

Kapitel 15

Die Greensche Funktion der Helmholtzgleichung des freien Raums und in Röhren. Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

15.1 Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung und die Greensche Funktion des freien Raumes für 1, 2, 3 und n Dimensionen in geschlossener Form

Aus der **Wellengleichung** im n-dimensionalen Raum

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

erhält man für die harmonische Zeitabhängigkeit

$$u(x, t) = \varphi(x) \cos(\omega t + \alpha)$$

die **Helmholtzgleichung**:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} + k^2 \varphi(x) = 0; \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} .$$

Auch für letztere Differentialgleichung wird der Ausdruck Wellengleichung verwendet. Dies wird hier vermieden, um eine Verwechslung zwischen den obigen beiden Differentialgleichungen zu vermeiden. Die Greensche Funktion der Helmholtzgleichung ist definiert durch:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} + k^2 G = -\delta^n(x - x'). \quad (15.1)$$

Die Greensche Funktion der zeitfreien Diffusionsgleichung verschwindet im Unendlichen; die Forderung, dass die Lösung im Unendlichen Null sein muss, bestimmt diese eindeutig. Die Greensche Funktion der drei- und der höherdimensionalen Potentialgleichungen verschwinden ebenfalls im Unendlichen und sind durch diese Randbedingung eindeutig festgelegt. Im Gegensatz dazu reicht

diese Randbedingung im Unendlichen nicht für eine eindeutige Festlegung der Lösung der Helmholtzgleichung. Die adäquate Randbedingung für letztere im Unendlichen ist die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung. Diese wird weiter unten definiert.

Zuerst wird die Problemstellung erläutert, indem die obige eindimensionale Helmholtzgleichung mit der eindimensionalen Diffusionsgleichung (14.4) und deren Lösung (14.5) verglichen wird:

$$\frac{\partial^2 G_D}{\partial x^2} - \kappa^2 G_D = -\delta(x - x'), \quad G_D = \frac{1}{2\kappa} e^{-\kappa|x-x'|}; \quad (15.2)$$

$$\frac{\partial^2 G_{\pm}}{\partial x^2} + k^2 G_{\pm} = -\delta(x - x'), \quad G_{\pm} = \pm \frac{i}{2k} e^{\pm ik|x-x'|}; \quad (15.3)$$

$$-\kappa^2 = k^2 \Rightarrow \kappa = \pm ik. \quad (15.4)$$

Da nicht klar ist, welches Vorzeichen in der obigen Substitution zu wählen ist, behalten wir zunächst beide bei. Es ist sofort zu sehen, dass das Verhalten von $G_{\pm}(x, x')$ für $|x| \rightarrow \infty$ unbestimmt ist. Daher kann dieser Grenzübergang auch keinen Hinweis zur Wahl des Vorzeichens geben.

Eine weitere Schwierigkeit wird offenbar, wenn man in der Integraldarstellung (14.5) der Lösung der Diffusionsgleichung die obige Substitution $\kappa = \pm ik$ vornimmt:

$$\begin{array}{c} \bullet \quad i\kappa \\ | \\ \bullet \quad -i\kappa \end{array} \quad \longrightarrow \quad G_D(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(x-x')}}{(\omega + i\kappa)(\omega - i\kappa)} \quad (14.5)$$

$$\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \quad \longrightarrow \quad G_{\pm}(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(x-x')}}{(\omega - k)(\omega + k)} \quad (15.5)$$

Die Pole des Integranden in Gl. (15.5) liegen auf dem Integrationsweg; damit ist das Integral nicht definiert. Wir werden sehen, dass alle 3 Probleme:

- (a) die Randbedingung für $|x| \rightarrow \infty$,
- (b) das Vorzeichen der Exponentialfunktion,
- (c) und die Wahl des Integrationsweges

miteinander verknüpft sind.

Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßiger die Zeitabhängigkeit der Lösung $u(x, t)$ der Wellengleichung in Form einer imaginären e-Potenz anzunehmen. Wir wählen willkürlich das negative Vorzeichen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= 0, \\ u(x, t) &:= \varphi(x) e^{-i\omega t}, \\ \left[\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + k^2 \varphi(x) \right] e^{-i\omega t} &= 0, \quad k > 0. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Setzen wir die allgemeine Lösung obiger Differentialgleichung, d.h.

$$\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

in (15.6) ein, so bekommen wir eine rechts- und eine linkslaufende Welle:

$$u(x, t) = \varphi(x) e^{-i\omega t} = \underbrace{A e^{i(kx-\omega t)}}_{\rightarrow} + \underbrace{B e^{-i(kx+\omega t)}}_{\leftarrow} \quad (15.7)$$

Multiplizieren wir die in Gl. (15.3) gefundenen Greenschen Funktionen der Helmholtzgleichung mit $e^{-i\omega t}$

$$\begin{array}{c} \leftarrow \quad x' \quad \rightarrow \\ \hline \quad \quad \quad | \end{array} \quad G_+(x, x')e^{-i\omega t} = \frac{i}{2k} e^{i[k|x-x'|-\omega t]} \quad (15.8)$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \quad x' \quad \leftarrow \\ \hline \quad \quad \quad | \end{array} \quad G_-(x, x')e^{-i\omega t} = \frac{i}{2k} e^{-i[k|x-x'|+\omega t]} \quad (15.9)$$

dann gibt Gl. (15.8) von x' ins Unendliche auslaufende Wellen, und Gl. (15.9) aus beiden Richtungen vom Unendlichen zu x' einlaufenden Wellen. Die ebenen Wellen in Gl. (15.7) werden von einer Quelle in $x = -\infty$ bzw. $x = \infty$ ausgesendet. Gl. (15.9) entspricht einer Senke, die Wellen verschluckt, die in $|x| = \infty$ ausgesendet worden sind. Gl. (15.9) beschreibt eine physikalisch sehr unwahrscheinliche Situation und ist daher im allgemeinen auszuschließen. Sind Quellen nur im Endlichen vorhanden, dann sind also

$$G_+(x, x')e^{-i\omega t}$$

$$G_-(x, x')e^{i\omega t}$$

physikalisch vernünftig, die anderen beiden Kombinationen auszuschließen.

Wir suchen nun die linearen Randbedingungen, die der Greenschen Funktion an $|x| = \infty$ vorgeschrieben werden kann. Man sieht, dass links und rechts der Quelle die Greensche Funktion überall die folgende Bedingung erfüllen:

$$x > x' : \quad \frac{dG_{\pm}}{dx} = \pm i k G_{\pm};$$

$$x < x' : \quad \frac{dG_{\pm}}{dx} = -(\pm i k) G_{\pm}.$$

Diese kann man zusammenfassen zu:

$$\frac{dG_{\pm}}{|dx|} = \pm i k G_{\pm}; \quad \frac{dG_{\pm}}{|dx|} \mp i k G_{\pm} = 0, \quad \forall x \neq x'.$$

Diese Bedingungen sind auch noch als Grenzwert für $|x| \rightarrow \infty$ erfüllt. Dieser Sachverhalt wurde von A. Sommerfeld entdeckt. Wir können nun für die 1-dimensionale Helmholtzgleichung (15.3) folgende Randbedingungen angeben, die die **Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingungen** genannt werden (a).

$$e^{-i\omega t} : \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{dG}{|dx|} - i k G \right) = 0, \quad G(x, x') = \frac{i}{2k} e^{i k |x-x'|}; \quad (15.10)$$

$$e^{i\omega t} : \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{dG}{|dx|} + i k G \right) = 0, \quad G(x, x') = \frac{-i}{2k} e^{-i k |x-x'|}. \quad (15.11)$$

Sie sind verschieden, je nach dem Vorzeichen der Zeitabhängigkeit in der Exponentialfunktion. Beide Greenschen Funktionen beschreiben den gleichen physikalischen Sachverhalt: Von der bei $x = x'$ gelegenen Einheitsquelle laufen Wellen nach beiden Richtungen ins Unendliche.

