

Kapitel 17

Erfüllung von Randbedingungen durch Symmetrieoperationen

17.1 Spiegelung an Ebenen

17.1.1 Spiegelung an einer Ebene

Aus der Elektrostatik ist die Methode der Spiegelung wohlbekannt: Eine Punktquelle befindet sich vor einer Ebene, z.B. der Ebene $z = 0$. Längs der letzteren soll die Dirichletsche Randbedingung $\Phi \sim G_1(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ erfüllt sein. Dies erreicht man, indem man zur Greenschen Funktion des freien Raumes $G_0(\vec{r}, \vec{r}')$ einen Lösung der homogenen Gleichung hinzufügt, die einer am Spiegelpunkt \vec{r}'' angebrachten gleich starken Senke entspricht (s.Fig.17.1).

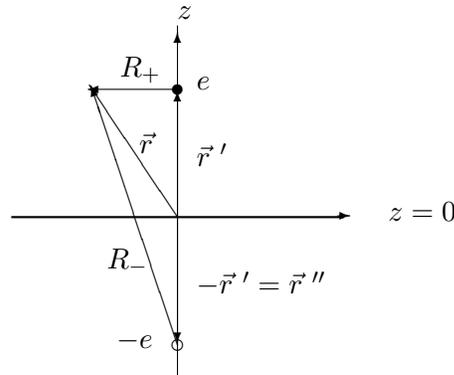


Abbildung 17.1: Spiegelung der in \vec{r}' befindlichen Quelle e an der Ebene $z = 0$ führt zur Senke $-e$ am Spiegelpunkt \vec{r}'' .

Die Greensche Funktion zur Randbedingung:

$$z = 0: \quad G_1 = 0 \quad (17.1)$$

ist dann gegeben durch:

$$G_1(\vec{r}, \vec{r}') := G_0(\vec{r}, \vec{r}') - G_0(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) \quad (17.2)$$

mit

$$\begin{aligned} R_+ &= |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \\ R_- &= |\vec{r} + \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}. \end{aligned}$$

An $z = 0$ ist $R_+ = R_-$, daher $G_1 = 0$.

Zur Randbedingung:

$$z = 0: \quad \frac{\partial G_2}{\partial n} = \frac{\partial G_2}{\partial z} = 0 \quad (17.3)$$

ist die Greensche Funktion G_2 gegeben durch:

$$G_2(\vec{r}, \vec{r}') := G_0(\vec{r}, \vec{r}') + G_0(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_-} \right). \quad (17.4)$$

Das gleiche gilt auch für Lösungen der Helmholtz- oder der Diffusionsgleichung. Die Greenschen Funktionen der Helmholtzgleichung im Halbraum $z \geq 0$:

$$\Delta G_i(\vec{r}, \vec{r}') + k^2 G_i(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad -\infty \leq x, y \leq \infty, \quad z \geq 0; \quad i = 1, 2 \quad (17.5)$$

zur Randbedingung:

$$z = 0: \quad G_1 = 0, \quad \frac{\partial G_2}{\partial z} = 0 \quad (17.6)$$

ist also:

$$G_{1,2}(\vec{r}, \vec{r}') := G_0(\vec{r}, \vec{r}') \mp G_0(\vec{r}, \vec{r}'') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ikR_+}}{R_+} \mp \frac{e^{ikR_-}}{R_-} \right). \quad (17.7)$$

17.1.2 Homogene Randbedingung längs zweier paralleler Ebenen

Die Greensche Funktion G_1 der dreidimensionalen Potentialgleichung in Zylinderkoordinaten ρ, ϕ, z :

$$\Delta G_1(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') = -\frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z') \quad (17.8)$$

soll längs der Ebenen $z = 0$ und $z = h$ die homogene Randbedingung:

$$z = 0, h: \quad G_1 = 0 \quad (17.9)$$

erfüllen.

Nachfolgend werden eine Reihendarstellung und eine Integraldarstellung dieser Greenschen Funktion abgeleitet; es werden die Auswirkungen der Singularität an der Stelle $\vec{r} = \vec{r}'$ auf die Konvergenz dieser Darstellungen untersucht. Abschließend wird die Konvergenz der Integraldarstellung durch Extraktion der Singularität beschleunigt.

