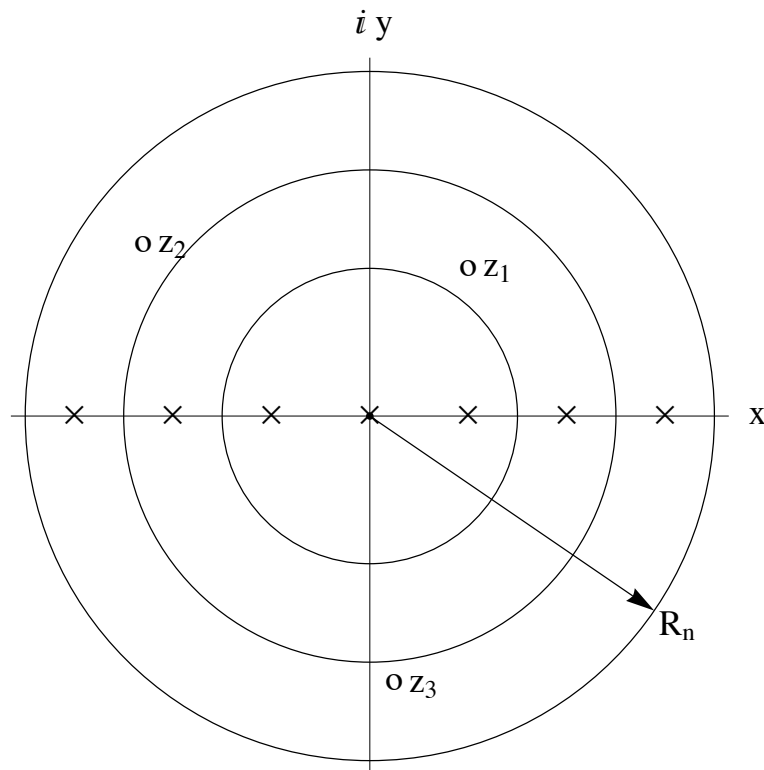


Abbildung 13.4: Die Folge der Kreise $|z| = R_n$ in (13.21). \times geben die Pole $n\pi$ von $\cot(\pi z)$. Die o bezeichnen die Pole von $h(z)$.

13.6.4 Die Summationsformel von Plana

Die Summationsformeln des vorherigen Paragraphen sind nur anwendbar, wenn der Summand $h(n)$ eine gerade Funktion des Summationsindex n ist, sodass die Erweiterung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dots = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dots$$

möglich und sinnvoll ist. Wendet man obige Summationsformeln auf eine in n schief-symmetrische Funktion, erhält man auf beiden Seiten Null. Die Behandlung einer in n schief- oder unsymmetrischen Summe

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

erfordert eine Vorgangsweise, bei der sich die Summation und die damit verbundene Integration nur über die rechte Hälfte der z -Ebene (die komplexe Variable z ersetzt ja den diskreten Index n) erstreckt. Für geeignete Funktionen f gibt es die

Summationsformel von Plana:

Voraussetzungen:

1. f ist analytisch für $\operatorname{Re}(z) \geq 0$;
2. Die nachfolgende Reihe oder das nachfolgende Integral sind konvergent:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty \quad \text{oder} \quad \int_0^{\infty} f(x) dx < \infty;$$

3. Der Grenzwert

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |f(x \pm iy)| e^{-2\pi y} = 0$$

gleichmäßig in x in jedem endlichen Intervall;

4. das Integral

$$\int_0^{\infty} |f(x \pm iy)| e^{-2\pi y} dy$$

existiert für jedes $x \geq 0$ und strebt gegen den Grenzwert 0 für $x \rightarrow \infty$

dann gilt folgende **Formel**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx + i \int_0^{\infty} \frac{f(iy) - f(-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy. \quad (13.25)$$

Beweis: s. P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis I. Wiley, 1974. §9.4.

Beispiel zur Summationsformel von Plana

Die Summe (die Riemannsche Zetafunktion, $\zeta(z)$, zum Argument $z = 3$)

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n^3 = \zeta(3), \quad \zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \operatorname{Im}(z) > 1,$$

wird berechnet, indem in (13.25) $f(z) = 1/(z+1)^3$ eingesetzt wird:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} \frac{6y - 2y^3}{(1+y^2)^3} \frac{1}{e^{2\pi y} - 1} dy = 1.202056 \dots$$

Die Auswertung ist in *Mathematica* implementiert. Der Vergleich dieses Resultats mit dem der exakten analytischen Auswertung und dem einer numerischen Auswertung (NSum[]) zeigt, dass die Planasche Formel dem NSum[] von *Mathematica* überlegen ist.

13.6.4.1 An Example for Plana's Summation Formula. Comparison with Results obtained by other Methods in *Mathematica*

Notebook K13SuPlana.nb, File AnMe13-6-4.pdf.

13.6.5 Summation of infinite series by partial fractions

B. Zotter [1] gave formulas for sums of infinite series which can be derived from decomposition in partial fractions. Infinite series consisting of terms which are ratios of two polynomials, and where the summation index runs from $-\infty$ to $+\infty$, can be summed with the help of the following expressions:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Q(n)}{P(n)} = -\pi \sum_{k=1}^K \frac{Q(p_k)}{P'(p_k)} \cot(\pi p_k), \quad (a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{Q(n)}{P(n)} = -\pi \sum_{k=1}^K \frac{Q(p_k)}{P'(p_k)} \frac{1}{\sin(\pi p_k)}. \quad (b)$$

Here the p_k 's are the distinct zeros of the polynomial P of order K , and the order of the polynomial Q is less than K for convergence. Such series can not be summed by residues as described in sect.1.

Examples of such series are:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)(n-b)} = \frac{\pi}{b-a} [\cot(\pi a) - \cot(\pi b)],$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n \pm a)^3} = \pm \frac{\pi^3 \cos(\pi a)}{2 \sin^3(\pi a)}.$$

For trigonometric series with coefficients consisting of ratios of polynomials, and with the summation index running from $-\infty$ to $+\infty$, ref.[1] gives the following sums:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Q(n)}{P(n)} \cos(n\theta) = -\pi \sum_{k=1}^K \frac{Q(p_k)}{P'(p_k)} \frac{\cos[p_k(\pi - \theta)]}{\sin(p_k\pi)}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi; \quad (c)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Q(n)}{P(n)} \sin(n\theta) = +\pi \sum_{k=1}^K \frac{Q(p_k)}{P'(p_k)} \frac{\sin[p_k(\pi - \theta)]}{\sin(p_k\pi)}, \quad 0 < \theta < 2\pi; \quad (d)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Q(n)}{P(n)} e^{in\theta} = -\pi \sum_{k=1}^K \frac{Q(p_k)}{P'(p_k)} \frac{e^{ip_k(\theta - \pi)}}{\sin(p_k\pi)}, \quad 0 < \theta < 2\pi. \quad (e)$$

An example is:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)(n-b)} \cos(n\theta) = \frac{\pi}{a-b} \left[\frac{\cos[b(\pi - \theta)]}{\sin(\pi b)} - \frac{\cos[a(\pi - \theta)]}{\sin(\pi a)} \right], \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Mathematica has unsurmountable difficulties to evaluate the sum of this series analytically, and considerable difficulties to compute it numerically. Note the limited interval of validity !

If the polynomial P has multiple roots, the above equations may be generalized as shown in ref.[1], or one may change the coefficients of P by small increments and takes limits at the end.

Reference:

[1] B. Zotter, On the summation of infinite algebraic and Fourier series. CERN Internal report CERN/ISR-TH/78-9. European Organisation for Nuclear Research, Geneva, Switzerland, 1978. 8pp.

Tables of series:

- [2] I.S. Gradshteyn, I.N. Ryzhik, Tables of Integrals, Series and Products. Academic Press, 1968.
 [3] L.B.W. Jolley, Summation of Series. Dover, 1961.
 [4] T.J.I. Bromwich, An Introduction to the Theory of Infinite Series. MacMillan, 1955.
 [5] E.R. Hansen, A Table of Series and Products. Prentice Hall, 1975.

13.7 Der Cauchysche Hauptwert

Das reelle Integral mit zumindest stückweise stetigem $f(x)$

$$\mathcal{J} := \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx, \quad a < c < b, \quad f(c) \neq 0 \quad (13.26)$$

hat einen Pol erster Ordnung auf seinem Integrationsweg. Das Riemannsche Integral existiert nicht. Doch gibt es eine andere Methode, diesem Integral einen endlichen reellen Wert zuzuordnen. Die Funktion $g(x) := f(x)/(x-c)$ hat bei c einen Vorzeichenwechsel, d.h. bei positivem $f(c)$ geht $g(x)$ links von c gegen $-\infty$, rechts von c gegen $+\infty$. Man sieht, dass sich die nach oben bzw. unten strebenden ste sich mehr oder minder kompensieren; es bleibt ein endlicher Wert brig. Dieser heisst der **Cauchysche Hauptwert** (Englisch: Cauchy principal value) und wird folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{J} = PV \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x-c} dx \right]. \quad (13.27)$$

Es gibt mehrere Methoden diesen Hauptwert analytisch oder numerisch auszurechnen. Die obige Definition eignet sich nicht gut für eine numerische Auswertung, weil die beiden Integrale für kleine ε entgegengesetzte große Werte annehmen.

Eine Formel für den Hauptwert für stetiges $f'(x)$

Wenn $f(x)$ in $[a, b]$ eine stetige Ableitung aufweist, kann man durch partielle Integration Integrale erhalten, deren Integrand nur mehr eine logarithmische Singularität ausweist. Zuvor wird in beiden Integralen die Integrationsvariable geändert.

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= PV \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x-c} dx \right] = \\ &\quad \begin{array}{cc} y := c-x & y := x-c \end{array} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{c-a}^{\varepsilon} \frac{f(c-y)}{y} dy + \int_{\varepsilon}^{b-c} \frac{f(c+y)}{y} dy \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln y f(c-y) \Big|_{c-a}^{\varepsilon} + \ln y f(c+y) \Big|_{\varepsilon}^{b-c} \right. \\ &\quad \left. - \int_{c-a}^{\varepsilon} \ln y \frac{\partial f(c-y)}{\partial y} dy - \int_{\varepsilon}^{b-c} \ln y \frac{\partial f(c+y)}{\partial y} dy \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\begin{array}{l} \ln \varepsilon f(c-\varepsilon) - \ln(c-a) f(a) - \int_{c-a}^{\varepsilon} \ln y \frac{\partial f(c-y)}{\partial y} dy \\ - \ln \varepsilon f(c+\varepsilon) + \ln(b-c) f(b) - \int_{\varepsilon}^{b-c} \ln y \frac{\partial f(c+y)}{\partial y} dy \end{array} \right] \end{aligned}$$

Die Terme der ersten Kolonne heben sich im Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$; ebenso kann man in den Integrationsgrenzen diesen Grenzübergang vornehmen, weil die Integration über eine logarithmische Singularität zulässig ist. Somit ergibt sich als Endformel für den Cauchyschen Hauptwert:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= f(b) \ln(b-c) - f(a) \ln(c-a) + \int_{c-a}^0 \ln y f'(c-y) dy - \int_0^{b-c} \ln y f'(c+y) dy = \\ &= f(b) \ln(b-c) - f(a) \ln(c-a) - \int_a^b \ln|x-c| f'(x) dx. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Der Strich bei der Funktion $f(x)$ bezeichnet die Ableitung bzgl. des ganzen Arguments.