Um das Problem des singulären Integranden der Integraldarstellung (15.5) der Greenschen Funktion der Helmholtzgleichung zu lösen, wird das **Prinzip der verschwindenden Verluste** herangezogen: Es wird zuerst angenommen, dass das Medium, in dem die Wellen laufen, dissipativ ist, also die Wellen allmählich vernichtet. Dann ist die Wellenzahl

$$k = k_1 + ik_2, \quad k_1 > 0$$

komplex. $k_1 = \frac{\omega}{c}$ wird positiv angenommen wie zuvor. Das Vorzeichen von k_2 muss also so gewählt werden, dass die Wellen bei ihrem Lauf von der Quelle weg gedämpft, nicht verstärkt werden ¹. Mit dieser komplexen Wellenzahl lauten die Greenschen Funktionen (15.8) und (15.9):

$$G_{\pm} = \pm \frac{i}{2k} e^{\pm i(k_1 + ik_2)|x-x'|} = \pm \frac{i}{2k} e^{(\pm ik_1 \mp k_2)|x-x'|}$$

und bei $\lim |x| \rightarrow \infty$ geht $G_{\pm} \rightarrow 0$.

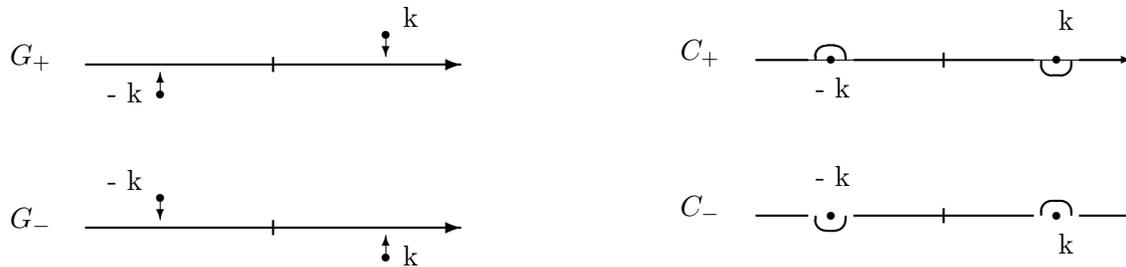
Die Bedingung, dass die Wellen auslaufen und dabei abklingen sollen, legt das Vorzeichen des Exponenten von G_{\pm} und des Imaginärteils k_2 fest (b):

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t} : & \quad G_+, \quad k_2 > 0, \quad k_1 > 0; \\ e^{i\omega t} : & \quad G_-, \quad k_2 < 0, \quad k_1 > 0. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Die Integraldarstellung (15.5) hat für G_+ und G_- das gleiche Aussehen:

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(x-x')}}{\omega^2 - k^2}.$$

Der Integrand ist längs des Integrationsweges (= reelle ω -Achse) regulär, die Pole liegen außerhalb der reellen ω -Achse. Die Lage der Pole ist für G_- an der reellen Achse von G_+ gespiegelt.



Wird der Dissipationsmechanismus allmählich abgeschaltet, so verringern sich die Verluste, k_2 geht nach Null; die Pole in der obigen Abbildung wandern gegen die reelle ω -Achse. Damit der Integrand auf dem Integrationsweg regulär bleibt, muss der Integrationsweg in der rechten Hälfte der Zeichnung angegebenen Weise ins Komplexe ausweichen. Auf diese Weise definiert man die Integrationswege C_+ , C_- , und damit sind die Integraldarstellungen der Greenschen Funktionen G_+ bzw. G_- :

$$G_{\pm} = \frac{1}{2\pi} \int_{C_{\pm}} d\omega \frac{e^{i\omega(x-x')}}{\omega^2 - k^2}. \quad (15.13)$$

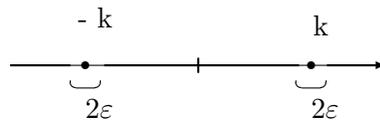
Die Ausrechnung dieser beiden Integrale mittels des Cauchyschen Residuensatzes und des Lemmas von Jordan (Kap.13) führt zu den Lösungen (15.10) bzw (15.11). **Das Prinzip der verschwindenden Verluste und die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung führen zu gleichen Resultaten.**

¹Letzterer Fall entspräche einem Lasermedium, in dem die Wellen durch stimulierte Emission (durch "Pumpen") aufgespeicherte Energie als Wellen freimachen. Wir betrachten aber ein rein dissipatives Medium, da ist so etwas ausgeschlossen.

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, mit den Polen erster Ordnung des Integranden, die auf dem Integrationsweg liegen, fertig zu werden. Dies ist der **Cauchysche Hauptwert**, s. §13.7. Im Falle der Gl. (15.5) ist dieser gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 G_0(x, x') &= \frac{1}{2}(G_+ + G_-) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{C_+} d\omega \frac{e^{i\omega(x-x')}}{\omega^2 - k^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{C_-} d\omega \frac{e^{i\omega(x-x')}}{\omega^2 - k^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-k-\epsilon} d\omega + \int_{-k+\epsilon}^{k-\epsilon} d\omega + \int_{k+\epsilon}^{\infty} d\omega \right] \frac{e^{i\omega(x-x')}}{\omega^2 - k^2} \\
 &= \frac{1}{2k} \sin [k|x - x'|] \tag{15.14}
 \end{aligned}$$

Die zweite Zeile entspricht folgendem Integrationsweg:



Das Verfahren kann folgendermaßen charakterisiert werden:

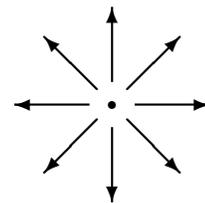
Links des Poles hat der Pol das entgegengesetzte Vorzeichen des rechten (s. Abb. oben rechts). Diese entgegengesetzten unendlichen Anteile heben sich gerade auf, da sie auf beiden Seiten gleich schnell gegen den Pol laufen. Die resultierende Lösung Gl. (15.14) liefert eine stehende Welle, die im Endlichen überall regulär ist und daher dort keine Quellen hat. Diese Welle wird von je einer in $x = \infty$ bzw. $x = -\infty$ befindlichen Quelle, die kohärent emittieren, erzeugt. Dies ist jedoch eine physikalisch unwahrscheinliche Situation, und daher ist die Lösung (15.14) auszuschließen. Dies wird durch die Ausstrahlungsbedingung (15.10), (15.11) bewirkt.