Die Reihendarstellung der Greenschen Funktion der Potentialgleichung

Die Eigenfunktionen der schwingenden Saite liefern eine Vollständigkeitsrelation, deren Terme die obige Randbedingung erfüllen vgl. (s.Gl.(12.40)). Dieser entsprechend wird ein Reihenansatz für G_1 angesetzt:

$$\begin{aligned} \delta(z - z') &= \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi z/h) \sin(n\pi z'/h) \\ G_1(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') &= \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\rho, \phi; \rho', \phi') \sin(n\pi z/h) \sin(n\pi z'/h). \end{aligned}$$

Mittels dieser beiden Reihen erhält man aus obiger Differentialgleichung nachfolgende Differentialgleichung für die Funktion $g_n(\rho, \phi; \rho', \phi')$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} - \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \right] g_n = -\frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi').$$

Dies ist die Differentialgleichung der zweidimensionalen zeitfreien Diffusionsgleichung (14.15) mit $\kappa = n\pi/h$, deren Lösung $g_n(\rho, \phi; \rho', \phi') = K_0(n\pi P/h)/2\pi$ ist. Damit lautet die gesuchte Reihendarstellung der Gleichung (17.8) zur Randbedingung (17.9):

$$G_1(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') = \frac{1}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(n\pi P/h) \sin(n\pi z/h) \sin(n\pi z'/h), \quad (17.10)$$

mit

$$P = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} = \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + \rho'^2}.$$

Diese Funktion ist singularär längs der ganzen Strecke $P = 0$ ($\Leftrightarrow \rho = \rho' \wedge \phi = \phi'$), $0 \leq z \leq h$; also nicht nur an der Stelle der natürlichen Singularität "Aufpunkt = Quellepunkt." Für kleine P enthält die Reihe zahlreiche Terme mit großen Zahlenwerten, deren Vorzeichen durch die Sinusse bestimmt werden. Hier besteht die Gefahr von Stellenverlust und daraus folgender Ungenauigkeit. Ein Heilmittel gegen dieses Problem dieser Darstellung der Greenschen Funktion habe ich noch nicht finden können.

Für nicht zu kleine Werte von P ist die Konvergenz ausgezeichnet, weil sich die MacDonaldfunktion dann wie eine negative Exponentialfunktion verhält (s. Gl.(13.77)).

Die Integraldarstellung der Greenschen Funktion der Potentialgleichung

Bei der nachfolgend aufgestellten Darstellung der Greenschen Funktion gibt es eine Methode die Konvergenzprobleme zu beseitigen.

Die Vollständigkeitsrelationen der trigonometrischen bzw. der Besselfunktionen, Gln. (10.26) bzw. (10.37):

$$\frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda J_m(\lambda\rho) J_m(\lambda\rho')$$

führt zu folgendem Ansatz für die Greensche Funktion G_1 :

$$G_1(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda J_m(\lambda\rho) J_m(\lambda\rho') \bar{g}_m(z, z').$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke in Gl.(17.8) und benützt die Besselsche Differentigleichung, ergibt sich folgende Differentigleichung für den z -abhängigen Anteil:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \lambda^2 \right] \bar{g}_m(z, z') = -\delta(z - z')$$

mit der folgenden Randbedingung:

$$z = 0, h : \bar{g}_m(z, z') = 0.$$

Die Funktion $\bar{g}_m(z, z')$ wird nach der Methode der partikulären Integrale bestimmt, vgl. Gl.(12.15) und das Notebook K12AnpGF.nb. Damit ergibt sich als die gewünschte Integraldarstellung:

$$G_1(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \int_0^{\infty} d\lambda J_m(\lambda\rho) J_m(\lambda\rho') \sinh(\lambda z_{<}) \sinh[\lambda(h - z_{>})] \frac{1}{\sinh(\lambda h)}. \quad (17.11)$$

Für $\rho' = 0$ bleibt nur der Term mit $m = 0$ übrig. Ersetzt man dann ρ' durch $P = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} = \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + \rho'^2}$ ergibt sich eine zur vorigen Formel gleichwertige Darstellung

$$G_1(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\lambda J_0(\lambda P) g_0(z, z'), \quad (17.12)$$

$$g_0(z, z') = \sinh(\lambda z_<) \sinh[\lambda(h - z_>)] \frac{1}{\sinh(\lambda h)}. \quad (17.13)$$

Für die Konvergenz der obigen Darstellungen sind die Integrale über λ und in diesen wieder die hyperbolischen Funktionen zuständig. g_0 wird umgeformt, indem die hyperbolischen durch Exponentialfunktionen ersetzt werden; anschließend werden Zähler und Nenner mit dem Faktor $e^{-\lambda h}$ durchmultipliziert:

$$g_0(z, z') = \frac{1}{2} \frac{e^{-\lambda(z_>-z_<)} - e^{-\lambda(z_>+z_<)} - e^{-\lambda(2h-z_>-z_<)} + e^{-\lambda(2h-z_>+z_<)}}{1 - e^{-2\lambda h}} \quad (17.14)$$