Eine Formel für den Hauptwert ohne Verwendung von $f'(x)$

Eine Formel für den Hauptwert, die nicht direkt die Ableitung von f benötigt, verdanke ich H. Sormann [13.7.1]. Diese basiert auf folgender Überlegung, die aus der Abbildung auf S.3 des Notebooks "K13CauchyPV.nb" abgelesen werden kann: Der Integrand $g(x) := f(x)/(x - c)$ hat bei c einen Vorzeichenwechsel. Z.B. Bei positivem $f(c)$ geht $g(x)$ links von c gegen $-\infty$, rechts von c gegen ∞ . Man sieht, dass sich die nach bzw. unten strebenden Äste mehr oder minder kompensieren; es bleibt ein endlicher Wert übrig. Es wird angenommen, die Polstelle liegt in der linken Hälfte des Integrationsintervalls $[a, b]$. Dieses wird nun geteilt in ein Intervall $[a, 2c - a]$ und ein Restintervall $[2c - a, b]$.

$$\mathcal{J} = PV \int_a^b \frac{f(x)}{x - c} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{f(x)}{x - c} dx + \int_{c+\varepsilon}^{2c-a} \frac{f(x)}{x - c} dx + \int_{2c-a}^b \frac{f(x)}{x - c} dx \right].$$

Der linke Ast der Funktion $g(x)$, das ist der Integrand des ersten der obigen Integrale, wird an der Achse $x = c$ gespiegelt. Das ist die strichlierte Kurve in der zitierten Abbildung. Dieser entspricht die Funktion $g(2c - x)$. Man sieht, dass das gewünschte Integral dann herauskommt, wenn man nur von c bis b integriert, dafür aber im Bereich $[c, 2c - a]$ über die "neue" Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= PV \int_a^b \frac{f(x)}{x - c} dx & g_1(x) &:= g(x) + g(2c - x). \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{c+\varepsilon}^{2c-a} \frac{f(2c - x)}{c - x} dx + \int_{c+\varepsilon}^{2c-a} \frac{f(x)}{x - c} dx \right] + \int_{2c-a}^b \frac{f(x)}{x - c} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^{2c-a} \frac{f(x) - f(2c - x)}{x - c} dx + \int_{2c-a}^b \frac{f(x)}{x - c} dx. \end{aligned} \tag{13.29}$$

Der Integrand des zweiten Integrals enthält keine Singularität. Wenn $\varepsilon \rightarrow 0+$ strebt, entspricht der Integrand des ersten Integrals an der unteren Grenze der Ableitung von $f(x)$. Diese wird aber nicht benötigt. Der Integrand bereitet bei der numerischen Integration keine Probleme, wenn man ein Verfahren der numerischen Integration verwendet, das nicht die Funktionswerte an den Endpunkten des Integrationsintervalls benötigt, wie z.B. das Gaussssche Verfahren, das nur Stützpunkte aus dem Inneren des Intervalls heranzieht.

s. Notebook K13CauchyPV.nb, File AnMeth13-7-1.pdf .

Referenz

[13.7.1] H. Sormann, private Mitteilung (2007)

13.7.1 Berechnung des Hauptwertes mittels komplexer Integration

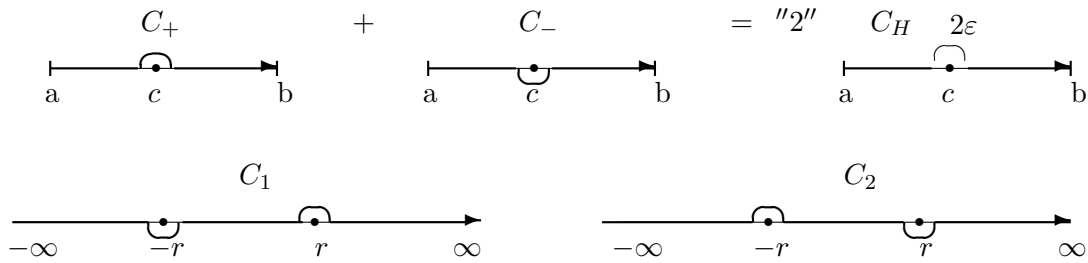


Abbildung 13.5: Integrationswege für das Cauchysche Hauptwertintegral

Die Singularität des Integranden der Definition (13.27) kann umgangen werden, indem man ins Komplexe ausweicht. Dabei erhält man für das Integral einen komplexen Wert. Einen reellen Wert, und zwar den gleichen wie bei den oben diskutierten Verfahren, bekommt man, wenn man zwei komplexe Integrale bildet. Der Integrationsweg eines jeden geht von a nach b . Der Weg des ersten Integrals C_+ (des zweiten, C_-) umgeht die singuläre Stelle c in der oberen (unteren) Hälfte der komplexen z -Ebene. Der Hauptwert ist das arithmetische Mittel der beiden Integrale:

$$\mathcal{J} = PV \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{C_+} \frac{f(z)}{z-c} dz + \int_{C_-} \frac{f(z)}{z-c} dz \right] \quad (13.30)$$

Bei einem Pol erster Ordnung an der Stelle z_0 ergibt die Berechnung der komplexen Integrale auf einem Halbkreis um z_0 im negativen Sinne (wie bei C_+): $-i\pi \operatorname{Res}(g(z), z=z_0)$; bei einem Halbkreis um z_0 im positiven Sinne (wie bei C_-): $i\pi \operatorname{Res}(g(z), z=z_0)$. Bei der Mittelbildung heben sich die beiden imaginären Beiträge und es bleibt nur der Hauptwert übrig. Die komplexen Integrale selbst können auch hier wieder mittels des Residuensatzes berechnet werden, z.B. bei:

$$PV \int_0^\infty r \frac{\cos(ax)}{r^2 - x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \sin(ar).$$

Der Pol erster Ordnung ist bei $x = r$. Man schreibt das obige Integral für die Integrationswege C_+ und C_- an. Der Integrand ist symmetrisch in x . Daher kann man das Integral erweitern auf das Intervalle $-\infty, \infty$. Die Fortsetzung von z auf $-z$ impliziert, dass die Integrationswege C_+ und C_- in C_1 und C_2 übergehen. Dadurch kommt auch der Pol bei $x = -r$ ins Spiel. Anschließend wird der Cosinus in imaginäre e -Potenzen zerlegt. In den resultierenden Integralen wird der Integrationsweg mittels C_U bzw. C_L , je nach Vorzeichen des Exponenten, zu einem geschlossenen Weg ergänzt und der Cauchysche Residuensatz angewendet.

Der Cauchysche Hauptwert kann auch für höhere negative ungerade Potenzen definiert werden.

13.7.2 Notebook K13CauchyPV: Berechnung des Cauchyschen Hauptwertes in *Mathematica*

s. File AnMe13-7-2.pdf

13.8 Verzweigungspunkte und -schnitte

Bei Integralen über mehrdeutige Funktionen ist es wichtig, diese Funktionen so aufzubereiten, dass man brauchbare Resultate erhält. Z.B. werden in nachfolgenden Kapiteln Integrale folgender Art auftreten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(z) e^{i\rho\sqrt{k^2-z^2}} dz, \quad \rho, k > 0.$$

Für $|z| > k$ wird die Wurzel imaginär; dieser Imaginärteil muss positiv sein, damit das Integral sinnvoll ist. Dies muss und kann durch geeignete Wahl der Verzweigungsschnitte, des Funktionszweiges und des Integrationsweges erreicht werden. Dazu muss man vorher die Werteverteilung der mehrdeutigen Funktionen in der komplexen Ebene abklären.

13.8.1 Verzweigungspunkte

Mehrdeutige Funktionen haben Verzweigungspunkte z_i . An diesen Punkten ist die Funktion eindeutig, wie z.B. die Funktion $w = f(z) = \sqrt{z}$ an den Stellen $z = 0$ und $z = \infty$. In der Umgebung dieser Verzweigungspunkte z_i ist die Funktion $f(z)$ mehrdeutig, d.h. wenn man von einem Ausgangspunkt z_0 in der Umgebung von z_i mit einem Ausgangswert der Funktion $w_0 = f(z_0)$ auf einer geschlossenen Kurve C um z_i herumläuft, dann ist $z_0 + C = z_0$, aber $f(z_0 + C) = w_1 \neq w_0$. Dabei muss die Kurve C klein genug sein, dass sie nur diesen einen Verzweigungspunkt z_i einschließt.

Bei einer Wurzel oder einer Potenz mit ungeradem Exponenten α eines Polynoms $P(z)$, d.i. $(P(z))^\alpha$, sind die Nullstellen und Unendlichkeitsstellen dieses Polynoms die Verzweigungspunkte. Ist $(\alpha = p/q$ ein Bruch, der aus den ganzen Zahlen p und q gebildet ist, dann ist die Funktion $f(z)$ in der Umgebung von z_i q -deutig, also nach q Umrundungen ist $z_0 + qC = z_0$ und auch $f(z_0 + qC) = w_0$. Ist α irrational, dann ist $f(z)$ in der Umgebung von z_i unendlich vieldeutig. Ebenso sind die Stellen $z = 0$ und $z = \infty$ unendlichfache Verzweigungspunkte der Funktion $\ln(z)$.

13.8.2 Funktionszweige und Verzweigungsschnitte

Eine mehrdeutige Funktion kann in Funktionszweige aufgespalten werden; z.B. sind \sqrt{z} und $-\sqrt{z}$ die beiden Funktionszweige der Quadratwurzel von z . Es gibt zwei Methoden zur Darstellung der Werteverteilung einer mehrdeutigen Funktion. Die eine Methode arbeitet mit den Riemannschen Flächen. Hier wird nur die andere Methode betrachtet und benützt. Wir erzwingen die Eindeutigkeit, indem wir uns auf einen einzigen Funktionszweig beschränken. Dazu suchen wir zuerst die Verzweigungspunkte. Diese verbinden wir durch Verzweigungsschnitte. Diese müssen so gewählt werden, dass wir keinen einzigen Verzweigungspunkt umrunden können, wenn wir keinen Verzweigungsschnitt überschreiten. Dann wird ein ganz bestimmter Funktionszweig ausgewählt, indem wir an einer Stelle z_0 einen ganz bestimmten Funktionswert $f(z_0)$ festlegen; natürlich ist diese Wahl auf die Werte $f(z_0 + kC)$, $k \in \mathbb{Z}$ beschränkt. Die Lage und der Verlauf der Verzweigungsschnitte sowie die Auswahl des Zweiges der mehrdeutigen Funktion erfolgen nach Gesichtspunkten, die sich aus der geplanten Verwendung des resultierenden Funktionszweiges ergeben. (Z.B. möchten wir haben: $\Im(f(z)) \geq 0$ in der ganzen komplexen Ebene.) Damit ist die Werteverteilung von $f(z)$ für alle Argumente $z \in \mathbb{C}$ festgelegt. Man findet diese Werteverteilung indem man von z_0 zu allen interessierenden Punkten z geht, ohne einen Verzweigungsschnitt zu überschreiten und dabei den Verlauf der Funktionswerte verfolgt. Für diese Verfolgung werden zwei Methoden verwendet:

1. Die Methode der multiplen Polarkoordinaten.
2. Die Benutzung des Spiegelungscharakters des Real- und Imaginärteils von $f(z)$.