Auch beim 3-dimensionalen Problem nehmen wir wieder den Übergang $\kappa = \pm ik$ von der Lösung der Diffusionsgleichung (14.9) zu der Helmholtzgleichung vor.

$$G_D = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\kappa R}}{R}, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|, \quad G_{\pm}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{\pm ikR}}{R}$$

Die beiden Kombinationen

$$\begin{aligned}
 G_+ e^{-i\omega t} &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{+i(kR-i\omega t)}}{R} \\
 G_- e^{+i\omega t} &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-i(kR-i\omega t)}}{R}
 \end{aligned}$$

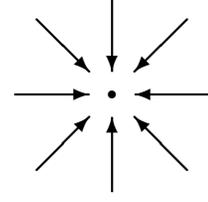


liefern auslaufende sphärische Wellen, die vom Punkt $\vec{r} = \vec{r}'$ ins Unendliche laufen; sind also physikalisch vernünftige Lösungen.

Die beiden anderen Kombinationen

$$G_- e^{-i\omega t} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-i(kR-i\omega t)}}{R}$$

$$G_+ e^{+i\omega t} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{+i(kR-i\omega t)}}{R}$$



liefern sphärische Wellen die aus dem Unendlichen kommend in den Punkt $\vec{r} = \vec{r}'$ hineinlaufen; sie beschreiben eine physikalisch äußerst unwahrscheinliche Situation und sind daher auszuschließen.

Bilden wir noch die Kombination

$$G_0 =: \frac{1}{2i} (G_+ - G_-) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sin(kR)}{R} \quad (15.15)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} G_0 = \frac{k}{4\pi} < \infty \quad ; \quad \lim_{R \rightarrow \infty} G_0 = 0$$

so ist dies eine überall reguläre sphärische Welle, die im Unendlichen Null ist. Sie würde von Quellen erzeugt, die im Unendlichen sphärisch gleichmäßig verteilt sind und kohärent emittieren; eine physikalisch äußerst unwahrscheinliche Situation und G_0 muß daher ausgeschlossen werden.

Für die ersten Ableitungen der Greenschen Funktionen findet man:

$$\frac{dG_{\pm}}{dR} = \pm i k G_{\pm} - \frac{1}{R} G_{\pm}$$

Wegen der Randbedingungen (15.15) ist eine Randbedingung wie $\lim_{R \rightarrow \infty} G_0 = 0$ unzureichend. Auch die obigen Bedingungen werden von G_0 für $R \rightarrow \infty$ befriedigt. Daher muss man für die Lösung der homogenen wie der inhomogenen Helmholtzgleichung

$$\Delta G + k^2 G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

als Randbedingung im Unendlichen (Ausstrahlungsbedingungen) die noch schärferen Forderungen stellen:

$$e^{-i\omega t} : \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{dG}{dR} - i k G \right) = 0, \quad G_+ = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{+i k R}}{R}$$

$$e^{+i\omega t} : \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{dG}{dR} + i k G \right) = 0, \quad G_- = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-i k R}}{R}$$

Analog findet man im 2-dimensionalen Fall für die Helmholtzgleichung

$$\Delta G + k^2 G = -\delta^2(x - x') \quad (15.16)$$

die Lösung:

$$e^{\mp i\omega t} : \quad G(\vec{\rho}, \vec{\rho}') = \pm \frac{i}{4} H_0^{(1,2)}(kP) \quad (15.17)$$

mit

$$P = |\vec{\rho} - \vec{\rho}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + \rho'^2}.$$

$H_0^{1,2}$ sind die Hankelfunktionen (Besselfunktion dritter Art), s. §13.10.

Deren asymptotisches Verhalten ist:

$$H_0^{(1,2)}(kP) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k P}} \cdot e^{\pm i[kP - \frac{\pi}{k}]}.$$

Dieser Ausdruck gestattet es, die zu Gl. (15.16) gehörige Ausstrahlungsbedingung zu verifizieren:

$$e^{\mp i\omega t} : \lim_{|P| \rightarrow \infty} \sqrt{P} \left(\frac{dG}{dP} \mp i k G \right) = 0. \quad (15.18)$$

Ebenso gehört zur n-dimensionalen Helmholtzgleichung

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} + k^2 G = -\delta^n(x - x'), \quad n \geq 2 \quad (15.1)$$

die Ausstrahlungsbedingung

$$e^{\mp i\omega t} : \lim_{R \rightarrow \infty} R^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{dG}{dR} \mp i k G \right) = 0 \quad (15.22)$$

und die Lösung

$$e^{\mp i\omega t} : \pm \frac{i}{4} \left(\frac{k}{2\pi R} \right)^{\frac{n}{2}-1} H_{\frac{n}{2}-1}^{(1,2)}(kR) \quad (15.23)$$

Die oben abgeleiteten Ausstrahlungsbedingungen gelten nicht nur für die Greenschen Funktionen sondern auch für jede Lösung der homogenen oder inhomogenen Helmholtzgleichung, solange die Quellen auf das Endliche beschränkt sind. Wählen wir wieder die Zeitabhängigkeit $e^{\pm i\omega t}$.

$$u(x, t) = \varphi(x) e^{\pm i\omega t}$$

Dann muss im 1-dimensionalen Fall:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k^2 \varphi = -g(x) \quad (15.24)$$

die Ausstrahlungsbedingung erfüllt sein:

$$e^{\pm i\omega t} : \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{d\varphi(x)}{d|x|} \pm i k \varphi \right) = 0, \quad (15.25)$$

Für alle höheren Dimensionen

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} + k^2 \varphi(x) = -g(x), \quad n \geq 2 \quad (15.26)$$

lautet die Ausstrahlungsbedingung:

$$e^{\pm i\omega t} : \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{d\varphi}{dr} \pm i k \varphi \right) = 0 \quad (15.27)$$

mit

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Nur dann ist gesichert, dass die Lösung eindeutig ist und damit die physikalische Situation richtig beschreibt.

Sind die Quellen nur im Endlichen, dann muss die gesamte Lösung des Problems die Ausstrahlungsbedingung erfüllen. Sind die Quellen im Unendlichen (ebene Welle) dann ist diese Bedingung nicht erfüllt.

Die Ausstrahlungsbedingungen gelten nicht nur im freien Raum, sondern auch in einem Raum, in dem streuende Objekte (metallische oder dielektrische Körper, Inhomogenitäten des Mediums) endlicher Ausdehnung vorhanden sind. Sind auch die Quellen im Endlichen, muss die Gesamtlösung die Ausstrahlungsbedingung erfüllen.

Besteht die Primärstrahlung aus ebenen Wellen, dann erfüllt nicht die Gesamtlösung, sondern nur die Sreuwelle die Ausstrahlungsbedingung.

Die Sommerfeldscheen Ausstrahlungsbedingungen sind auch wichtig für die Anwendung des Greenschen Satzes (4.2):

$$\iiint_V [u \Delta v - v \Delta u] dV = \iint dF \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right].$$

Erstreckt man das Integrationsvolumen über den ganzen Raum, dann enthält das Oberflächenintegral auf der rechten Seite auch einen Term:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{n-1} \iint d\Omega \left[u \frac{\partial v}{\partial R} - v \frac{\partial u}{\partial R} \right].$$

Falls u und v der Raumdimension n entsprechenden Ausstrahlungsbedingung genügen, dann ist der Grenzwert des obigen Oberflächenintegrals Null.

