

Kapitel 14

Die Greensche Funktion der Diffusions- und der Potentialgleichung im freien Raum

14.1 Zeitfreie Diffusionsgleichung und Potentialgleichung

Die **Diffusionsgleichung** im n -dimensionalen Raum lautet für eine Punktquelle an der Stelle $x = x'$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} - \kappa^2 G(x, x') = -\delta^n(x - x'). \quad (14.1)$$

Durch den Grenzübergang $\kappa \rightarrow 0$ geht daraus die **Potentialgleichung** hervor:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} = -\delta^n(x - x'). \quad (14.2)$$

Als **Randbedingung** fordern wir, dass G überall (ausser an $x = x'$) endlich ist und **im Unendlichen** gegen Null geht.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x, x') = 0. \quad (14.3)$$

Letztere Bedingung ist bei der Potentialgleichung für $n = 1$ und 2 nicht erfüllbar. Dies wird unten noch behandelt werden.

14.2 Eindimensionale Diffusionsgleichung

Als erstes behandeln wir die **1-dimensionale Diffusionsgleichung**:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \kappa^2 G(x, x') = -\delta(x - x'). \quad (14.4)$$

mit der der Randbedingung (14.3) genügenden Lösung:

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(x-x')}}{\omega^2 + \kappa^2} = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa |x-x'|}. \quad (14.5)$$

Zur Ableitung dieses Resultates benützen wir die Fourierdarstellung der δ -Distribution, Gl.(10.27). Ebenso setzen wir die Greensche Funktion als Fourierintegral an:

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(x-x')} g(\omega).$$

Einsetzen dieser beiden Integrale in Gl.(14.4) ermöglicht die noch unbekannte Amplitude $g(\omega)$ zu bestimmen:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(x-x')} (-\omega^2 - \kappa^2) g(\omega) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(x-x')}, \quad g(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \kappa^2}.$$

Damit ist der erste Teil der Lösung (14.5) gezeigt. Die zweite Darstellung erhält man aus der ersten, indem man das Fourierintegral mittels des Cauchyschen Residuensatzes und des Lemmas von Jordan auswertet; hierbei muss man beachten, den Integrationsweg längs der reellen Achse durch einen Halbkreis in der oberen, bzw. unteren Hälfte der komplexen ω -Ebene zu schliessen, je nachdem, ob $(x - x') > 0$ bzw. < 0 ist; dies führt dann zum absoluten Betrag. (s. §13.4).

14.3 Eindimensionale Potentialgleichung

In Gl.(14.5) ist der Grenzübergang $\kappa \rightarrow 0$ nicht durchführbar. Die Greensche Funktion der **1-dimensionalen Potentialgleichung**

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\delta(x - x'), \quad (14.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x, x') = \text{endlich} \quad (14.7)$$

wird daher direkt nach der Methode der partikulären Integrale berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dx^2} &= 0 : \quad \psi_1 = x, \quad \psi_2 = \text{const.} := 1; \\ G(x, x') &= A \psi_1(x_{<}) \psi_2(x_{>}) = x_{<} ; \\ A &= -1/(p(x')W(x')), \quad p(x') = 1, \\ W(x') &= (x' \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -1; \quad \Rightarrow \quad A = 1. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Diese Greensche Funktion ist physikalisch wenig sinnvoll. Für $x \rightarrow \infty$ bleibt G endlich, geht aber nicht gegen Null.