13.8.3 Die Methode der multiplen Polarkoordinaten

Man sucht die Verzweigungspunkte z_1, z_2, \dots, z_n auf. Man verbindet diese durch geeignete Verzweigungsschnitte. Dann legt man in jeden Verzweigungspunkt den Ursprung eines Polarkoordinatensystems; der Radius r_i ist jeweils der Strahl von z_i zum laufenden Punkt z :

$$z - z_1 := r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z - z_2 := r_2 e^{i\varphi_2}, \quad \dots \quad z - z_n := r_n e^{i\varphi_n}. \quad (13.31)$$

Diese werden in den Funktionsoperator $f(z)$ eingesetzt und die Parameter entsprechend dem Punkt z_0 bestimmt. Anschließend werden die Parameter bestimmt, die den gewählten Funktionszweig charakterisieren. Dann wandert man mit z zu den benötigten Stellen der z -Ebene und läßt dabei die Polarkoordinaten r_i, φ_i mitfahren. Die Werte, die diese Koordinaten dabei annehmen, bestimmen die Funktionwerte $f(z)$ und damit die Werteverteilung.

Die nachfolgenden vier Paragraphen sind auf handgeschriebenen Blättern zu finden.

13.8.3.1 Die Werteverteilung des Logarithmus

File AnMe13H3.pdf

13.8.3.2. Die Werteverteilung der Potenz mit rationalem Exponenten

File AnMe13H4.pdf

13.8.3.3 Die Werteverteilung der Potenz mit irrationalem Exponenten

Files AnMe13H4.pdf, File AnMe13H5.pdf

13.8.3.4 Die Werteverteilung der Quadratwurzel $\sqrt{z^2 - 1}$

Files AnMe13H5.pdf, File AnMe13H6.pdf

13.8.3.5 Werteverteilung einer und Integral über eine Kubikwurzel

File AnMe13H7.pdf

13.8.4 Die Benutzung des Spiegelungscharakters des Real- und Imaginärteils von Quadratwurzeln

Bei Quadratwurzeln gibt es ein einfacheres Verfahren, die Werteverteilung in der komplexen Ebene aufzufinden. Dieses beruht auf folgender Regel über den Vorzeichenwechsel von Real- oder Imaginärteil quer über eine Kurve, auf der eine dieser beiden Größen Null ist.

Regel für den Vorzeichenwechsel von $\operatorname{Re}(f(z))$ oder $\operatorname{Im}(f(z))$:

Der Realteil $\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y)$ einer komplexen Funktion sei Null längs eines Kurvenstücks C . Dann hat $\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y)$ auf entgegengesetzten Seiten von C verschiedene Vorzeichen. Das selbe gilt, wenn man in der eben formulierten Regel statt $\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y)$ überall $\operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y)$ setzt.

$$\frac{\operatorname{Sign}[\operatorname{Re}(f(z_0))]}{-\operatorname{Sign}[\operatorname{Re}(f(z_0))]} \quad \operatorname{Re}(f(z)) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\operatorname{Sign}[\operatorname{Im}(f(z_0))]}{-\operatorname{Sign}[\operatorname{Im}(f(z_0))]} \quad \operatorname{Im}(f(z)) = 0$$

Abbildung 13.6: Links: Spiegelungsverhalten von $\operatorname{Re}(f(z))$ an der Kurve $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$: Der Realteil hat verschiedenes Vorzeichen auf den beiden Seiten des Kurvenstücks (hier eine gerade Strecke), Rechts: Das analoge Resultat für $\operatorname{Im}(f(z))$.

Der Beweis dieser Regel kann mittels des Schwarzschen Spiegelungsprinzips der Funktionentheorie geführt werden, s. nächster Paragraph. - Ein anderer Beweis kann hier nur angedeutet werden: Real- und Imaginärteil ($u(x, y)$ bzw. $v(x, y)$) einer komplexen Funktion $f(z)$ sind harmonische Funktionen, also Lösungen der Potentialgleichung $\Delta\Phi = 0$. Nach einem Satz der Potentialtheorie nehmen harmonische Funktionen ihre Extremwerte nur am Rande an. Wäre nun z.B. $u(x, y)$ auf einer Kurve C Null und es hätte auf beiden Seiten von C das gleiche Vorzeichen. Dann hätte $u(x, y)$ auf C im Inneren eines geeignet gewählten Gebiets ein Minimum im Widerspruch zu dem angezogenen Satz der Potentialtheorie.

Die Benutzung des Spiegelungscharakters des Real- und Imaginärteils von $f(z) = \sqrt{1 - z^2}$

Wir setzen:

$$w = u(x, y) + i v(x, y) = f(z) = \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{1 - (x + iy)^2}. \quad (13.32)$$

Quadrieren und nachfolgendes Trennen von Real- und Imaginärteil gibt:

$$u^2 - v^2 + 2i u v = 1 - x^2 + y^2 - 2i x y. \quad (13.33)$$

$$\underline{u v = -x y}; \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}. \quad (13.34)$$

Die unterstrichene Formel (13.34) stellt einen Zusammenhang zwischen dem Real- und dem Imaginärteil der Funktion $f(z)$ und dem Real- und dem Imaginärteil der Variablen z her, der immer erfüllt sein muss. Zusammen mit der oben angeführten Regel über den Vorzeichenwechsel von Real- bzw. Imaginärteil quer über eine Kurve, auf der diese Größe Null ist, kann man die Werteverteilung verfolgen, sobald man die Verzweigungsschnitte gelegt und den Funktionszweig an einer Stelle ausgewählt hat. - Eine verschiedene Wahl der Verzweigungsschnitte führt auch zu einer verschiedenen Werteverteilungen in Teilen der komplexen Ebene. s. Beispiele auf hangeschriebenem Blatt, File AnMe13H8.pdf .

13.9 Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip

Die im vorhergehenden Paragraphen eingeführte Regel für den Vorzeichenwechsel kann mit Hilfe des Schwarzen Spiegelungsprinzips bewiesen werden. Dessen Beweis ist einfach, wenn das Kurvenstück, an dem gespiegelt wird, ein gerades ist.

13.9.1 Das Prinzip der Stetigkeit

Ein glattes Kurvenstück C_0 trennt zwei Gebiete G_1 und G_2 . G'_1 und G'_2 sind jeweils Teilgebiete $G'_1 \subset G_1$ bzw. $G'_2 \subset G_2$, die an der Grenze aneinander stoßen. Unter den

Voraussetzungen:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(z) \text{ regulär und eindeutig in } G'_1, \text{ stetig auf } C_0, \\ f_2(z) \text{ regulär und eindeutig in } G'_2, \text{ stetig auf } C_0, \\ f_1(\zeta) = f_2(\zeta) \text{ auf } C_0, \end{array} \right\} := f(z)$$

gilt der **Satz:**

$f_2(z)$ ist analytische Fortsetzung von $f_1(z)$ und umgekehrt.

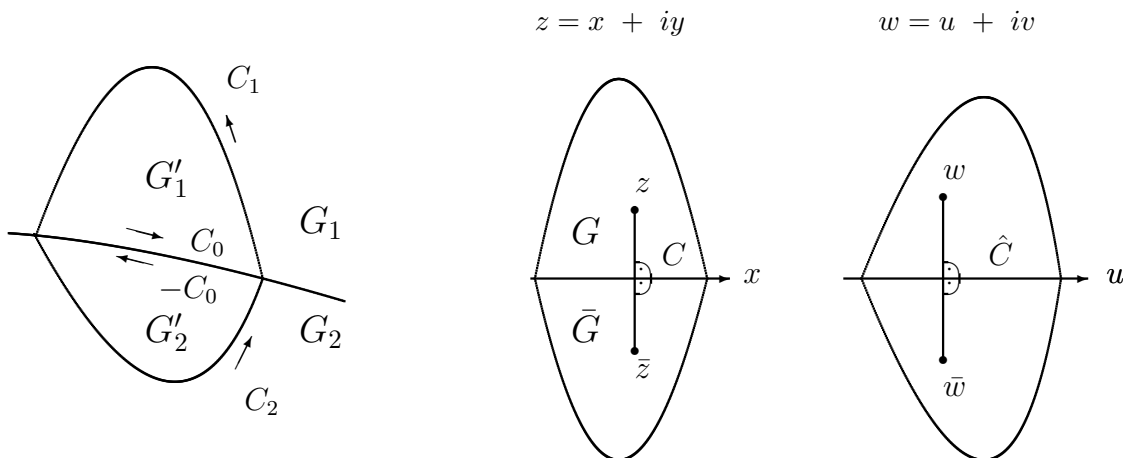


Abbildung 13.16: Stetige Fortsetzung.

Schwarzsches Spiegelungsprinzip

Beweis:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1+C_0} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} f_1(z) & z \in G'_1, \\ 0 & z \in G'_2. \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2-C_0} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 0 & z \in G'_1, \\ f_2(z) & z \in G'_2. \end{cases}$$

Die Funktion :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1+C_0} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2-C_0} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1+C_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad (13.35)$$

ist in $G'_1 + G'_2 + C_0$ regulär. Daraus ergeben sich diese Folgerungen:

1. $f(z) \equiv 0$, wenn $f(z)$ in G regulär und $f(z) = 0$ längs einer glatten Kurve.
2. $f_1(z)$, $f_2(z)$ in G regulär und $f_1(\zeta) = f_2(\zeta)$ längs einer glatten Kurve C impliziert: $f_1(z) = f_2(z)$.

13.9.2 Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip

Die Funktion

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z) = f(x + iy)$$

ist regulär in G , stetig auf C und bildet die glatte Strecke C auf \hat{C} ab. Durch Spiegeln von z an C ergebe sich \bar{z} ; durch Spiegeln von w an \hat{C} ergebe sich \bar{w} . Dann gilt folgender

Satz: $\bar{w} = \bar{f}(\bar{z})$ ist regulär auf dem Bild $\bar{G} = \bar{f}(G)$ und ist dort die analytische Fortsetzung von $f(z)$. Die Regularität ergibt sich, weil man auch den Grenzprozess spiegeln kann. Die analytische Fortsetzung folgt aus dem Beweis im Prinzip der Stetigkeit.