15.2 Integraldarstellungen der Greenschen Funktion des freien Raumes in Zylinderkoordinaten

15.2.1 Die Werteverteilung der Funktion $\sqrt{k^2 - z^2}$ für komplexes z und k

$$f(z) = f(x + iy) = \sqrt{k^2 - z^2} = \sqrt{(k_1 + ik_2)^2 - (x + iy)^2} = \text{Re}(f) + i \text{Im}(f). \quad (15.28)$$

Die weiteren Anwendungen werden zeigen, dass die Verzweigungsschnitte und sonstigen Vorgaben so gewählt werden müssen, dass der Imaginärteil der Wurzel auf und in der Umgeben der reellen Achse immer positiv ist (vergl. Abb.15.1).

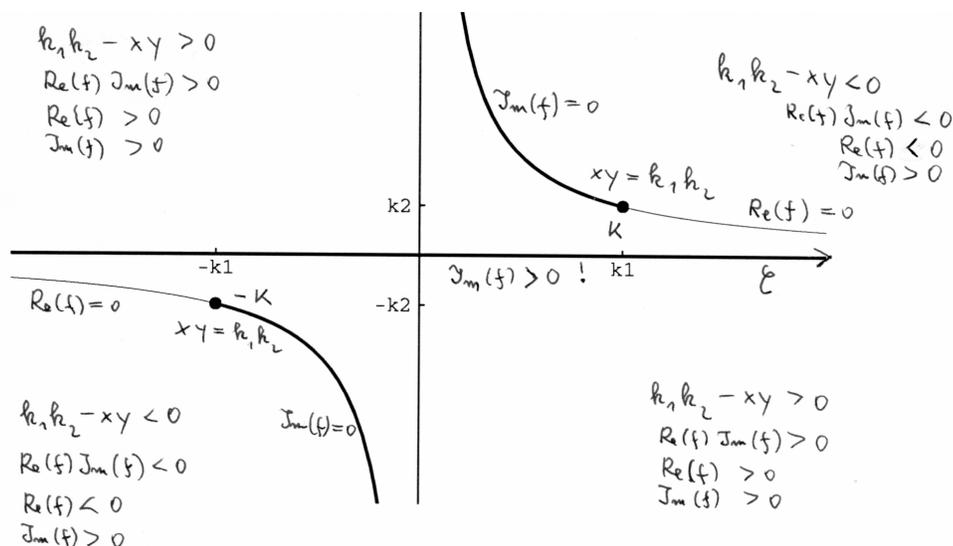


Abbildung 15.1: Die Werteverteilung der Wurzel $\sqrt{(k_1 + ik_2)^2 - (x + iy)^2}$ in der komplexen z -Ebene. Die stark ausgezogenen Teile der Hyperbeläste sind die Verzweigungsschnitte. Die Bestimmung der Werteverteilung wird im Text erläutert.

Für die weitere Diskussion ist es bequem, aber nicht unbedingt notwendig, $0 < k_2 \leq k_1$ anzunehmen. Quadrieren der obigen Gleichung und Vergleich von Real- und Imaginärteil gibt die beiden folgenden Gleichungen:

$$\text{Re}(f) \text{Im}(f) = k_1 k_2 - xy, \quad (a) \quad (\text{Re}(f))^2 - (\text{Im}(f))^2 = k_1^2 - k_2^2 - x^2 + y^2. \quad (b) \quad (15.29)$$

Aus $x = \pm k_1 \wedge y = \pm k_2$ folgt $\text{Re}(f) = \text{Im}(f) = 0$ und umgekehrt. Diese beiden Punkte sind also die Verzweigungspunkte. Die Hyperbeläste aus Gl.(a) verlaufen durch diese Punkte; auf ihnen ist $\text{Re}(f) = 0$ oder $\text{Im}(f) = 0$.

Denn aus $\text{Re}(f) = 0$ bzw. $\text{Im}(f) = 0$ folgt gemäß Gln.(a) und (b):

$$\begin{aligned} \underline{\text{Re}(f) = 0} : \quad & k_1 k_2 = xy, \quad -(\text{Im}(f))^2 = k_1^2 - k_2^2 - x^2 + y^2 \leq 0; \\ & 0 \leq k_1^2 - k_2^2 \leq x^2 - (k_1 k_2)^2 / x^2 \Rightarrow k_1^2 \leq x^2 \wedge y^2 \leq k_2^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Im}(f) = 0} : \quad & k_1 k_2 = xy, \quad (\text{Re}(f))^2 = k_1^2 - k_2^2 - x^2 + y^2 \geq 0; \\ & 0 \leq k_1^2 - k_2^2 \geq x^2 - (k_1 k_2)^2 / x^2 \Rightarrow k_1^2 \geq x^2 \wedge y^2 \geq k_2^2. \end{aligned}$$

$\text{Re}(f) = 0$ bzw. $\text{Im}(f) = 0$ ist immer auf den komplementären Hälften der Äste der Hyperbel $k_1 k_2 = xy$ erfüllt. Legt man die Verzweigungsschnitte längs $\text{Im}(f) = 0$, dann ist überall sonst

$\text{Im}(f) > 0$, sobald man den Funktionszweig durch $\text{Im}(f(0)) > 0$ ausgewählt hat. Vom der Stelle $z = 0$ geht man dann zu allen anderen Punkten der Ebene, ohne einen Verzweigungsschnitt zu überqueren. An jeder Stelle sind die Vorzeichen von Real- und Imaginärteil durch Gl.(15.29,a) miteinander verknüpft. Beim Überqueren einer (erlaubten) Kurve $\text{Re}(f) = 0$ bzw. $\text{Im}(f) = 0$ wechselt $\text{Re}(f)$ bzw. $\text{Im}(f)$ gemäß dem Spiegelungsprinzip, §13.9.2, sein Vorzeichen.

Für die nachfolgenden drei Teilparagrafen gibt es nur Kopien handschriftlicher Vorlagen.

15.2.2 Die Integraldarstellung mit radialen und azimuthalen Eigenfunktionen

s. AnMe15H1.pdf

15.2.3 Die Integraldarstellung mit longitudinalen und azimuthalen Eigenfunktionen

s. AnMe15H2.pdf

15.2.4 Die Umrechnung der beiden Integraldarstellungen

s. AnMe15H3.pdf und s. AnMe15H4.pdf

15.2.5 Die Formeln von Sommerfeld und Weyrich für die dreidimensionale Greensche Funktion des freien Raumes

Die Integraldarstellungen der Greenschen Funktion der Helmholtzgleichung im freien Raum werden nach ihren Entdeckern genannt.