Man sieht sofort, dass die erste Exponentialfunktion des Zählers für $z_> = z_<$ den Wert 1 annimmt; dann konvergiert g_0 für grosse λ gegen $1/2$ und trägt nichts mehr zur Konvergenz des Integrals bei. Die Besselfunktion $J_0(\lambda P)$ bringt einen Faktor $1/\sqrt{\lambda}$ und einige Oszillationen. Die Konvergenz des Integrals ist nicht vorhanden oder sehr schlecht, wenn $|z_> - z_<| = 0$ oder sehr klein ist. Das Verhalten von $g_0(z, z')$ wird im Notebook AM17-1-2.nb auch graphisch gezeigt. Die Singularität "Aufpunkt = Quellpunkt" wirkt sich also in der ganzen Ebene $z = z'$ und deren Umgebung aus.

Analoge Schwierigkeiten resultieren aus der zweiten Exponentialfunktion für $z_> = z_< = 0$, bzw. aus dem dritten für $z_> = z_< = h$. Die vierte Exponentialfunktion konvergiert immer für $0 \leq z, z' \leq h$.

Verbesserung der Konvergenz der Integraldarstellung

Die Konvergenz des Integranden von Gl.(17.13) wird verbessert, indem von g_0 drei Exponentialfunktionen abgezogen werden, die dem asymptotischen Verhalten (für grosse λ) der drei gefährlichen Exponentialfunktionen entsprechen. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} g_c(z, z') &= g_0 - \frac{1}{2} \left[e^{-\lambda(z_>-z_<)} - e^{-\lambda(z_>+z_<)} - e^{-\lambda(2h-z_>-z_<)} \right] \\ &= \frac{e^{-\lambda(2h-z_>+z_<)} + e^{-\lambda(2h+z_>-z_<)} - e^{-\lambda(2h+z_>+z_<)} - e^{-\lambda(4h-z_>-z_<)}}{2(1 - e^{-2\lambda})}. \end{aligned} \quad (17.15)$$

Damit ergibt sich für G_1 folgende neue Integraldarstellung:

$$\begin{aligned} G_1(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\lambda J_0(\lambda P) g_a(z, z'), \\ g_a(z, z') &= g_c(z, z') + \frac{1}{2} \left[e^{-\lambda(z_>-z_<)} - e^{-\lambda(z_>+z_<)} - e^{-\lambda(2h-z_>-z_<)} \right]. \end{aligned}$$

Die drei Integrale, die aus der rechteckigen Klammer resultieren, entsprechen dem Sommerfeldintegral (s. S.16.13 unten) mit $k = 0$; s. auch Ende des Notebooks AM17-1-2.nb

$$\begin{aligned} G_1(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\lambda J_0(\lambda P) g_c(z, z') + \\ &+ \frac{1}{4\pi\sqrt{(\kappa P)^2 + (z_>-z_<)^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(\kappa P)^2 + (z_>+z_<)^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(\kappa P)^2 + (2h-z_>-z_<)^2}}. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Das Integral mit g_c konvergiert rasch und verlässlich für alle $z, z' \in [0, h]$, s. Notebook AM17-1-2.nb .

Die drei Terme in der zweiten Zeile geben jeder das Potential einer Quelle bzw. Senke im freien Raum. Sie entsprechen der ursprünglichen Quelle und je einer Senke, die aus der Quelle durch Spiegelung an einer Platte hervorgehen. Wie im nächsten Paragraph angedeutet wird, kann man die Greensche Funktion für eine Quelle zwischen den beiden Platten durch eine unendliche Kette von Quellen und Senken ausdrücken. Die Integraldarstellung stellt deren Summe dar. Durch das obige Subtraktionsverfahren wurden die Beiträge der Quelle, die im Definitionsbereich liegt, und die der Bilder, die die Ränder des Definitionsbereichs berühren könnten explizit berücksichtigt. Die anderen Bilder sind im verbleibenden Integral enthalten; diese können aber nicht an den Definitionsbereich herankommen und daher kein mathematisches Unheil anrichten.