Jetzt wird speziell angenommen, dass C in der x -Achse, \bar{C} in der u -Achse liege. Die Bilder von z bzw. w sind dann die konjugiert komplexen Werte:

$$\begin{aligned} C \text{ in der } x\text{-Achse} & : \bar{z} = z^* = x - iy; \\ \hat{C} \text{ in der } u\text{-Achse} & : \bar{w} = w^* = u - iv. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= w^* = u(x, y) - i v(x, y) \\ \bar{w} &= f(\bar{z}) = u(x, -y) + i v(x, -y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} u(x, y) &= u(x, -y) \\ v(x, y) &= -v(x, -y) \\ &\Rightarrow v(x, 0) \equiv 0. \end{aligned} \tag{13.36}$$

Damit ist die obige Vorzeichenregel bewiesen, wenn der Imaginärteil einer analytischen Funktion längs des Kurvenstücks C verschwindet. Ist der Realteil betroffen, verwendet man if .

Der obige Beweis gilt nur für Spiegelung an geraden Kurvenstücken. Er kann erweitert werden auf Kreisbögen und auf noch allgemeiner geformte glatte Kurven. Das ist aber mit beträchtlichem Aufwand verbunden.

Formulierung der Vorzeichenregel für harmonische Funktionen

Der Realteil (wie auch der Imaginärteil) einer komplexen analytischen Funktion sind harmonische Funktionen. **Satz:** Eine harmonische Funktion $f(x, y)$ hat längs eines glatten Kurvenstücks C den Wert Null: Dann hat $f(x, y)$ auf entgegengesetzten Seiten von C entgegengesetzte Vorzeichen. Mit anderen Worten: **Auf einem Weg der eine glatte Nullstellenkurve C der hamonischen Funktion $f(x, y)$ schneidet, wechselt diese ihr Vorzeichen genau beim Überqueren von C .**

Dieser Satz wird im File AnMe13H8.pdf benutzt, um die Werteverteilung von $f(z) = \sqrt{1 - z^2}$ in der komplexen z -Ebene für verschiedene Festlegungen der Verzweigungsschnitte zu bestimmen.

13.10 Berechnen und Zeichnen zweidimensionaler Felder mittels konformer Abbildung. Komplexes Potential und Feld, komplexe Greensche Funktion

13.10.1 Problemstellung

Bei einer konformen Abbildung werden ein Bereich oder die ganze komplexe Ebene $z = x + iy$ durch eine komplexe Funktion

$$w = u + iv = f(z) = f(x + iy); \quad z = f^{-1}(w). \quad (13.37)$$

auf einen anderen Bereich oder die ganze komplexe Ebene $w = u + iv$ abgebildet. Diese Methode wird sehr gut in den folgenden beiden Werken dargestellt: Lit.13.1, Lit.13.2. In der Anwendung, die hier beschrieben wird, geht es um eine zweidimensionale Anordnung zweier Elektroden oder Polschuhe. Das Feld im Raum zwischen und um diese soll berechnet werden. Die Ränder dieses Feldbereiches sind die Elektroden oder Ränder der Polschuhe; diese sind in der komplexen z -Ebene als ein Polygon eingezeichnet; dies ist das Bild B_z in Abb.13.17. Durch die Abbildung

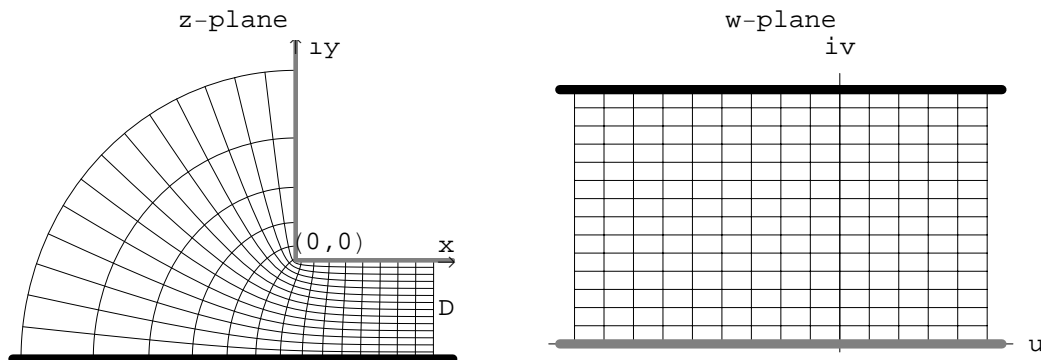


Abbildung 13.17: **Links:** Reale Anordnung B_z : ein Polschuh mit rechteckiger Kante und eine unendliche Ebene aus magnetisch hartem Material. Oder: ein Kondensator, bei dem die eine Elektrode im rechten Winkel abgebogen ist. Die Feldlinien müssen auf beiden Grenzflächen senkrecht stehen. **Rechts:** Hilfsproblem B_w : Anordnung mit bekannter Potential- und Feldverteilung, z.B. ein ebener Plattenkondensator.

$z = f^{-1}(w)$ wird die reale Anordnung, B_z , auf eine andere, B_w , abgebildet, Die Äquipotential- und Feldlinien in der Anordnung B_w sind bekannt. Zumeist ist dies ein ebener Plattenkondensator oder der Spalt zwischen unendlich ausgedehnten Polschuhen. Das homogene Feld hat die Stärke $E = V_0/d$; meist ist $d = \pi$. Die Feldlinien sind parallel zur v -Achse, die Äquipotentiallinien zur u -Achse. Diese beiden Sätze von orthogonalen Geraden werden durch die konforme Abbildung, - die winkeltreu ist, solange $f'(z) \neq 0$ ist, - in ein meist krummliniges orthogonales Netz in der z -Ebene transformiert und geben dort Feld- und Äquipotentiallinien in der untersuchten Anordnung. Die wesentliche Aufgabe besteht darin, die komplexe Funktion $w = f(z)$ und deren Inverse zu finden, die die gegebene Anordnung B_z auf die bekannte Anordnung B_w abbildet. Eine Methode zum Auffinden dieser Funktions wird im nächsten Paragraphen gegeben. Diese ist nur dann anwendbar, wenn die Ränder von B_z durch ein Polygon approximiert werden können.

Die Methode wurde extensiv, und wird immer noch, zur Berechnung statischer elektrischer oder magnetischer Feld herangezogen. Sie kann auch zur Berechnung zeitlich langsam veränderlicher elektrischer Felder innerhalb gut leitender Strukturen verwendet werden, solange die zugehörige Wellenlänge λ groß im Vergleich zu den Abständen der Elektroden ist. Eine andere Anwendung behandelt die wirbelfreie Potentialströmung in der Hydrodynamik.

Ein großer Vorteil der konformen Abbildung ist, dass die Laplacegleichung, die in kartesischen Koordinaten x, y separabel ist, diese Eigenschaft auch in den krummlinigen Koordinaten u, v beibehält. Dies wird am Ende des Kapitels noch weiter ausgeführt.

13.10.2 Berechnung der Abbildungsfunktion

In vielen Fällen kann die Bestimmung der Abbildungsfunktion $w = f(z)$ in drei Teilschritten vorgenommen werden:

1. Abbildung des ebenen Kondensators auf die t' -Halbebene, $t' = f_1^{-1}(w)$, $w = f_1(t')$;
2. Abbildung der realen Konfiguration auf die t -Halbebene, $z = f_3^{-1}(t)$, $t = f_3(z)$;
3. Abbildung der t -Halbebene auf die t' -Halbebene $t = f_2^{-1}(t')$, $t' = f_2(t)$.

Die gesamte Abbildungsfunktion und ihre Inverse sind dann:

$$z = f_3^{-1}(f_2^{-1}(f_1^{-1}(w))), \quad w = f_1(f_2(f_3(z))). \quad (13.38)$$

Abbildung des ebenen Kondensators auf die t' -Halbebene

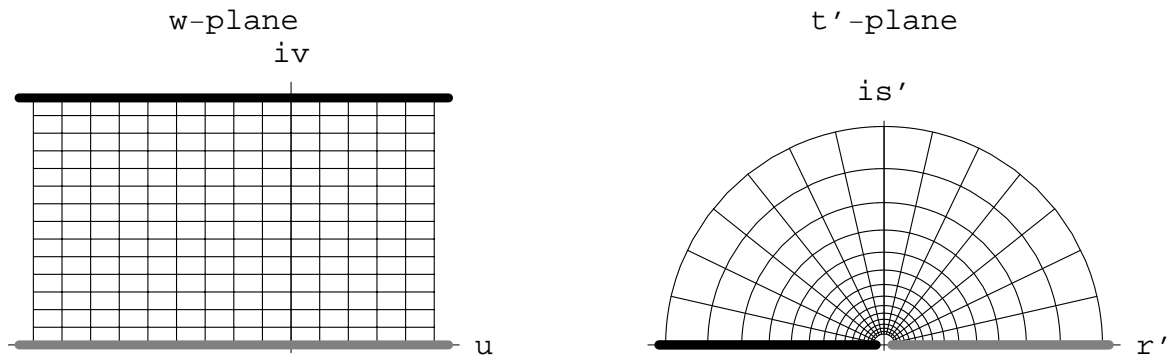


Abbildung 13.18: Der ebene Plattenkondensator, dessen untere Elektrode auf Potential V_0 ist, dessen obere Elektrode auf Potential 0 ist, wird auf die obere Hälfte der t' -Ebene abgebildet. Die r' -Achse entspricht einer zweigeteilten Elektrode, die rechte Hälfte ist auf Potential V_0 , die linke ist auf Potential Null.

Der ebene Kondensator wird durch den Streifen (Abb.13.18) :

$$B_w : \quad w = u + iv, \quad -\infty \leq u \leq \infty, \quad 0 \leq v \leq D. \quad (13.39)$$

repräsentiert. Der einen Elektrode entspricht die u -Achse, $w = u + i0$, $-\infty \leq u \leq \infty$ mit dem Potential V_0 ; der anderen eine dazu parallele Gerade im Abstand $D = \pi$, $w = u + i\pi$, $-\infty \leq u \leq \infty$ mit dem Potential 0. Es kann auch eine umgekehrte Polung der Spannung zweckmäßig sein.

Dieser Streifen wird durch die Funktion $f_1^{-1}(w)$

$$t' = r' + is' = f_1^{-1}(w) = e^w; \quad w = u + iv = f_1(t') = \ln t'. \quad (13.40)$$

auf die obere Hälfte der t' -Ebene abgebildet. Dabei geht der untere Rand in die positive Hälfte der t' -Achse über, der obere Rand in den negativen Halbstrahl:

$$\begin{aligned} t' &= e^u, & -\infty \leq u \leq \infty, & \Rightarrow s' = 0, r' \geq 0; \\ t' &= e^u e^{i\pi}, & -\infty \leq u \leq \infty, & \Rightarrow s' = 0, r' \leq 0. \\ t' &= e^{i\pi v}, & 0 \leq v \leq \pi & \Rightarrow \text{Halbkreis } |t'| = 1. \end{aligned}$$

Die Feldlinien sind Halbkreise; die Äquipotentiallinien radiale Gerade.