Die Formel von Sommerfeld lautet:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{k^2-\lambda^2}} J_0(\lambda r) e^{i|z|\sqrt{k^2-\lambda^2}} \quad (15.30)$$

$$= \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{k^2-\lambda^2}} H_0^{(1)}(\lambda r) e^{i|z|\sqrt{k^2-\lambda^2}}. \quad (15.31)$$

Die Formel von Weyrich lautet:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\sqrt{r^2+z^2}}}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^\infty d\zeta e^{i\zeta z} H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2-\zeta^2}). \quad (15.32)$$

s. Ende von AnMe15H4.pdf

Ersetzt man im obigen Integral z durch $z - z'$ sowie r durch $R = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi') + r'^2}$ und verwendet das entsprechende Additionstheorem der Besselfunktionen, dann ergibt sich:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\sqrt{R^2+z^2}}}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{i}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{i\zeta(z-z')} J_m(r_{<}\sqrt{k^2-\zeta^2}) H_m^{(1)}(r_{>}\sqrt{k^2-\zeta^2}). \quad (15.33)$$

Diese Formel wurde auf anderem Wege auf S. 10, AnMe15H1.pdf, berechnet. Dort sind auch die Lage der Verzweigungsschnitte und die Verbiegung der Integrationswege ins Komplexe skizziert. Obige Funktion beschreibt eine sphärische Punktquelle am Punkt $(r = r', \phi = \phi', z = z')$.

15.2.6 Abschätzung der Integrale auf den Halbkreisen

s. AnMe15H5.pdf .

Selbst die Integrale längs der Kurventeile C_5 , auf denen $\lambda_2 < 0$ ist, gehen gegen Null, wenn der Radius R dieser Kreisbögen gegen Unendlich strebt.

15.3 Greensche Funktionen in kreiszylindrischen Rohren

Die Ausbreitung von Schallwellen in Rohren hat heute nur mehr geringe technische Bedeutung. Trotzdem werden hier die entsprechenden Lösungen behandelt und die zugehörigen Greenschen Funktionen berechnet. Alle diese Resultate können leicht auf den Fall der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in metallischen Rohren (Hohlleitern) übertragen werden (s. Kap. 22).

Genau genommen handelt es sich um ein zeitabhängiges Problem. Wir setzen überall eine Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ voraus. Diese wurde bereits absepariert. Es geht also darum, die Helmholtzgleichung mit der Wellenzahl

$$k = \omega/c \quad (15.34)$$

zu lösen.

15.3.1 Schallwellen in Rohren

Partikuläre Lösungen der Helmholtzgleichung

Die Helmholtzgleichung in Zylinderkoordinaten r, ϕ, z :

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \Psi = 0, \quad (15.35)$$

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad -\infty \leq z \leq \infty \quad (15.36)$$

wird durch den Ansatz

$$\Psi(r, \phi, z) = e^{im\phi} e^{ihz} R(r)$$

separiert. Die Gleichung für die Radialfunktion

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R + \gamma^2 R = 0$$

mit

$$\gamma^2 := k^2 - h^2, \quad h^2 = k^2 - \gamma^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \gamma^2 \quad (15.37)$$

hat die auf der Rohrachse $r = 0$ reguläre Lösung

$$R(r) = J_m(\gamma r). \quad (15.38)$$

Der Wert von γ wird durch die Randbedingung am Mantel $r = a$ bestimmt.

Wellen im Inneren von schallweichen Rohren

Ist die Innenseite des Rohres **schallweich**, dann muss gelten:

$$r = a: \quad \Psi = 0, \Rightarrow R(a) = J_m(\gamma a) = 0, \Rightarrow \gamma a = j_{m,n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die gesamte Lösung der Helmholtzgleichung lautet dann:

$$\Psi'_{m,n} = J_{|m|}(j_{|m|,n} r/a) e^{im\phi} e^{\pm i h'_{|m|,n} z} \quad (15.39)$$

mit

$$\gamma'_{|m|,n} = j_{|m|,n}/a, \quad h'_{|m|,n} = \sqrt{k^2 - (j_{|m|,n}/a)^2} = \sqrt{(\omega/c)^2 - (j_{|m|,n}/a)^2}. \quad (15.40)$$

Die Apostrophe kennzeichnen alle diesen Lösungstyp, der zu einer schallweichen Wand gehört. Ist bei gegebenen m und n , dementsprechend bei einem bestimmten Zahlenwert $j_{|m|,n}$ die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ groß genug, dann ist der Radikand von $h'_{|m|,n}$ positiv, die entsprechende e -Potenz in (15.39) ist imaginär, die Lösung beschreibt Wellen, die sich im Rohr ausbreiten können. Ist der Radikand Null oder negativ, dann ist die Exponentialfunktion reell. Die positive Exponentialfunktion gibt eine mit z divergierende, also unphysikalische Lösung; die negative eine gedämpfte Lösung, die Mode ist nicht ausbreitungsfähig. Die beiden Frequenzbereiche werden durch die Grenzfrequenz (Cut-off Frequenz) $\nu'_{g|m|,n}$ getrennt:

$$h'^2_{|m|,n} = 0 = \left(\frac{2\pi \nu'_{|m|,n}}{c} \right)^2 - \frac{j'^2_{|m|,n}}{a^2}; \quad \nu'_{g|m|,n} = \left(\frac{c}{2\pi a} \right)^2 j'^2_{|m|,n}. \quad (15.41)$$

Da die Werte der Nullstellen $j_{|m|,n}$ der Besselfunktionen mit steigenden m und steigenden n zunehmen, ist für jede Frequenz ν immer nur eine endliche Zahl von Moden mit den Kennzahlen $|m|$ und n ausbreitungsfähig. Der kleinste Wert aller Nullstellen ist $j_{0,1} = 2.40\dots$; die entsprechende Schallwelle ist achsialsymmetrisch. Für Schallwellen mit $\nu < \nu'_{0,1}$ ist das Rohr undurchlässig.

Wellen im Inneren von schallharten Rohren

Ist die Innenseite des Rohres **schallhart**, dann muss gelten:

$$r = a: \quad \partial\Psi/\partial r = 0, \Rightarrow dR(r)/dr|_{r=a} = J'_m(\gamma a) = 0, \Rightarrow \gamma a = j'_{m,n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

Die gesamte Lösung der Helmholtzgleichung lautet dann:

$$\Psi''_{m,n} = J_{|m|}(j'_{|m|,n} r/a) e^{im\phi} e^{\pm ih''_{|m|,n} z} \quad (15.42)$$

mit

$$\gamma'_{|m|,n} = j'_{|m|,n}/a. \quad h''_{|m|,n} = \sqrt{k^2 - (j'_{|m|,n}/a)^2} = \sqrt{(\omega/c)^2 - (j'_{|m|,n}/a)^2}. \quad (15.43)$$

J'_m stellt die Ableitung der Besselfunktion nach dem Argument dar. $j'_{|m|,n}$ ist die n -te Nullstelle dieser Ableitung. Doppelte Apostrophe kennzeichnen alle den Lösungstyp, der zu einer schallharten Wand gehört. Ist bei gegebenen m und n , dementsprechend bei einem bestimmten Zahlenwert $j'_{|m|,n}$ die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ groß genug, dann ist der Radikand von $h''_{|m|,n}$ positiv, die entsprechende e -Potenz in 15.42 ist imaginär, die Lösung beschreibt Wellen, die sich im Rohr ausbreiten können. Ist der Radikand Null oder negativ, dann ist die Exponentialfunktion reell. Die positive Exponentialfunktion gibt eine mit z divergierende, also unphysikalische Lösung; die negative eine gedämpfte Lösung, die Mode ist nicht ausbreitungsfähig. Die beiden Frequenzbereiche werden durch die Grenzfrequenz (Cut-off Frequenz) $\nu''_{g|m|,n}$ getrennt:

$$h''^2_{|m|,n} = 0 = \left(\frac{2\pi \nu''_{|m|,n}}{c} \right)^2 - \frac{j''^2_{|m|,n}}{a^2}; \quad \nu''_{g|m|,n} = \left(\frac{c}{2\pi a} \right)^2 j''^2_{|m|,n}. \quad (15.44)$$

Da die Werte der Nullstellen $j'_{|m|,n}$ der Besselfunktionsableitungen mit steigenden m und steigenden n zunehmen, ist für jede Frequenz ν immer nur eine endliche Zahl von Moden mit den Kennzahlen $|m|$ und n ausbreitungsfähig.