14.4 Dreidimensionale Diffusions- und Potentialgleichung

Im **3-dimensionalen** Raum lauten die **Diffusionsgleichung**, die zugehörige Randbedingung

$$\Delta G - \kappa^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'); \quad (14.9)$$

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} G(\vec{r}, \vec{r}') = 0. \quad (14.10)$$

und ihre Lösung:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\kappa R}}{R} \quad \text{mit} \quad \vec{R} := \vec{r} - \vec{r}', \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (14.11)$$

Lässt man in Gln.(14.9) und (14.11) $\kappa \rightarrow 0$ gehen, erhält man die **3-dimensionale Potentialgleichung** mit der die Randbedingung (14.10) erfüllenden Lösung:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'); \quad (14.12)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R} \quad \text{mit} \quad \vec{R} := \vec{r} - \vec{r}', \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (14.13)$$

Wieder dient die Methode der partikulären Integrale zur Bestimmung der Greenschen Funktion. Zuvor werden aber Kugelkoordinaten um den Quellpunkt eingeführt (s. Abb.14.1):

$$\begin{aligned} X &= x - x' = R \sin \Theta \cos \Phi, \\ Y &= y - y' = R \sin \Theta \sin \Phi, \\ Z &= z - z' = R \cos \Theta. \end{aligned}$$

In diesen Koordinaten lautet die zu (14.9) gehörigen homogene Gleichung:

$$\Delta \psi - \kappa^2 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \nabla_{\Theta, \Phi}^2 - \kappa^2 \right) \psi = 0.$$

Den Winkelanteil $\nabla_{\Theta, \Phi}^2$ des Laplaceoperators benötigen wir nicht, da die Lösung wegen der Symmetrie des Problems in diesen Kugelkoordinaten radialsymmetrisch sein muss.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \kappa^2 \right) \psi(R) = 0, \quad \psi(R) = C \frac{e^{-\kappa R}}{R} + D \frac{e^{\kappa R}}{R}.$$

Da nur die erste der beiden partikulären Lösungen die Randbedingung $G = 0$ an $|\vec{r}'| \sim R \rightarrow \infty$ erfüllt, ergibt sich für die Greensche Funktion folgender Ansatz:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = C \frac{e^{-\kappa R}}{R}.$$

Die noch unbestimmte Konstante C wird berechnet, indem man Gl.(14.9) über eine Kugel vom Radius R integriert, deren Mittelpunkt der Quellpunkt ist; dabei lässt man am Schluss $R \rightarrow 0$ gehen. Zuvor wird noch das Volumsintegral mittels des Gaussschen Satzes in ein Oberflächenintegral umgewandelt.

$$\begin{aligned} \int_{|\vec{r}-\vec{r}'|\leq R} \int \int d\vec{r} (\Delta - \kappa^2) G &= \int \int \int d\vec{r} \operatorname{div} \operatorname{grad} G - \kappa^2 \underbrace{\int \int \int d\vec{r} G}_{\rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow 0} = \\ &= - \int \int \int d\vec{r} \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \underline{-1}. \\ \int_{|\vec{r}-\vec{r}'|=R} \int \int d\vec{r} \operatorname{div} \operatorname{grad} G &= \int_{|\vec{r}-\vec{r}'|=R} \int (\operatorname{grad} G, \vec{n}) R^2 \sin \Theta d\Theta d\Phi = \\ &= (\operatorname{grad} G, \frac{\vec{R}}{R}) R^2 \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\Phi = \underline{-C 4\pi} \\ R^2 (\operatorname{grad} G, \frac{\vec{R}}{R}) &= C \frac{\partial}{\partial R} \frac{e^{-\kappa R}}{R} \times \underbrace{(\operatorname{grad} R, \frac{\vec{R}}{R})}_{=1} R^2 = C R^2 \left(-\frac{1}{R^2} e^{-\kappa R} - \frac{\kappa}{R} e^{-\kappa R} \right) \Big|_{R \rightarrow 0} = \\ &= -C. \end{aligned}$$

14.5 Zweidimensionale Diffusionsgleichung

Die **2-dimensionale Diffusionsgleichung** und ihre die Randbedingung (14.10) erfüllende Lösung sind:

$$\left(\Delta G - \kappa^2 G(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \right) = -\delta^2(x - x') = -\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}'); \quad (14.14)$$

$$G(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa P); \quad \vec{P} := \vec{\rho} - \vec{\rho}', \quad (14.15)$$

$$P = |\vec{\rho} - \vec{\rho}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')} .$$