Abbildung der realen Konfiguration auf die t -Halbebene

Für die gängig benutzten Konfigurationen sind die komplexen Funktionen, die die unten beschriebene Abbildung leisten, bekannt und können in einschlägigen Büchern und Artikeln nachgeschlagen werden. Wenn man eine konforme Abbildung benötigt, ist es sehr zu empfehlen, zuerst diese Werke zu konsultieren, bevor man sich der Mühe unterzieht, die Funktion selbst zu berechnen.

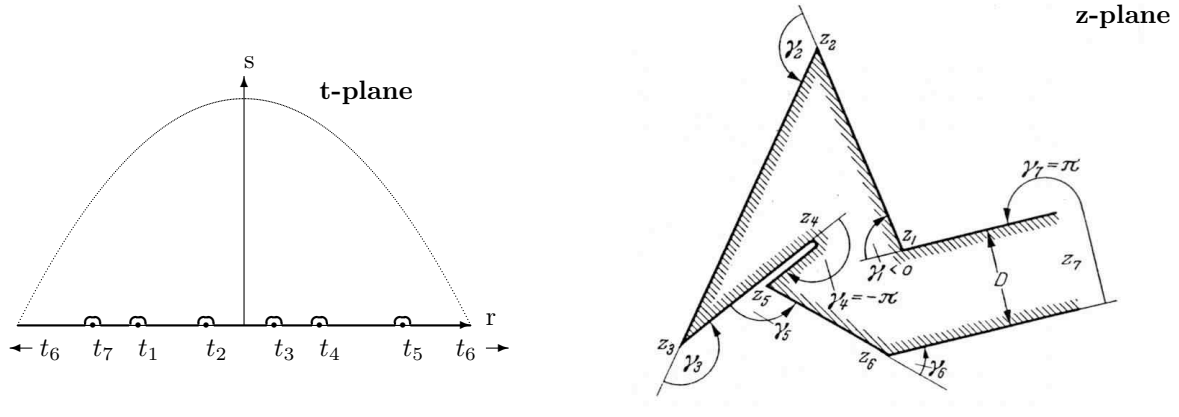


Abbildung 13.19: Die Schwarz-Christoffel Transformation (s. Lit.13.1): Der Polygonrand wird auf die reelle t -Achse, die Ecken z_1, z_2, \dots, z_n werden auf die Punkte t_1, t_2, \dots, t_n dieser Achse abgebildet. Wenn man das Polygon im Richtungssinn durchläuft, der in der Abbildung angegeben ist, dann ist γ_i positiv (negativ), wenn man an der Ecke z_i nach links (rechts) umschwenken muss. Mit anderen Worten: $\gamma_i < (>)0$ für konkave (konvexe) Polygonecken. $\gamma_i = -\pi$ ergibt sich bei einem in das prismatische Gebiet einspringenden Band (Punkt z_4). Bei einem sich ins Unendliche erstreckenden Parallelstreifen entsprechend einer Polygonecke $z_i = \infty$ ist $\gamma_i = \pi$.

Diese Abbildung

$$z = x + iy = f_3^{-1}(t), \quad t = r + is = f_3(z). \quad (13.41)$$

wird Schwarz-Christoffel-Transformation genannt. Sie bildet die obere Hälfte der t -Ebene auf das Innere eines Polygons mit den n Eckpunkten z_1, z_2, \dots, z_n ab. (s. Abb.13.19):

$$z = f_3^{-1}(t) = C_0 \int dt (t - t_1)^{-\gamma_1/\pi} (t - t_2)^{-\gamma_2/\pi} \dots (t - t_n)^{-\gamma_n/\pi} + C_1. \quad (13.42)$$

$$-\pi \leq \gamma_i \leq \pi, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i = 2\pi. \quad (13.43)$$

Der Integrationsweg von (13.42) ist im allgemeinen die gesamte t -Achse; dieser wird mit einem unendlich großen Halbkreis geschlossen. Die Punkte t_i , die auf der reellen t -Achse liegen, müssen in kleinen Halbkreisen umlaufen werden. Da die allgemeinste Abbildung der oberen t -Ebene auf sich selbst durch eine gebrochene lineare Funktion mit drei frei wählbaren Konstanten erfolgt (s. übernächster Paragraph), können in (13.42) drei Punkte t_i beliebig - jedoch unter Beibehaltung der Reihenfolge - festgelegt werden. Zur Berechnung der Werte t_i der übrigen Punkte sowie der von C_0 und C_1 muss man zuerst die Integration in (13.42) durchführen. Danach muss man ein Gleichungssystem aufstellen, indem man für z die Eckpunkte des Polygons einsetzt:

$$z_i = f_3^{-1}(t_i). \quad (13.44)$$

Dieses System ist im allgemeinen ein transzendentes; dessen Auflösung ist oft sehr schwierig. Es kann sogar unmöglich sein, eine analytische Lösung zu berechnen. In vielen interessierenden Fällen ist auch die Inversion $t = f_3(z)$ in analytischer Form nicht durchführbar.

Um die obige Formel (13.42) zu verstehen, wird deren Ableitung betrachtet.

$$dz/dt = C_0 (t - t_1)^{-\gamma_1/\pi} (t - t_2)^{-\gamma_2/\pi} \dots (t - t_n)^{-\gamma_n/\pi}$$

Sei t_5 der größte endliche Wert unter den $\{t_1, \dots, t_n\}$, die alle reell sind. Wenn t von einem Wert $t_a > t_5$ gegen t_5 strebt, dann bewegen sich die Punkte in der z Ebene auf einer Geraden, deren Steigung durch die Phase von C_0 bestimmt ist. Wenn t den Punkt t_5 auf einem Halbkreis umrundet, dann ändert sich die Phase des entsprechenden Faktors in dem Ausdruck um $-\gamma_5/\pi$. Damit läuft der Punkt $z(t)$ in der z -Ebene auf einer neuen Geraden weiter, deren Richtung um den Winkel γ_5 gedreht ist. Dieses Spiel geht so weiter. Die Bedingung (13.43) sorgt dafür, dass sich das Polygon schließt. Wählt man für einen der Punkte $t_i = \infty$, dann fällt der entsprechende Faktor in (13.42) fort; doch muss der Wert des Winkels γ_i in (13.43) berücksichtigt werden.

Andererseits: Fällt eine der Polygonecken, z_u , ins Unendliche (wie z_7 in Abb. 13.19 rechts), dann kann man die Konstante C_0 aus der Breite D des Streifens bestimmen. Bei einem endlichen Wert des entsprechenden Punktes t_u (t_u in Abb. 13.19)) kann man für Aufpunkte t in seiner Nähe $t = t_u + \rho e^{i\phi}$ mit sehr kleinem ρ setzen. In den Klammern $(t - t_i, t_i \neq t_u$ der Gl.(13.43) kann man $\rho \rightarrow 0$ gehen lassen und diese Faktoren vor das Integral ziehen. Dann kann die Integration über ϕ ausgeführt werden. Das ergibt mit $\gamma_u = \pi$ folgenden Wert für die Änderung von z :

$$\Delta z = C_0 \prod_{i \neq u} (t_u - t_i)^{-\gamma_i/\pi} \int_{\pi}^0 d\rho i \rho e^{i\phi} / \rho e^{i\phi} = -i\pi C_0 \prod_{i \neq u} (t_u - t_i)^{-\gamma_i/\pi}. \quad (13.45)$$

Diese Vektor steht auf der vorhergehenden Polygonseite senkrecht, und es ist $D = |\Delta z|$. Wählt man auch $t_u = \infty$, so wird die Integration über einen Halbkreis mit unendlich großem Radius durchgeführt. Unter Berücksichtigung von (13.43) ergibt sich:

$$\Delta z = i\pi C_0. \quad (13.46)$$

Beispiel: Die Abbildungsfunktion für den Spalt und die Kante eines Polschuhs

Hier werden die Funktionen berechnet, die die Berechnung und das Zeichnen der Feldverteilung im Spalt zwischen zwei Polschuhen und im Aussenbereich derselben gestatten. Die Anordnung wurde bereits in Abb.13.17 gezeigt. Die Konfiguration wird vereinfacht, indem in der Symmetrieebene eine Ebene aus magnetisch hartem Material eingezogen wird. Wir behandeln den äquivalenten elektrostatischen Fall; dann sind die Begrenzungen metallische Elektroden.

Da der Punkt $t_1 = \infty$ ist, kann in der Abbildungsfunktion (13.43) der entsprechende Faktor weggelassen werden. Die anderen Werte für die Punkte und Winkel findet man in Tab.13.2.

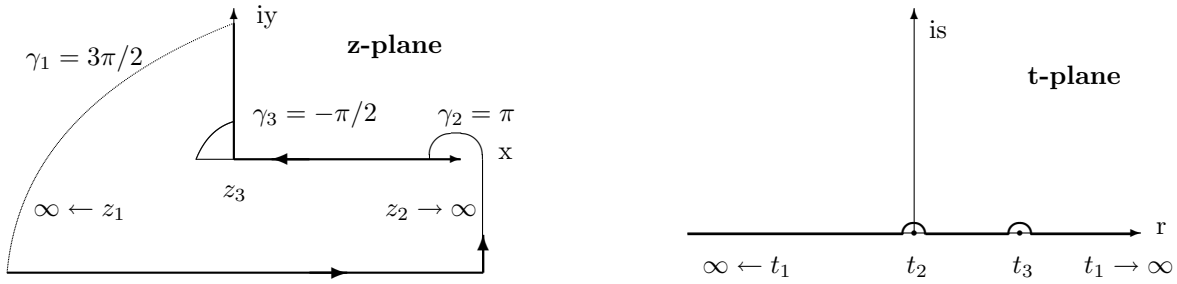


Abbildung 13.20: **Links:** Die reale Konfiguration wird in der z -Ebene durch ein Polygon dargestellt, das sich im Unendlichen schließt. Dieses wird durch eine Schwarz-Christoffel-Transformation, $z = f_3^{-1}(t)$, aus dem in der t -Ebene angegebenen Weg erzeugt. $t_1 = \infty$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$ können willkürlich gewählt werden.