Notebook: Konvergenz der GF zwischen zwei parallelen leitenden Platten

s. AnMe17-1-2-4.pdf

Erstellung einer Reihendarstellung durch Spiegelung

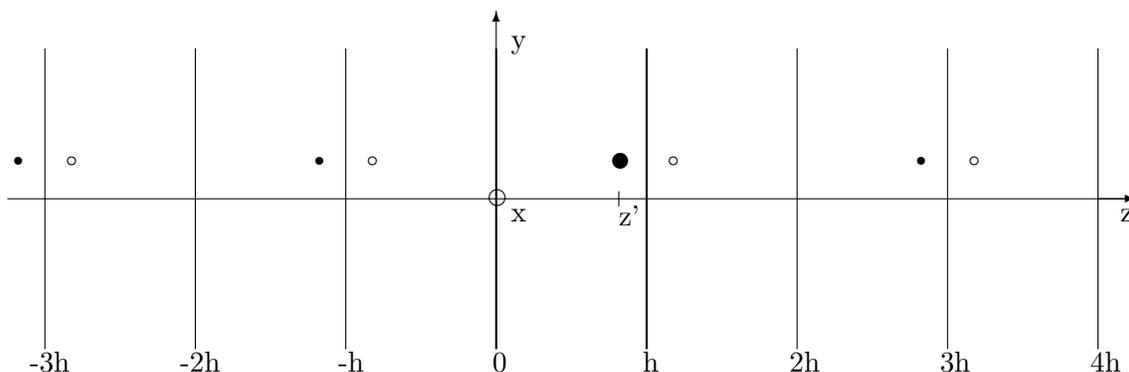


Abbildung 17.2: Die Einheitsquelle befindet sich zwischen den beiden Platten, die bei $z = 0, h$ angebracht sind. Die Dirichletsche Randbedingung auf diesen wird durch ein unendliches Spiegelungsverfahren erfüllt. Zuerst spiegelt man die Quelle an jeder der beiden Platten, diese Spiegelbilder dann wieder an jeder der beiden Platten und sofort. Das Potential der Quelle zwischen den beiden Platten mit Dirichletscher Randbedingung ist dann im Bereich $[0, h]$ äquivalent dem Potential des vollen Systems reale Quelle und alle Bilder ohne Platten.

Man kann die Greensche Funktion für eine Quelle zwischen den beiden Platten konstruieren, indem man die Quelle an jeder der beiden Platten spiegelt, und dann diese Spiegelung für die Quellen bzw. Senken und die Platten in beiden Richtungen unendlich oft fortsetzt. Dies wird in der Bildunterschrift zu Abb.17.2 erläutert. Die daraus resultierende Reihe ist eine unendliche Summe von Termen des gleichen Typs wie in der letzten Zeile von Gl.(17.16); sie ist nur bedingt konvergent; daher ungeeignet für numerische Berechnungen; und ihre Summation erfordert besondere Sorgfalt, s. [17.1].

[17.1] W.A. Newcomb: Trouble with the method of images. Am.J.Phys. 50 (#7, July 1982) 601 - 607.

17.2 Inversion: Spiegelung an der Kugel

Lösungen der Potentialgleichung, die homogene Randbedingungen auf einem Kreis (im zweidimensionalen Fall) oder auf einer Kugel (im drei- oder mehrdimensionalen Fall) erfüllen, können ebenfalls durch Spiegelung an dieser Randkurve oder -fläche aufgestellt werden. Der wesentliche Unterschied gegenüber dem ebenen Fall ist aber, dass die Größe der Bildladung auch vom Radius der Kugel abhängt.

Durch die Spiegelung an der n -dimensionalen Kugel (= Kreis für $n = 2$) vom Radius a :

$$r \rightarrow \frac{a^2}{r} \quad (17.17)$$

entsteht aus einer Lösung der Potentialgleichung

$$\Delta\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = 0, \quad (17.18)$$

also aus einer **harmonischen Funktion**, wieder eine harmonische Funktion.

Dieses Resultat dient zur Berechnung der Lösung von Problemen, bei denen Quellen innerhalb oder ausserhalb eines Kreises oder einer Kugel liegen und homogene Randbedingungen auf diesen Rändern vorgeschrieben sind. Genauer gesagt: In einem R^n befindet sich eine S^n ; die Quelle befindet sich innerhalb oder ausserhalb der letzteren. Eine wichtige Anwendung betreffen Punkt- bzw. Linienladungen innerhalb oder ausserhalb metallischer Kugeln bzw. Rohren.