Der kleinste Wert aller Nullstellen ist $j'_{0,1} = 0$ (Manchmal wird dieser auch als $j'_{0,0} = 0$ bezeichnet). Aus $\gamma'_{0,1} = 0$ folgt $h''_{0,1} = k$. Die zugehörige Lösung

$$\Psi''_{0,1} = J_0(0) e^{\pm ih''_{0,1} z} = e^{\pm ikz} \quad (15.45)$$

gibt eine Welle, die sich bei jeder Frequenz mit der Schallgeschwindigkeit c ausbreitet; das Wellenfeld ist konstant über den ganzen Rohrquerschnitt $0 \leq r \leq a$. **Daher:** Ein Rohr mit harter Berandung kann als Sprachrohr verwendet werden.

Die niedrigste von Null verschiedene Nullstelle ist $j'_{1,1} = 1.84\dots$. Die entsprechende Schallwelle ist nicht achsialsymmetrisch.

Greensche Funktionen im Inneren von schallweichen und schallharten Rohren. Integraldarstellungen

Die Integraldarstellungen der Greenschen Funktionen G_1 und G_2 werden aus der Weyrichschen Integraldarstellung der Greenschen Funktion des freien Raumes, G_0 , Gl.(15.33), abgeleitet, indem gemäß §12.4 jeweils eine solche Lösung der homogenen Gleichung addiert wird, sodass die Summe die Randbedingung bei $r = a$ erfüllt. Auswertung dieser Integraldarstellungen mittels des Residuensatzes liefern Reihenentwicklungen nach den Moden, die im vorhergehenden Paragraphen aufgestellt worden sind.

Alle drei Greenschen Funktionen sind Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$\Delta G_i + k^2 G_i = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z'), \quad i = 0, 1, 2. \quad (15.46)$$

zu folgenden Randbedingungen:

$$r = 0: \quad G_i = \text{endlich}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (15.47)$$

$$r = \infty: \quad G_0 \quad \text{erfüllt die 2-dim. Ausstrahlungsbedingung.} \quad (15.48)$$

$$r = a: \quad G_1 = 0: \quad \text{schallweicher Rohrmantel.} \quad (15.49)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial r} = 0: \quad \text{schallharter Rohrmantel.} \quad (15.50)$$

$$z = \pm\infty: \quad G_i \quad \text{erfüllt die 1-dim. Ausstrahlungsbedingung.} \quad (15.51)$$

Die Integraldarstellung von G_0 wurde in (15.33) angegeben und davor abgeleitet:

$$G_i(r, \phi, z; r', \phi', z') = \frac{i}{8\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{i\zeta(z-z')} g_m^{(i)}(r, r'), \quad (15.52)$$

$$i = 0: \quad g_m^{(0)}(r, r') = J_m(\gamma r_{<}) H_m^{(1)}(\gamma r_{>}); \quad (15.53)$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \zeta^2}. \quad (15.54)$$

Zur Berechnung von G_1 bzw. G_2 wird $g_m^{(i)}(r, r')$ in folgender Weise gebildet:

$$G_0 \rightarrow G_i \Rightarrow g_m^{(0)}(r, r') \rightarrow g_m^{(i)}(r, r') = g_m^{(0)}(r, r') + c_m^{(i)} J_m(\gamma r), \quad i = 1, 2.$$

Die obigen Randbedingungen bei $r = r_{>} = a$ liefern Bedingungen für die Entwicklungskoeffizienten $c_m^{(i)}$:

$$G_1: \quad [J_m(\gamma r') H_m^{(1)}(\gamma a) + c_m^{(1)}(r, r') J_m(\gamma a)] \stackrel{!}{=} 0$$

$$G_2: \quad \gamma [J_m(\gamma r') H_m^{(1)}(\gamma a) + c_m^{(2)}(r, r') J_m'(\gamma a)] \stackrel{!}{=} 0$$

Die gesuchten Amplituden lauten also:

$$g_m^{(1)}(r, r') = J_m(\gamma r_{<}) H_m^{(1)}(\gamma r_{>}) - J_m(\gamma r) J_m(\gamma r') H_m^{(1)}(\gamma a) / J_m(\gamma a); \quad (15.55)$$

$$g_m^{(2)}(r, r') = J_m(\gamma r_{<}) H_m^{(1)}(\gamma r_{>}) - J_m(\gamma r) J_m(\gamma r') / H_m^{(1)}(\gamma a) / J_m'(\gamma a). \quad (15.56)$$

Die gesuchten Integraldarstellungen der Greenschen Funktionen G_1 bzw. G_2 sind also durch das Integral (15.52) mit den Amplituden $g_m^{(1)}(r, r')$, Gl.(15.55), bzw. $g_m^{(2)}(r, r')$, Gl.(15.56), gegeben. Dabei muss der Integrationsweg so in die komplexe ζ -Ebene deformiert werden, dass der die Pole auf der reellen Achse nicht mehr trifft. Eine sinnvolle Wahl ist die: Zwischen $-\infty$ und $-k$ weicht der Weg nach unten aus; er kreuzt die reelle ζ -Achse bei $\zeta = 0$ und verläuft dann in der oberen Hälfte der ζ -Ebene und kehrt oberhalb von $+k$ zur reellen Achse zurück. Die Pole der Integraldarstellung werden im nächsten Paragraphen angegeben.

Die Greensche Funktion im Inneren von schallweichen Rohren. Reihendarstellung

Die Reihenentwicklungen dieser Greenschen Funktionen kann man berechnen, indem man die Integrale mittels des Cauchyschen Residuensatzes auswertet. Während $g_m^{(0)}(r, r')$ auf Grund des Logarithmus, der in den Hankel- (Neumann-) funktionen steckt, mehrdeutig ist, sind $g_m^{(1)}(r, r')$ und $g_m^{(2)}(r, r')$ eindeutig, weil sich die Logarithmen in den beiden Hankelfunktionen herauskürzen. Der Integrationsweg wird mit einem Halbkreis, dessen Radius gegen Unendlich strebt, zu einer geschlossenen Kurve ergänzt. Je nach dem Vorzeichen von $(z - z')$ verläuft der Halbkreis in der oberen oder unteren Halbebene. Der erste Term von $g_m^{(1)}(r, r')$ bzw. $g_m^{(2)}(r, r')$ besitzt keine Pole. Dennoch ist er unabdingbar, er wirkt mit an der Eindeutigkeit des Integranden und am Verschwinden des Integrals über den unendlich großen Halbkreis.