Tabelle 13.2: Eckpunkte z_i des Polygons und Urbilder t_i

i	z_i	t_i	γ_i
1	∞	∞	$3\pi/2$
2	∞	0	π
3	0	1	$-\pi/2$
			$\sum \gamma_i = 2\pi$

$$\begin{aligned}
 z &= C_1 + C_0 \int dt (t - t_2)^{-1} (t - t_3)^{1/2} = \\
 &= C_1 + C_0 \int dt t^{-1} (t - 1)^{1/2} = C_1 + C_0 [\sqrt{t-1} + \arctan \sqrt{t-1}].
 \end{aligned}$$

Aus der Bedingung $z = z_3 = 0$ folgt dann $C_1 = 0$. Der Wert von C_0 wird aus Formel (13.45) berechnet:

$$\Delta z = i D = -i\pi C_0 (t_2 - t_3)^{1/2} = -i\pi C_0 \sqrt{-1} = -i\pi C_0 e^{i\pi/2} = \pi C_0.$$

Hiebei wurde der Zweig der Quadratwurzel durch $\sqrt{t-1} = +\sqrt{t-1}$ für $t > 1$ festgelegt. Damit ist die Abbildungsfunktion vollständig berechnet:

$$z = f_3^{-1}(t) = \frac{i2D}{\pi} [\sqrt{t-1} - \arctan \sqrt{t-1}]. \quad (13.47)$$

Der Vergleich der rechten Bilder in den Abbildungen 13.18 und 13.21 zeigt, dass die Potentialverteilung auf der r - und der r' -Achse gleich sind. Daher kann man die Variablen t und t' gleichsetzen; die entsprechende Abbildungsfunktion ist die identische Transformation $t = f_2^{-1}(t') = t'$, $t' = f_2(t) = t$.

Die vollständige Abbildungsfunktion der w - auf die z -Ebene ist also nach Gln.(13.47) und (13.38):

$$\begin{aligned}
 z &= f_3^{-1}(t) = f_3^{-1}(f_2^{-1}(f_1^{-1}(w))) = f^{-1}(w) \\
 &= \frac{i2D}{\pi} [\sqrt{e^w - 1} - \arctan \sqrt{e^w - 1}].
 \end{aligned} \quad (13.48)$$

Die inverse Funktion $w = f(z) = f_1(f_2(f_3(z)))$ lässt sich nicht in analytischer Form angeben, weil eine analytische Inversion des transzendenten Ausdruck in Gl.(13.47) nicht möglich ist. Die Inversion kann aber numerisch durchgeführt werden, s. den übernächsten Paragraphen. Zur Erstellung eines Bildes der Äquipotential- und Feldlinien wie im linken Bild der Abb.13.17 genügt die Funktion $z = f^{-1}(w)$. In *Mathematica 5* gibt es hierfür ein Package; damit kann man die angesprochene Zeichnung herstellen. Die Befehle lauten:

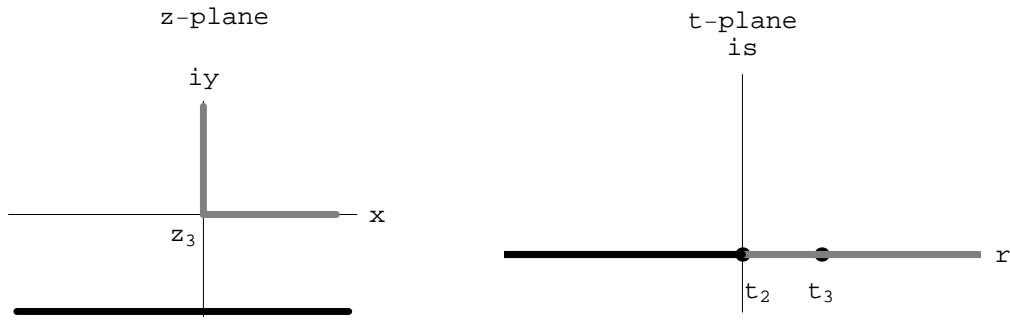


Abbildung 13.21: **Links:** Die rechtwinkelige Elektrode (grau, entsprechend dem Polschuh) ist auf Potential V_0 ; die Symmetrieebene (schwarz) auf Potential 0. **Rechts:** Den Elektroden der linken Abbildung entsprechen die gleich gefärbten Teile der r -Achse. t_3 entspricht z_3 . Die Auswertung der Funktion $f_3^{-1}(t)$ liefert die eben angegebene Zuordnung der Grenzlinien; ebenso ergibt sich, dass dem Bereich $[t_2 = 0, t_3 = 1]$ der positive Teil der x -Achse, dem Bereich $[t_3 = 1, t_1 = \infty]$ der der y -Achse entspricht.

```
<<Graphics'ComplexMap'
gd = 1;
fc = 2 I gd /Pi ( Sqrt[ e^# - 1] - ArcTan[Sqrt[e^# - 1]] ) &
CartesianMap[fc, {-5, 3}, {0.0001, Pi} ];
```

gd ist der Abstand zwischen den parallelen Teilen der Elektroden, s. Abb.13.17. Das Kaufmannsund (&) schließt in *Mathematica* eine "pure function" ab; das Funktionsargument wird durch # symbolisiert. Es entspricht der Variablen w in Gl.(13.48). In *Mathematica 7* gibt es dieses Package nicht mehr. Aber man kann hier konforme Abbildungen mittels des Befehls `ParametricPlot[]` durchführen. Dies ist an einem Beispiel ganz am Ende dieses Kapitels gezeigt.

Abbildung der t -Halbebene auf die t' -Halbebene durch eine Möbiustransformation

Bei den bisher behandelten Teilschritten werden die Hilfsanordnung, deren Potential und Feld bekannt sind, und die reale Anordnung, deren Felder gesucht werden, jeweils auf eine obere Halbebene, die t' - bzw. die t -Ebene abgebildet. Die Bilder der Ränder (Elektroden oder Polschuhbegrenzungen) liegen in beiden Fällen auf der r' - bzw. r -Achse. Wenn eine Elektrode des Kondensators geerdet ist, liegt in der t' -Ebene die Spannung an der linken ($r' < 0$) oder rechten ($r > 0$) Hälfte der reellen Achse. Im allgemeinen gilt dies nicht mehr für die komplexe t -Ebene. Dort liegt die Spannung an irgendeinem Teil ($r_1 < r < r_2$) der reellen Achse. Dann benötigt man eine Abbildungsfunktion f_2 ; deren Aufgabe ist es, die t -Ebene so auf die t' -Ebene abzubilden, dass die unter Spannung stehenden und die spannungsfreien Teile des Randes, also der r -Achse, auf die unter Spannung stehenden und die spannungsfreien Teile der r' -Achse übergehen. Dies kann mit der folgenden bilinearen Transformation (auch Möbiustransformation genannt) durchgeführt werden.

$$t' = f_2(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad t = f_2^{-1}(t') = \frac{\delta t' - \beta}{\alpha - \gamma t'}. \quad (13.49)$$

Um die hier relevanten Eigenschaften dieser Transformation zu diskutieren, ändern wir vorübergehend die Variablenamen und ersetzen:

$$t \rightarrow z, \quad t' \rightarrow w: \quad \text{also} \quad w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}. \quad (13.50)$$

Diese Funktion bildet die volle z - auf die volle w -Ebene umkehrbar eindeutig ab, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Sie ist durch die Angabe dreier Paare entsprechender Punkte ($t_i \iff t'_i$, $i = 1, 2, 3$) bestimmt. Diese Paarungen ergeben in die obige Definition eingesetzt ein System von Gleichungen, das die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt; letzterer ändert aber nicht die Transformationseigenschaften. Die entsprechende Funktion ist dann:

$$\frac{w - w_2}{w - w_1} : \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_2}{z - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} := \zeta. \quad (13.51)$$

Das Doppelverhältnis vierer Punkte z_i ist definiert als:

$$D(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

Sind w_i die den z_i entsprechenden Punkte der w -Ebene, so folgt aus der vorhergehenden Gleichung:

$$D(w_1, w_2, w_3, w_4) = D(z_1, z_2, z_3, z_4) = \zeta.$$

Das Doppelverhältnis ist eine Invariante der bilinearen Transformation. Das Doppelverhältnis vierer verschiedener Punkte ist dann und nur dann reell, wenn die Punkte auf einem Kreis oder einer Geraden liegen. Gerade können als Kreise mit unendlich großem Radius betrachtet werden. In diesem Sinne bildet jede bilineare Transformation Kreise in Kreise ab. Das Innere eines Kreises wird entweder auf das Innere oder Äußere eines Kreises oder einer Halbebene abgebildet. Abbildungen, bei denen ein gegebener Kreis in der z -Ebene in einen gegebenen Kreis in der w -Ebene übergeht, können wir dadurch herstellen, dass wir auf beiden Kreisen drei Punkte wählen und einander zuordnen.

Die Resultate dieses Exkurses in die Funktionentheorie werden auf unser Problem angewendet. Wir wollen die r -Achse durch eine Funktion f_2 , Gl. (13.49), auf die r' -Achse abbilden; dabei müssen die Werte r_1 und r_2 , die das unter Spannung stehende Intervall vom spannungsfreien abgrenzen, in $r' = 0$ und $r' = \infty$ übergehen. Ein dritter Punkt r_3 bzw. r'_3 ist frei wählbar; ebenso Permutationen in der Zuordnung. Dies gibt dann ein System von Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Gl. (13.49). Eine geschickte Ausnützung dieser Möglichkeiten kann hier entscheidend sein für eine günstige Form der gesuchten Abbildungsfunktion f_2 .

13.10.3 Komplexes Potential und komplexe Felddarstellung

Es ist zweckmäßig alle reellen Größen, die zusammenhängende Paare sind, wie z.B. die reellen Koordinaten x, y bzw. u, v bzw. E_x, E_y zu komplexen Größen z bzw. w bzw. E_z zusammenzufassen; oder einzelne reelle Größen wie das Potential $\Phi_1(x, y)$ mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zu einem komplexen Potential $\Phi(z)$ zu ergänzen; ebenso das Potential $\Psi(w)$ in der komplexen w -Ebene. Dies wurde in §6.6.1.2 erklärt. So bekommt man die komplexen Felddarstellungen:

$$\Phi(z) = \Phi_1(x, y) + i \Phi_2(x, y); \quad (13.52)$$

$$\Psi(w) = \Psi_1(u, v) + i \Psi_2(u, v). \quad (13.53)$$

$$\Psi(w) := \Phi(z). \quad (13.54)$$

$$(E_x, E_y) = -\text{grad}_z \Phi(z) := -(\partial\Phi_1/\partial x, \partial\Phi_1/\partial y); \quad E_z = E_y + iE_x. \quad (13.55)$$

$$(E_u, E_v) = -\text{grad}_w \Psi(w) := -(\partial\Psi_1/\partial u, \partial\Psi_1/\partial v); \quad E_w = E_v + iE_u. \quad (13.56)$$

Die Gleichsetzung in Gl.(13.54) bedeutet, dass jeder Punkt bei der Abbildung seinen Wert des Potentials "mitnimmt." Die komplexen Felder lassen sich aus den komplexen Potential durch einfache Differentiation ableiten.

$$E_z = E_y + iE_x = -\left(\frac{d\Phi}{dz}\right), \quad E_w = E_v + iE_u = -\left(\frac{d\Psi}{dw}\right). \quad (13.57)$$

Die Kettenregel ermöglicht eine Umrechnung der Feldberechnung:

$$E_z = - \left(\frac{d\Psi}{dw} \frac{dw}{dz} \right). \quad (13.58)$$

Bei den Vorgaben $w = 0 : \Psi_1 = V_0$ und $w = \pi : \Psi_1 = 0$ sind das komplexe Potential und E_w das komplexe Feld und im ebenen Plattenkondensator :

$$\Psi(w) = V_0 (1 + iw/\pi); \quad E_w = iV_0/\pi. \quad (13.59)$$

Damit und mit (13.58) erhält man eine Formel zur Berechnung der Feldverteilung in der realen Anordnung, sobald die Abbildungsfunktion $f(z)$ bekannt ist.