K_0 ist die Macdonaldfunktion der Ordnung 0, eine modifizierte Besselfunktion mit rein imaginärem Argument (s. (25.52) und (25.58)). P und die Polarkoordinaten sind in Abb.14.2 gezeigt. Aus der asymptotischen Formel (25.60) findet man das Verhalten obiger Greenscher Funktion für grosse Abstände Aufpunkt-Quelle:

$$G(\vec{\rho}, \vec{\rho}') \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\kappa P} \frac{1}{\sqrt{\kappa P}} . \quad (14.16)$$

Obige Formel (14.15) wie auch die folgende Reihendarstellung dieser Greenschen Funktion werden weiter unten in diesem Kapitel bewiesen werden.

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} K_m(\kappa\rho_{>}) I_m(\kappa\rho_{<}) \left(= \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa P) \right) . \quad (14.17)$$

Da jede modifizierte Besselfunktion mit ganzzahliger negativer Ordnung gleich der mit derselben positiven ist, ist die obige Reihe reell und könnte auch als Cosinusreihe geschrieben werden. Aus der Gleichsetzung von (14.15) mit (14.17) ergibt sich ein Spezialfall des Additionstheorems (25.67).

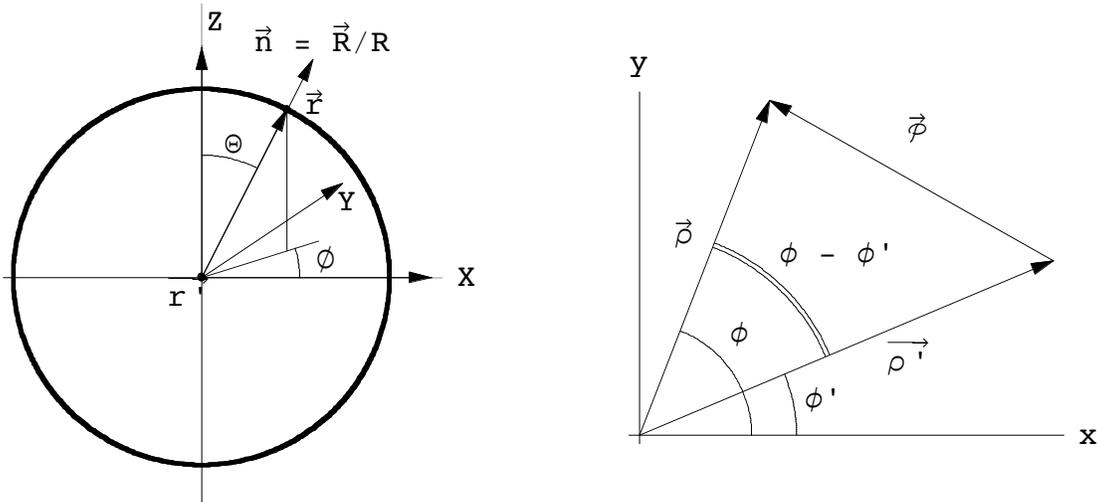


Abbildung 14.1: **Links:** Kugelkoordinaten R , Θ , Φ um den Quellpunkt \vec{r}' .
Rechts: Quell- und Aufpunkt in ebenen Polarkoordinaten.

14.6 Zweidimensionale Potentialgleichung

Die **2-dimensionale Potentialgleichung** und ihre die Randbedingung (14.10) erfüllende Lösung sind:

$$\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \Delta G(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = -\delta^2(x - x') = -\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') ; \quad (14.18)$$

$$G(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = G(\rho, \phi; \rho', \phi') = -\frac{1}{2\pi} \ln P . \quad (14.19)$$