Die Pole des Integranden sind von erster Ordnung; es sind die Nullstellen der Besselfunktion (bzw. Besselfunktionsableitung) im Nenner des zweiten Terms. Aus Gl.(15.54) ergeben sich die Werte von ζ :

$$G_1: J_m(\gamma a) = 0: \gamma'_{m,n} = \pm j_{m,n}/a, \quad \zeta = h'_{m,n} = \pm \sqrt{k^2 - j_{m,n}^2/a^2}; \quad (15.57)$$

Das Residuum an diesen Polen erster Ordnung berechnet man mittels Formeln (13.5) und (13.6):

$$\text{Res} \left(- e^{i\zeta(z-z')} \frac{J_m(\gamma r) J_m(\gamma r') H_m^{(1)}(\gamma a)}{J_m(\gamma a)}, \zeta = \pm h'_{m,n} \right) = \quad (15.58)$$

$$= - e^{\pm i h'_{m,n}(z-z')} J_m(j_{m,n}r/a) J_m(j_{m,n}r'/a) H_m^{(1)}(j_{m,n}) \lim_{\zeta \rightarrow \pm h_{m,n}} \frac{\zeta - h'_{m,n}}{J_m(\gamma a)} \quad (15.59)$$

Der Grenzwert des Quotienten wird nach der Regel von de l'Hospital ausgewertet:

$$\frac{d}{d\zeta} J_m(\gamma a) = a J'_m(\gamma a) \frac{d\gamma}{d\zeta} = a J'_m(\gamma a) \frac{-\zeta}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}} = -a J'_m(\gamma a) \frac{\zeta}{\gamma}. \quad (15.60)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm h_{m,n}} \frac{\zeta - h'_{m,n}}{J_m(\gamma a)} = \lim_{\zeta \rightarrow \pm h_{m,n}} \frac{1}{\frac{d}{d\zeta} J_m(\gamma a)} = \frac{1}{-a J'_m(j_{m,n}) \frac{a}{j_{m,n}} h'_{m,n}} \quad (15.61)$$

Die Hankelfunktion kann über die Wronskische Determinante, Gl.(13.63), eliminiert werden:

$$J'_m(j_{m,n}) H_n^{(1)}(j_{m,n}) - \underbrace{J_m(j_{m,n})}_{=0} H_m^{(1)'}(j_{m,n}) = \frac{2}{i\pi j_{m,n}}$$

Mit diesen Formeln ergibt sich letztendlich für das Residuum:

$$\text{Res} \left(- e^{i\zeta(z-z')} \frac{J_m(\gamma r) J_m(\gamma r') H_m^{(1)}(\gamma a)}{J_m(\gamma a)}, \zeta = \pm h'_{m,n} \right) = \quad (15.62)$$

$$= \frac{2}{i\pi a^2} J_m(j_{m,n}r/a) J_m(j_{m,n}r'/a) \frac{1}{h'_{m,n} J'^2(j_{m,n})} e^{\pm i h'_{m,n}|z-z'|}. \quad (15.63)$$

Damit erhält man folgende Reihendarstellung der Greenschen Funktion G_1 :

$$G_1(r, \phi, z; r', \phi', z') = \frac{i}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(j_{m,n}r/a) J_m(j_{m,n}r'/a)}{a^2 h'_{m,n} J_m'^2(j_{m,n})} e^{ih'_{m,n}|z-z'|} \quad (15.64)$$

$h'_{m,n} = \sqrt{k^2 - j_{m,n}^2/a^2}$. Für hinreichend grosse Werte von m und/oder n wird der Radikand negativ. In diesem Fall muss folgende Substitution in den betreffenden Gliedern der obigen Reihe vorgenommen werden:

$$k^2 - j_{m,n}^2/a^2 < 0: \quad ih'_{m,n} \rightarrow -\eta'_{m,n} = -\sqrt{j_{m,n}^2/a^2 - k^2}. \quad (15.65)$$

Dies zeigt dann auch: Solange $|z-z'| \neq 0$, ist die Konvergenz der Reihe gesichert. Für numerische Auswertung ist die Konvergenz gut, solange die Differenz $|z-z'|$ nicht zu klein ist.

Die Summe über m kann umgeformt werden. Dabei ergibt sich:

$$\dots \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \dots \rightarrow \dots \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{m,0}) \cos[m(\phi - \phi')] \dots$$

Die obige Reihendarstellung bekommt man auch durch die Methode der schrittweisen Reduktion: Man geht von der Vollständigkeitsrelation der Fourier-Besselfunktionen, Gl.(10.29b), aus. Man macht einen analogen Reihenansatz für die Greensche Funktion G_1 mit Entwicklungskoeffizienten $g_{m,n}^{(1)}$. Einsetzen der beiden Ansätze in die Differentialgleichung für die volle Greensche Funktion liefert Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten. Deren Lösungen ergeben sich aus (15.8) oder (14.5).

Die Greensche Funktion im Inneren von schallharten Röhren. Reihendarstellung

Die Pole des Integranden von G_2 sind die Nullstellen der Besselfunktionsableitung im Nenner des zweiten Terms. Aus Gl.(15.54) ergeben sich die Werte von ζ :

$$G_2: \quad J_m'(\gamma a) = 0: \quad \gamma''_{m,n} = \pm j'_{m,n}/a, \quad \zeta = h''_{m,n} = \pm \sqrt{k^2 - j_{m,n}^2/a^2}; \quad (15.66)$$

Das Residuum an diesen Polen erster Ordnung berechnet man mittels Formeln (13.5) und (13.6):

$$\text{Res} \left(- e^{i\zeta(z-z')} \frac{J_m(\gamma r) J_m(\gamma r') H_m^{(1)'}(\gamma a)}{J_m'(\gamma a)}, \zeta = \pm h''_{m,n} \right) = \quad (15.67)$$

$$= - e^{\pm ih''_{m,n}(z-z')} J_m(j'_{m,n}r/a) J_m(j'_{m,n}r'/a) H_m^{(1)}(j'_{m,n}) \lim_{\zeta \rightarrow \pm h''_{m,n}} \frac{\zeta - h''_{m,n}}{J_m'(\gamma a)} \quad (15.68)$$

Der Grenzwert des Quotienten wird nach der Regel von de l'Hospital ausgewertet:

$$\frac{d}{d\zeta} J_m'(\gamma a) = a J_m''(\gamma a) \frac{d\gamma}{d\zeta} = -a J_m''(\gamma a) \frac{\zeta}{\sqrt{k^2 - \zeta^2}}. \quad (15.69)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm h''_{m,n}} \frac{\zeta - h''_{m,n}}{J_m'(\gamma a)} = \lim_{\zeta \rightarrow \pm h''_{m,n}} \frac{1}{\frac{d}{d\zeta} J_m'(\gamma a)} = \frac{1}{-a J_m''(j'_{m,n}) \frac{a}{j'_{m,n}} h''_{m,n}} \quad (15.70)$$

Die Hankelfunktion kann über die Wronskische Determinante, Gl.(.), eliminiert werden. Die zweite Ableitung der Besselfunktion wird durch die Differentialgleichung ausgedrückt.