$$\Phi(z) = \Psi(w = f^{-1}(z)); \quad (13.60)$$

$$E_z = E_y + iE_x = i \frac{V_0}{\pi} (f'(z)). \quad (13.61)$$

13.10.4 Das Transformationsverhalten des zweidimensionalen Laplaceoperators, der Potentialgleichung und der Poissongleichung

Der Übergang von den kartesischen Koordinaten x, y zu den krummlinigen Koordinaten u, v erfolgt über die komplexe Transformation:

$$w = u + iv = f(z) = f(x + iy); \quad z = f^{-1}(w). \quad (13.62)$$

Das Potential $\Phi_1(x, y)$ zu einer gegebenen Ladungsverteilung $\rho_z(x, y)$ ist durch Lösung der Poissongleichung

$$\Delta_z \Phi_1(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi_1(x, y) = - \rho_z(x, y)/\varepsilon \quad (13.63)$$

zu berechnen. Die komplexen Potentiale in den beiden komplexen Variablen werden wieder gleichgesetzt:

$$\Psi_1(u, v) + i \Psi_2(u, v) = \Psi(w) = \Phi(z) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y). \quad (13.64)$$

Dann lässt sich der Laplaceoperator folgendermaßen umrechnen:

$$\begin{aligned} \Delta_w \Psi_n &= \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \Psi_n = \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial w \partial w^*} \\ &= \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z \partial z^*} \quad n = 1, 2 \\ &= \frac{1}{|f'(z)|^2} \Delta_z \Phi_n = \frac{1}{|f'(z)|^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_n(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n(x, y)}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Da wir die Potentiale gleichgesetzt haben, müssen wir jetzt die Ladungsverteilung umrechnen gemäß :

$$- \rho_w(u, v)/\varepsilon = \Delta_w \Psi_1 = \frac{1}{|f'(z)|^2} \Delta_z \Phi_1 = - \frac{1}{|f'(z)|^2} \rho_z/\varepsilon. \quad (13.65)$$

Daraus ergibt sich folgendes Transformationsgesetz für die Ladungsverteilungen:

$$\rho_w(u, v)/\varepsilon = \frac{1}{|f'(z)|^2} \rho_z(x, y)/\varepsilon. \quad (13.66)$$

$\rho_z \equiv 0$ impliziert $\rho_w \equiv 0$. Daraus folgt das äquivalente Bestehen der Laplacegleichungen im ladungsfreien Fall:

$$\Delta_z \Phi_1 = 0 \iff \Delta_w \Psi_1 = 0. \quad (13.67)$$

Auf dieser Gleichheit beruht die Lösung der Randwertprobleme durch Konforme Abbildung.

13.10.5 Transformation der Greenschen Funktion

Auch die Greenschen Funktionen werden zu komplexen erweitert. Die bisher benutzte reelle Greensche Funktion $G(x, y)$ wird der Realteil $G_1(x, y)$ der komplexen $G(z)$. Die Greenschen Funktionen in den beiden Koordinatensystemen gehorchen folgenden Gleichungen:

$$\Delta_z G_1(x, y; x', y') = -\delta(x - x') \delta(y - y'), \quad (13.68)$$

$$\Delta_w \bar{G}_1(u, v; u', v') = -\delta(u - u') \delta(v - v'). \quad (13.69)$$

$$\bar{G}(w) = G(z). \quad (13.70)$$

In Anbetracht des Transformationsgesetzes der Ladungsverteilungen, Gl.(13.66), mag es überraschen erscheinen, dass die rechten Seiten beider Gleichungen für die Greenschen Funktionen nur die Deltadistributionen enthalten; dass also nirgends der Faktor $\frac{1}{|f'(z)|^2}$ aufscheint. Die Erklärung ist, dass die Definition der Einheitsquelle, vgl. Gl.(10.29), gerade einen kompensierenden Faktor hereinbringt. Dies wird noch durch eine Rechnung bestätigt:

$$\begin{aligned} du \, dv &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| dx \, dy = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \, dy \\ &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \, dy = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy = |f'(z)|^2 dx \, dy. \end{aligned}$$

$$dx \, dy = \left| \frac{1}{f'(z)} \right| du \, dv = g_1 g_2 du \, dv, \quad \left| \frac{1}{f'(z)} \right| = g_1 g_2.$$

$$\begin{aligned} \Delta_z G(x, y; x', y') &= -\delta(x - x') \delta(y - y') \\ &= |f'(z)|^2 \Delta_w \bar{G}(u, v; u', v') = -\frac{\delta(u - u') \delta(v - v')}{g_1 g_2} = \\ &= \underline{|f'(z)|^2} \Delta_w \bar{G}(u, v; u', v') = -\underline{|f'(z)|^2} \delta(u - u') \delta(v - v'). \end{aligned}$$

Damit ist Gl.(13.69) bestätigt. - Hat man die Greensche Funktion in einem Koordinatensystem berechnet, z.B. $\bar{G}(w)$, so kann man diese sofort in das andere umrechnen gemäß :

$$G(z) = \bar{G}(w = f(z)). \quad (13.71)$$

13.10.6 Die komplexe Greensche Funktion der Potentialgleichung

Genauso wie man das reelle Potential $\Phi_1(x, y)$ zu einem komplexen $\Phi(z) = \Phi_1(x, y) + i\Phi_2(x, y)$ erweitern kann (s. 13.10.3), kann man auch die Greensche Funktion $G_1(x, y; x', y')$ der Potentialgleichung zu einer komplexen erweitern. Wir zeigen dies am Beispiel der Greenschen Funktion des freien Raumes, $G_1(x, y; x', y') = -(\ln P)/2\pi$, Gl.(14.19), die in §14.6 abgeleitet werden wird. $P = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ ist der Abstand des Aufpunkts (x, y) vom Quellpunkt (x', y') . Diese reellen Koordinaten werden wieder zu je einer komplexen vereinigt; die angeführte Greensche Funktion wird damit umgeschrieben:

$$\begin{aligned} z &:= x + iy, \quad z' := x' + iy'; \quad |z - z'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = P; \\ G_1(x, y; x', y') &= -\frac{1}{2\pi} \ln P = -\frac{1}{2\pi} \ln(|z - z'|). \\ \log Z &= \ln |Z| + i \arg(Z) \quad \text{für jedes } Z. \\ G(z; z') &= G_1(x, y; x', y') + iG_2(x, y; x', y') = -\frac{1}{2\pi} \ln(z - z'). \end{aligned} \quad (13.72)$$

Die Definition des komplexen Logarithmus zeigt, wie diese Erweiterung vorzunehmen ist, ohne dass die Cauchy-Riemannschen Gleichungen herangezogen werden müssen. Dieser Ausdruck eignet sich auch gut, um Reihendarstellungen der Greenschen Funktion zu entwickeln, z.B. in Polarkoordinaten

$$z_{>} = r_{>} e^{i\phi_{>}}, \quad z_{<} = r_{<} e^{i\phi_{<}}$$

ist die Koordinate $z_{>}$ bzw. $z_{<}$ diejenige, die den größeren bzw. kleineren Betrag, $r_{>}$ bzw. $r_{<}$, aufweist. Die Winkel $\phi_{>}$ und $\phi_{<}$ sind die Phasen von z und z' gemäß der Zuordnung dieser beiden Variablen zu $z_{>}$ und $z_{<}$. Da im allg. $|z_{<}/z_{>}| < 1$ ist, kann im nachfolgenden für den Logarithmus die Reihenentwicklung $\ln(1 - z) = -(z + z^2/2 + z^3/3 + \dots)$ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} G(z; z') &= -\frac{1}{2\pi} \ln[z - z'] = -\frac{1}{2\pi} \ln(z_{>} [1 - \frac{z_{<}}{z_{>}}]) = -\frac{1}{2\pi} \ln z_{>} - \frac{1}{2\pi} \ln \left(1 - \frac{z_{<}}{z_{>}} \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln z_{>} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^m e^{im\phi_{<}} e^{-im\phi_{>}}. \end{aligned} \quad (13.73)$$

Der Realteil obiger Reihenentwicklung liefert folgende Reihendarstellung der reellen Greenschen Funktion (vgl. Gl.(14.23)):

$$G_1(r, \phi; r', \phi') = -\frac{1}{2\pi} \ln r_{>} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^m \cos[m(\phi - \phi')]. \quad (13.74)$$

Durch Einsetzen der Funktion einer konformen Abbildung, $z = f^{-1}(w)$, lassen sich Ausdrücke für die Greensche Funktion der Potentialgleichung im freien Raum in weiteren krummlinigen orthogonalen Koordinatensystemen angeben; daraus lassen sich dann wieder Reihenentwicklungen ableiten.

13.10.7 Lösung eines Randwertproblems

Eine Widerstandsplattenkammer (RPC = **R**esistive **P**late **C**hamber) ist ein moderner Typ eines Teilchenzählers. Sie besteht aus zwei dielektrischen parallelen Platen; auf der einen ist eine durchgehende metallische Elektrode; auf der anderen sind Streifen als Elektroden. Bei einem sehr einfachen Modell einer solchen Anordnung werden die dielektrischen Platten nicht berücksichtigt, ebenso die Spalten zwischen den Streifen. Zu Berechnung des durch ein zu messendes Teilchen induzierten Signals dient ein Hilfsfeld, s. Abb.13.24, das von einer statischen Spannung, die an einem Streifen und an der durchgehenden Gegenelektrode liegt, erzeugt wird (Theorem von Ramo, s.z.B. [Lit.13.6]). Da die Elektroden sehr lang sind im Vergleich zum Abstand zwischen ihnen, stellt ein zweidimensionales Modell eine gute Näherung dar.