Letztere folgt aus (14.15) mittels des Grenzüberganges $\kappa \rightarrow 0$ unter Berücksichtigung von Gl.(25.57):

$$K_0(\kappa P) = -\ln P - \ln(\kappa/2) + O(\kappa).$$

Die additive Konstante $\ln(\kappa/2)$ kann weggelassen werden, da sie von den Ableitungen in Gl.(14.18) sowieso annulliert würde. Führt man diesen Grenzübergang in Gl. (14.17) durch, erhält man zusammen mit (14.19) das folgende Additionstheorem:

$$G(\rho, \phi; \rho, \phi) = -\frac{1}{2\pi} \ln P = -\frac{1}{2\pi} \ln \rho_{>} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos[m(\phi - \phi')] \left(\frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \right)^m. \quad (14.20)$$

Die Lösung (14.15) des 2-dimensionalen Problems wird aus der des 3-dimensionalen, Gl.(14.11), nach der sogenannten **Absteigemethode** bestimmt. Dazu wird eine Dimension, z.B. die z -Koordinate, des 3-dimensionalen Problems durch Integration beseitigt.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Delta^{(3)} G^{(3)} - \kappa^2 G^{(3)} \right] dz &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \kappa^2 \right] G^{(3)} = \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \kappa^2 \right] \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz G^{(3)}}_{G^{(2)}} + \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial^2 G^{(3)}}{\partial z^2} \\ &= \left[\Delta^{(2)} - \kappa^2 \right] G^{(2)} + 0 = \\ &= -\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(z - z') = -\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}'). \end{aligned}$$

Das obige Integral für die 2-dimensionale Greensche Funktion wird durch die nachfolgende Substitution in eine Integraldarstellung der Macdonaldfunktion, Gl.(25.59) umgeformt:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{P^2 + (z - z')^2},$$

$$G^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dz G^{(3)}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-\kappa \sqrt{P^2 + (z - z')^2}}}{\sqrt{P^2 + (z - z')^2}}. \quad (14.21)$$

$$(z - z') = P \sinh t, \quad dz = P \cosh t, \quad \sqrt{P^2 + (z - z')^2} = P \cosh t.$$

$$G^{(2)}(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\kappa P \cosh t} = \frac{2}{4\pi} K_0(\kappa P); \quad (14.22)$$

$$P = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi')}.$$

Die Reihenentwicklung (14.17) der Greenschen Funktion der 2-dimensionalen Diffusionsgleichung berechnet man mit der Methode der schrittweisen Reduktion, §12.3. Mit dem Ansatz

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} g_m(\rho, \rho')$$

geht man in Gl.(14.14) ein und benützt die Vollständigkeitsrelation (10.26) der trigonometrischen Funktionen.

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - \kappa^2 \right] g_m(\rho, \rho') = -\frac{\delta(\rho - \rho')}{2\pi\rho} \sum_{m=1}^{\infty} e^{im(\phi - \phi')}.$$

Die Gleichung für die Radialfunktionen

$$\rho \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - \kappa^2 \right] g_m(\rho, \rho') = -\delta(\rho - \rho')$$

ist selbstadjungiert, vgl. Gl.(4.16). Ihre Lösung findet man gem. Gl.(12.10). Dabei wird berücksichtigt, dass g_m bei $\rho = 0$ endlich und bei $\rho = \infty$ Null sein muss. Der Wert der Wronskischen Determinante ist in Gl.(25.66) angegeben. Damit findet man:

$$g_m(\rho, \rho') = - I_m(\kappa\rho_{<}) K_m(\kappa\rho_{>}) \frac{1}{\rho(-1/\rho)}.$$

und damit die engültige Form dieser Entwicklung der Greenschen Funktion der zweidimensionalen zeitfreien Diffusionsgleichung:

$$G(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} I_m(\kappa\rho_{<}) K_m(\kappa\rho_{>}) \quad (14.23)$$

Die imaginäre Exponentialfunktion kann durch $\cos[m(\phi-\phi')]$ ersetzt werden, weil $I_{-n}(z) = I_n(z)$ und $K_{-n}(z) = K_n(z)$ gilt.