$$\underbrace{J'_m(j'_{m,n})}_{=0} H_m^{(1)}(j'_{m,n}) - J_m(j'_{m,n}) H_m^{(1)'}(j'_{m,n}) = \frac{2}{i\pi j'_{m,n}}$$

$$J''_m(j'_{m,n}) = -(1 - m^2/j'^2_{m,n}) J_m(j'_{m,n})$$

Mit diesen Formeln ergibt sich letztendlich für das Residuum:

$$\text{Res} \left(- e^{i\zeta(z-z')} \frac{J_m(\gamma r) J_m(\gamma r') H_m^{(1)}(\gamma a)}{J_m(\gamma a)}, \zeta = \pm h''_{m,n} \right) = \quad (15.71)$$

$$= \frac{2}{i\pi a^2} J_m(j'_{m,n} r/a) J_m(j'_{m,n} r'/a) \frac{j'^2_{m,n}}{h''_{m,n} (m^2 - j'^2_{m,n}) J^2(j'_{m,n})} e^{\pm i h''_{m,n} |z-z'|}. \quad (15.72)$$

Es ist zweckmäßig, den Beitrag der Nullstelle $\gamma a = j'_{0,1} = 0$, $\zeta = \pm k$ gesondert zu berechnen. Dazu werden die Reihenentwicklungen für $J'_0(\rho) = -J_1(\rho)$, Gl.(13.30), und für $Y'_1(\rho) = -Y_1(\rho)$, Gl.(13.31), herangezogen. Für kleine ρ ist $J_1(\rho) = \rho/2 + \dots$. Also haben $1/J_1(\rho)$ und $H_1^{(1)}(\rho) = J_1(\rho) + iY_1(\rho) = \dots - 2i/\pi\rho + \dots$ beide an dieser Stelle je einen Pol erster Ordnung, nämlich (mit $\rho = a\gamma$) $-4i/\pi a^2 \gamma^2 = (4i)/(\pi a^2) \frac{1}{\zeta^2 - k^2}$. Das ergibt ein Residuum:

$$\text{Res} \left(- e^{i\zeta(z-z')} \frac{J_m(\gamma r) J_m(\gamma r') H_m^{(1)}(\gamma a)}{J_m(\gamma a)}, \zeta = \pm k \right) = - \frac{2i}{\pi a^2 k} e^{\pm i k (z-z')}.$$

Mit all diese Residuen erhält man folgende Reihendarstellung der Greenschen Funktion G_2 :

$$G_2(r, \phi, z; r', \phi', z') = \frac{i}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(j'_{m,n} r/a) J_m(j'_{m,n} r'/a) j'^2_{m,n}}{a^2 h''_{m,n} (m^2 - j'^2_{m,n}) J^2(j'_{m,n})} e^{i h''_{m,n} |z-z'|}$$

$$+ \frac{i}{2\pi a^2 k} e^{ik|z-z'|}. \quad (15.73)$$

Der Apostroph beim zweiten Summenzeichen soll daran erinnern, dass die Nullstelle $\pm h''_{0,1} = \pm k$ schon explizit in dem Term in der zweiten Zeile berücksichtigt worden ist. Dieser gibt wieder die "Sprachrohrmode", die sich mit der Geschwindigkeit c und einem Profil, das über den Rohrquerschnitt konstant ist, ausbreitet. Für $m \neq 0$ gibt es keinen derartigen Term. Für hinreichend grosse Werte von m und/oder n wird der Radikand von $h''_{m,n}$ negativ. Dann muss man folgende Ersetzung vornehmen;

$$k^2 - j'^2_{m,n}/a^2 < 0: \quad i h''_{m,n} \rightarrow -\eta''_{m,n} = -\sqrt{j'^2_{m,n}/a^2 - k^2}. \quad (15.74)$$

Die Summe über m kann umgeformt werden. Dabei ergibt sich:

$$\dots \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \dots \rightarrow \dots \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{m,0}) \cos[m(\phi - \phi')] \dots$$

Wie bereits am Ende des vorhergehenden Paragraphen beschrieben, kann die obige Reihendarstellung der Greenschen Funktion G_2 auch mit der Methode der schrittweisen Reduktion berechnet werden. Dazu benötigt man zuerst die Vollständigkeitsrelation der Funktionen $J_m(j'_{m,n} r/a) e^{im\phi}$.

15.3.2 Potential einer Punktladung in einem metallischen Rohr

Das elektrostatische Potential einer Punktladung Q , die in einem geerdeten metallischen Rohr vom Radius a an der Stelle \vec{r}' sitzt, kann ebenfalls mittels einer Greenschen Funktion berechnet werden. Es gilt:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} G_1(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (15.75)$$

Die Greensche Funktion erfüllt die inhomogene Potentialgleichung und die Randbedingung:

$$\Delta G_1 = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'); \quad r = a: \quad G_1 = 0. \quad (15.76)$$

Für sie können sofort Darstellungen angegeben werden. Eine Integraldarstellung ist:

$$G_1(r, \phi, z; r', \phi', z') = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{m,0}) \cos[m(\phi - \phi')] \int_0^{\infty} d\zeta \cos[\zeta(z - z')] g_m^{(1)}(r, r'), \quad (15.77)$$

$$g_m^{(1)}(r, r') = I_m(\zeta\rho_{<}) K_m(\zeta\rho_{>}) - I_m(\zeta\rho) I_m(\zeta\rho') K_m(\zeta a) / I_m(\zeta a).$$

I_m und K_m sind die modifizierten Besselfunktionen. Diese Darstellung ergibt sich aus Gl. (15.52) mit der Amplituden $g_m^{(1)}(r, r')$, Gl.(15.55) durch den Grenzübergang $k \rightarrow 0$. γ wird dann $i\zeta$, und aus den Besselfunktionen werden die modifizierten, s. Gln.(25.52). Ausserdem wurde die Summation und die Integration zusammengefasst. Der gleiche Grenzübergang macht aus der Reihe (15.64) die folgende:

$$G_1(r, \phi, z; r', \phi', z') = \quad (15.78)$$

$$= \frac{1}{2\pi a} \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{m,0}) \cos[m(\phi - \phi')] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(j_{m,n}r/a) J_m(j_{m,n}r'/a)}{j_{m,n} J_m'^2(j_{m,n})} e^{-j_{m,n}|z-z'|/a}.$$

In der Ebene, die senkrecht zur Rohrachse durch den Quellpunkt geht, wo also $|z - z'| = 0$ ist, verliert die Exponentialfunktion ihre konvergenzerzeugende bzw. -beschleunigende Wirkung. Die Reihe ist dort nur mehr bedingt konvergent, in der Umgebung dieses Punktes schlecht konvergent. In diesem Fall arbeitet man besser mit der Integraldarstellung, die ungefähr den Gln. (15.46) - (15.49) für den Grenzübergang $k \rightarrow 0$ entspricht. Diese Darstellung der Greenschen Funktion und eine ausführliche Diskussion derselben findet man in [14.1]

Referenz

[14.1] B. Schnizer, Th. Heubrandtner, R. Veenhof, Electric Field Computation in the Vicinity of a Wire.