Satz:

$n = 2$: Ist $u(x, y)$ harmonisch, dann ist auch

$$v(x, y) = C u\left(a^2 \frac{x}{r^2}, a^2 \frac{y}{r^2}\right) \quad \text{mit} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad C = \text{const.}$$

harmonisch.

$n = 3$: Ist $u(x, y, z)$ harmonisch, dann ist auch

$$v(x, y, z) = \frac{C}{r} u\left(a^2 \frac{x}{r^2}, a^2 \frac{y}{r^2}, a^2 \frac{z}{r^2}\right) \quad \text{mit} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{und} \quad C = \text{const.}$$

harmonisch.

$n = n$: Ist $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ harmonisch, dann ist auch

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{C}{r^{n-2}} u\left(a^2 \frac{x_1}{r^2}, a^2 \frac{x_2}{r^2}, \dots, a^2 \frac{x_n}{r^2}\right) \\ \text{mit} \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{und} \quad C = \text{const.}$$

harmonisch.

Beweis:

Der obige Satz wird für $n = 2$ und 3 bewiesen. Dazu definieren wir:

$$\rho = \frac{a^2}{r} \quad (17.19)$$

und berechnen nach der Kettenregel der Differentiation:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \rho} = -\frac{a^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \rho} = -\frac{\rho^2}{a^2} \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (17.20)$$

Für $n = 2$ werden die Koordinaten im Laplaceoperator und in der Lösung unter Benutzung von (17.20) auf Polarkoordinaten umgerechnet (wir benutzen dabei für die verschiedenen Funktionsoperatoren den gleichen Buchstaben u):

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi : \quad u(x, y) \rightarrow u(r, \varphi), \quad v := u(a^2/r, \varphi) = u(\rho, \varphi).$$

$$r^4 \Delta u = r^4 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u = r^4 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right];$$

$$r^4 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{a^8}{\rho^4} \frac{\rho}{a^2} \left(-\frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{a^2}{\rho} \left(-\frac{\rho^2}{a^2} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right] = \frac{a^4}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right),$$

$$r^4 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \frac{a^8}{\rho^4} \frac{\rho^2}{a^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{a^4}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2};$$

$$r^4 \Delta_{r, \varphi} v = a^4 \Delta_{\rho, \varphi} u.$$

Für $n = 3$ werden die Koordinaten im Laplaceoperator und in der Lösung auf Kugelkoordinaten umgerechnet (wir benutzen dabei für die verschiedenen Funktionsoperatoren den gleichen Buchstaben u):

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta : \\ u(x, y, z) \rightarrow u(r, \vartheta, \varphi), \quad v := \frac{a}{r} u\left(\frac{a^2}{r}, \vartheta, \varphi\right) = \frac{\rho}{a} u(\rho, \vartheta, \varphi).$$

Unter Benutzung von (17.20) und von

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\rho^2}{a^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{a} u \right).$$

wird ausgerechnet:

$$r^5 \Delta u = r^5 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_{\vartheta, \varphi}^2 \right] u = r^5 \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \nabla_{\vartheta, \varphi}^2 u \right];$$

$$r^5 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{a^{10}}{\rho^5} \frac{\rho^2}{a^4} \left(-\frac{\rho^2}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{a^4}{\rho^2} \left(-\frac{\rho^2}{a^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{a} u \right) \right) \right] = \frac{a^5}{\rho} \frac{\partial^2 (\rho u)}{\partial \rho^2} = \frac{a^5}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right),$$

$$r^5 \frac{1}{r^2} \nabla_{\vartheta, \varphi}^2 u = \frac{a^{10}}{\rho^5} \frac{\rho^2}{a^4} \nabla_{\vartheta, \varphi}^2 u = \frac{a^5}{\rho^2} \nabla_{\vartheta, \varphi}^2 u;$$

$$r^5 \Delta_{r, \vartheta, \varphi} v = a^5 \Delta_{\rho, \vartheta, \varphi} u.$$

Bei n Dimensionen werden n -dimensionale Kugelkoordinaten eingeführt. Die Umrechnungen erfolgen analog.

17.2.1 Eine Punktquelle vor einer Kugel

Eine Punktquelle sitzt vor einer Kugel. Das Potential damit die Greensche Funktion G_1 soll auf der Kugel Null sein. Ein Beispiel wäre eine Ladung vor einer geerdeten Metallkugel.