Wir berechnen hier die Potential- und Feldverteilung in folgendem Model: Die Elektroden eines ebenen Plattenkondensators der Dicke D sind auf Potential Null, nur auf einem Streifen der Breite b ist eine Spannung V_0 eingegrägt:

$$y = 0, \quad -b/2 < x < b/2: \quad \Phi = V_0; \quad \text{sonst } y = 0, D: \quad \Phi = 0. \quad (13.75)$$

Die Potentialverteilung wird mittels einer Greenschen Funktion $G(x, y)$, die der Differentialgleichung (13.68) und homogenen Randbedingungen überall auf beiden Elektroden $y = 0, D$ genügt, berechnet. Die Fourierdarstellung derselben

$$G(x, y; x', y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{1}{\sinh(kD)} e^{ik(x-x')} \sin(ky_{<}) \sin[k(D - y_{>})] \quad (13.76)$$

findet man mittels Methode der schrittweisen Reduktion, §12.3, und der partiulären Integrale, s.Gl.(12.15). Diese und die Laplacegleichung $\Delta\Phi_1 = 0$ werden in den 2. Greenschen Satz

eingesetzt:

$$\int \int (G \Delta' \Phi_1 - \Phi_1(x, y) \Delta' G(x', y'; x, y)) dx' dy' = \int dx' \left[G \frac{\partial \Phi_1}{\partial n'} - \Phi(x', y') \frac{\partial G}{\partial n'} \right]_{y=0}^{y=D}$$

$$\Phi_1(x, y) = \int_{-b/2}^{b/2} dx' V_0 \frac{\partial G}{\partial y'} \Big|_{y=0} = \frac{2V_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kD)} \cos(kx) \sin(kb/2). \quad (13.77)$$

$$\Phi(z) = \Phi_1(x, y) + i \Phi_2(x, y) = \frac{-2iV_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{\sin(kz)}{\sinh(kD)} \sin(kb/2). \quad (13.78)$$

Das reelle Potential $\Phi_1(x, y)$ wurde folgendermaßen zu einem komplexen $\Phi(z)$ der komplexen Variablen $z = x + i y$ erweitert: Zu dem Teil des Integranden in (13.77), der von x und y abhängt, $\cos(kx) \sinh(ky)$, wurde über die Cauchy-Riemannschen Gleichungen ein Imaginärteil, $-\cosh(ky) \sin(kx)$, gesucht; diese wurden dann zur komplexen Funktion $-i \sin[k(x + i y)]$ zusammengefasst. Um die Auswertung des Integrals (13.78) zu vereinfachen, wird es nach z abgeleitet; das resultierende Integral findet man in Integraltabellen.

$$\frac{d\Phi}{dz} \sim \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\cos(kz)}{\sinh(kD)} \sin(kb/2) = \frac{1}{D} \frac{\sinh(\pi b/2D)}{\cosh(\pi b/2D) + \cosh(\pi z/D)}.$$

Ebendort findet man auch eine Formel für die unbestimmte Integration des Resultats bzgl. z .

$$\Phi(z) = \frac{-iV_0}{\pi} \ln \left[\frac{\cosh[\pi(z + b/2)/2D]}{\cosh[\pi(z - b/2)/2D]} \right] := \frac{-iV_0}{\pi} w. \quad (13.79)$$

Damit ist das komplexe Potential für das gestellte Problem gefunden. Daraus kann man auch das komplexe elektrische Feld ableiten. Die Äquipotential- und Feldlinien lassen sich mit *Mathematica* mittels des Befehls `ParametricPlot[]` in einer speziellen Form für komplexe Funktionen zeichnen (s. Abb.13.24 und *Mathematica*programm am Ende dieses Kapitels):

Das obige Resultat gibt bereits die Lösung des gestellten Problems. Dazu war die konforme Abbildung gar nicht nötig. Eine Betrachtung des Ausdrucks zeigt, dass diese Lösung genau derjenigen entspricht, die man durch die drei in §13.10.2 besprochenen Schritte erhält. Durch die letzte Gleichsetzung in (13.79) haben wir das Potential gleichgesetzt mit dem eines ebenen Plattenkondensators in der w -Ebene, an dessen oberer bzw. unterer Elektrode ($w = iD$ bzw. 0) das Potential V_0 bzw. 0 liegt. Die Funktion $w = f(z)$, die in Gl. (13.79) definiert wurde, vermittelt die konforme Abbildung der beiden Kondensatoren aufeinander. Unten sind nur die hyperbolischen durch Exponentialfunktionen ersetzt worden.

$$w = f(z) = \ln \left[\frac{e^{\pi z/D} e^{\pi b/2D} + 1}{e^{\pi z/D} + e^{\pi b/2D}} \right] = f_1(f_2(f_3(z))); \quad (13.80)$$

$$z = f^{-1}(w) = \frac{D}{\pi} \ln \left[\frac{e^w e^{\pi b/2D} + 1}{e^w - e^{\pi b/2D}} \right] = f_1^{-1}(f_2^{-1}(f_3^{-1}(w))). \quad (13.81)$$

$$w = f_1(t') = \ln t', \quad t' = e^w \quad (13.82)$$

bildet den Plattenkondensator (= Streifen $0 \leq \text{Im}(w) \leq \pi$) auf die obere $t' = (r' + is')$ -Halbebene derart ab, dass die obere (untere) Platte in die negative (positive) r' -Achse übergeht. Die Spannung V_0 liegt also an der negativen Hälfte der r -Achse, s. Abb.13.22.

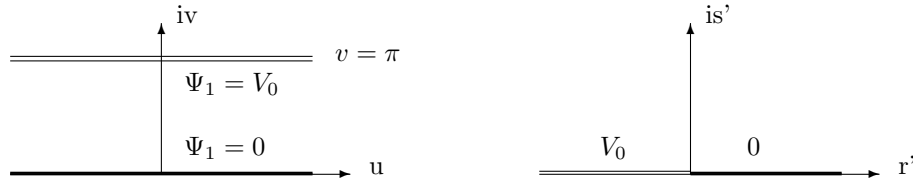


Abbildung 13.22: **Links:** Der gewöhnliche Plattenkondensator in der w -Ebene. **Rechts:** Der gestreckte Kondensator in der t' -Ebene.

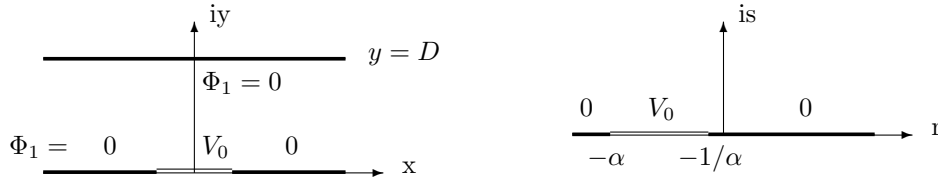


Abbildung 13.23: **Links:** Der Plattenkondensator in der z -Ebene mit der eingepprägten Spannung V_0 im Intervall $-b/2 < x < b/2$. **Rechts:** Der gestreckte Kondensator in der t -Ebene.

Die Transformation

$$z = f_3^{-1}(t) = \frac{D}{\pi} \ln t, \quad t = f_3(z) = e^{\pi z/D} \quad (13.83)$$

bildet den Kondensator (= Streifen $0 \leq \text{Im}(z) \leq D$) auf die obere $t = (r + is)$ -Halbebene derart ab, dass die untere (obere) Platte in die negative (positive) r -Achse übergeht. Das Intervall $y = 0$, $-b/2 \leq x \leq b/2$, an dem das Potential $\Phi = V_0$ liegt, wird auf das Intervall $s = 0$, $-\alpha \leq r \leq -1/\alpha$ abgebildet. s.Abb.13.23. Die Möbiustransformation

$$t = f_2^{-1}(t') = \frac{1 - \alpha t'}{t' - \alpha}, \quad t' = \frac{1 + \alpha t}{t + \alpha} = f_2(t), \quad \alpha = e^{\pi b/2D} > 0, \quad (13.84)$$

bildet die oberen Hälften der beiden t -Ebenen so aufeinander ab, dass die spannungsführenden Teile der beiden r -Achsen ineinander übergeführt werden; das heißt, das Intervall $-\alpha \leq r \leq -1/\alpha$ wird auf die negative r' -Achse abgebildet, vgl. jeweils die rechten Hälften der Abbn.13.22 und 13.23. Diese Eigenschaften kann man aus den nachfolgenden Funktionswerten ablesen:

$$t' = f_2(-\alpha) = \infty, \quad t' = f_2(-1/\alpha) = 0, \quad t' = f_2(-\alpha/2) = \frac{2}{\alpha} - \alpha < 0, \quad t' = f_2(i) = i.$$

Literatur zu konformer Abbildung und Theorie der Teilchendetektoren

Im obigen Text wird auf das Werk von Wendt, Literaturliste Nr.1, Bezug genommen.

1. G. Wendt, Statische Felder und Stationäre Ströme, §§56 - 60, in: Handbuch der Physik (Ed. S. Flügge), Bd.16, Springer, 1958.
2. J. van Bladel, Electromagnetic Fields, §§5.7, 5.8, McGraw-Hill, 1964.
3. H. Kober, Dictionary of Conformal Representations. Dover, 1957.
4. H. Buchholz, Elektrische und magnetische Potentialfelder. Springer, 1957.
5. E. Durand, Électrostatique. Masson et Cie. Paris, 1966. Tome II: Problèmes généraux conducteurs.

6. W. Blum, L. Rolandi: Particle Detection with Drift Chambers. Springer 1994. 2. Auflage,
W. Blum, L. Rolandi, W. Riegler, Springer 2008.

13.11 Bild und *Mathematica*programme zu dessen Erzeugung für einen Plattenkondensator mit streifenförmiger Anregung

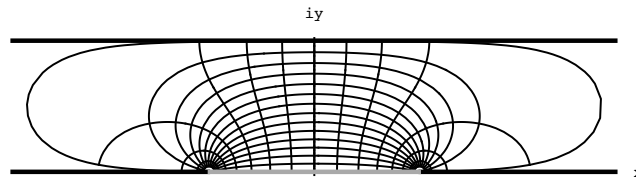


Abbildung 13.24: Äquipotential -und Feldlinien in einem ebenen Kondensator mit streifenförmiger Anregung. Die Spannung V_0 ist an dem grauen Streifen in der Mitte der unteren Elektrode eingepreßt. Die übrigen Teile derselben und die obere Elektrode liegen auf Potential Null.

Programm für *Mathematica* Version 5

```
<<Graphics`ComplexMap`
gd = 5; b = 8;
fc = Log[Cosh[Pi (# + b/2/(2 gd))]/Cosh[Pi (# - b/2/(2 gd))]] &
CartesianMap[ fc, {-7.2, 7.2}, {0.01, 4.98}, PlotPoints -> 50, Axes -> True,
Ticks -> None, AxesLabel -> {'x','iy'}, Epilog -> {Thickness[0.0075],
Line[{{-8,Pi},{8,Pi}}], Line[{{-8.0},{-2.5,0}], Line[{{8.0},{2.5,0}],
GrayLevel[0.6],Line[{{-2.5,0},{2.5,0}}] }];
```

Programm für *Mathematica* Version 7

```
gd = 5; b = 8;
ParametricPlot[Through[{Re, Im}[
Log[Cosh[Pi (x + I y + b/2)/(2 gd)]/ Cosh[Pi (x + I y - b/2)/(2 gd)]]],
{x, -7.2, 7.2}, {y, 0.01, 4.98}, PlotStyle -> None, PlotPoints -> 150, Axes -> True,
FrameTicks -> False, FrameLabel -> {"x", None, None, "I y"}, RotateLabel -> False,
ImageSize -> 450, Epilog -> {Thickness[0.005], Line[{{-8, Pi}, {8, Pi}}],
Line[{{-8, 0}, {-2.5, 0}], Line[{{8, 0}, {2.5, 0}],
GrayLevel[0.6], Line[{{-2.5, .0}, {2.5, 0}}]]]
```