14.7 n-dimensionaler Fall

Die Green'sche Funktion der **n-dimensionalen Diffusionsgleichung** ist:

$$G(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{\kappa}{R}\right)^{n/2-1} K_{n/2-1}(\kappa R) \quad (14.24)$$

mit

$$R = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}.$$

Für $n \geq 3$ liefert der Grenzübergang $R \rightarrow 0$ unter Verwendung von Gl.(25.56) als Greensche Funktion der **n-dimensionalen Potentialgleichung** den Ausdruck:

$$G(x, x') = \frac{\Gamma(n/2)}{4\pi^{n/2} R^{n-2}}. \quad (14.25)$$

Die Berechnung erfolgt, analog wie bei $n = 3$, durch Einführung n -dimensionaler Kugelkoordinaten $R, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{n-2}, \Phi$ um den Quellpunkt $R = 0$ (s. §6.9 oder Sommerfeld VI, Kap.V, Anhang III). In diesen lautet die Diffusionsgleichung:

$$[\Delta - \kappa^2]\phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{n-1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \nabla_{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{n-2}, \Phi}^2 - \kappa^2 \right] \phi = 0. \quad (14.26)$$

Die Oberfläche Ω der n -dimensionalen Einheitskugel hat den folgenden Wert (loc.cit.):

$$\Omega = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2). \quad (14.27)$$

Für radialsymmetrische Lösungen folgt daraus mit der neuen unabhängigen Variablen $z = \kappa r$:

$$\phi = \psi(z) = \psi(\kappa R): \left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{n-1}{z} \frac{d}{dz} - 1 \right] \phi(z) = 0. \quad (14.28)$$

Mit dem Ansatz

$$\psi(z) = z^{-\alpha} K_\alpha(z)$$

ergibt sich aus Gl.(25.53), der Differentialgleichung für die modifizierten Besselfunktionen, folgende Gleichung für ψ :

$$z^{-\alpha} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1+2\alpha}{z} \frac{\partial}{\partial z} - 1 \right] \phi(z) = 0. \quad (14.29)$$

Der Vergleich der beiden Differentialgleichungen für ψ ergibt:

$$\alpha = n/2 - 1, \quad (14.30)$$

$$G(x, x') = C K_{n/2-1}(\kappa R)/(\kappa R)^{n/2-1}. \quad (14.31)$$

Obige Lösung wird in Gl.(1) eingesetzt, der resultierende Ausdruck wird wieder über eine Kugel vom Radius R integriert. Wir geben nur die Terme an, die im Limes $R \rightarrow 0$ übrig bleiben. $\partial G/\partial R$ wird mittels (25.65) berechnet:

$$\begin{aligned} \int \int \dots \int d^n x \operatorname{divgrad} G &= \int \dots \int_{|x-x'|=R} \left(\operatorname{grad} G \cdot \frac{\vec{R}}{R} \right) R^{n-1} d\Omega = \\ &= \underbrace{\left(\operatorname{grad} G \cdot \frac{\vec{R}}{R} \right)}_{=1} R^{n-1} \frac{dG}{dR} \underbrace{\int \dots \int d\Omega}_{=\Omega} = -1. \end{aligned} \quad (14.32)$$

$$\frac{dG}{dR} = \kappa C [K_{n/2-1}(\kappa R) (\kappa R)^{-(n/2-1)}]', \quad (14.33)$$

$$= -C \kappa (\kappa R)^{-(n/2-1)} K_{n/2}(\kappa R);$$

$$\begin{aligned} R^{n-1} \frac{dG}{dR} \Big|_{R \rightarrow 0} &= -C \kappa^{2-n/2} R^{n-1-n/2+1} \frac{1}{2} \Gamma(n/2) (\kappa R/2)^{-n/2} \Big|_{R \rightarrow 0} = \\ &= -C \kappa^{2-n} \Gamma(n/2) 2^{n/2-1}. \end{aligned} \quad (14.34)$$

$$-1 = -C \kappa^{2-n} \Gamma(n/2) 2^{n/2-1} \Omega = -C \kappa^{2-n} (2\pi)^{n/2}. \quad (14.35)$$