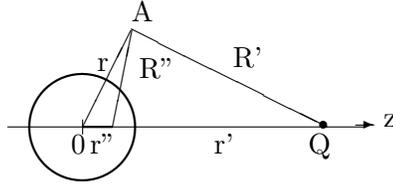


Abbildung 17.3: Die Quelle der Stärke $e = 1$ hat den Abstand r' vom Mittelpunkt 0 der Kugel; auf deren Oberfläche ist die Dirichletsche Randbedingung $G_1 = 0$ vorgeschrieben. Diese wird befriedigt durch Hinzufügen einer Bildladung geeigneter Größe e'' , die vom Kugelmittelpunkt 0 den Abstand $r'' = a^2/r'$ hat.

Gemäß dem obigen Satz kann das Problem durch Hinzufügen des Potentials v einer Senke (Spiegelladung) geeigneter Größe e'' zum Potential u der ursprünglichen Quelle der Stärke $e = 1$ gelöst werden; dabei muss diese Senke im Spiegelpunkt $r'' = a^2/r'$ angebracht werden. R' bzw. R'' sind die Abstände der beiden Quellpunkte vom Aufpunkt A:

$$R'(r) = \sqrt{r^2 - 2 r r' c + r'^2}, \quad R''(r) = \sqrt{r^2 - 2 r r'' c + r''^2}; \quad c = \cos \Theta, \quad \Theta = \sphericalangle AOQ. \quad (17.21)$$

Das Potential der Quelle ist:

$$G_0 = \frac{1}{4\pi R'(r)} = u(r, \Theta) \quad (17.22)$$

Gemäß dem obigen Satz ($n = 3$) ist die zweite Lösung:

$$v(r, \Theta) = \frac{a}{r} u(a^2/r, \Theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{a}{r} \frac{1}{R'(a^2/r)} = \frac{1}{4\pi} \frac{a}{r} \frac{1}{\sqrt{a^4/r^2 - 2cr' a^2/r + r'^2}}, \quad (17.23)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2cr' r + r^2 r'^2/a^2}} = \frac{1}{4\pi} \frac{r''}{a} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2cr'' r + r''^2}} \quad (17.24)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{r''}{a} \frac{1}{R''(r)}. \quad (17.25)$$

Deren Singularität ist in r'' , also innerhalb der Kugel, daher ausserhalb des Definitionsgebiets $r \geq a$ von G_1 . $v(r, \Theta)$ ist also eine Lösung der homogenen Gleichung. G_1 besteht aus:

$$G_1(r, r', \Theta) := u(r, \Theta) + C v(r, \Theta).$$

Die Wert der Konstanten $C = -1$ ergibt sich aus der Randbedingung an der Kugeloberfläche:

$$r = a: \quad 0 = 4\pi G_1(a, r', \Theta) \sim u(a, \Theta) + C v(a, \Theta) \sim (1 + C)/\sqrt{a^2 - 2ca r' + r'^2}.$$

Die Greensche Funktion

Die endgültige Gestalt der Greenschen Funktion G_1 ist also:

$$\begin{aligned} G_1(r, r', \Theta) &= \frac{1}{4\pi R'} - \frac{1}{4\pi} \frac{r''}{a} \frac{1}{R''} = \\ &= \frac{1}{4\pi \sqrt{r^2 - 2 r r' c + r'^2}} - \frac{1}{4\pi \sqrt{a^2 - 2 r r' c + r'^2/a^2}}. \end{aligned} \quad (17.26)$$

$c = \cos \Theta$. Aus der ersten Zeile der obigen Formel ersieht man, dass die Spiegelladung zur Quellstärke $e = 1$ des ersten Terms den Wert $e'' = -e r''/a$ haben muss.

Befinden sich die Quelle an der Stelle r', θ', ϕ' und der Aufpunkt an der Stelle r, θ, ϕ , dann ist $c = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$ zu setzen. Dies beweist man, indem man die Quelle in den Punkt $(0, 0, r')$ dreht und die Invarianz des inneren Produktes der Vektoren $\vec{r} = r (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ und $\vec{r}' = r' (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta')$ benutzt:

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = r r' c = r r' \cos \Theta = r r' (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')) = \text{inv.}$$

Elektrische Feldstärke und Ladungsdichte auf der Kugeloberfläche

Aus dem Potential $\Phi(r, \Theta) = e G_1/\varepsilon_0$ ergeben sich die radiale Feldstärke E_r und die normierte Oberflächenladungsdichte gemäß :

$$E_r = - \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{e}{\varepsilon_0} \frac{\partial G_1}{\partial r}, \quad (17.27)$$

$$\eta(\Theta, r') = - \frac{a^2 \varepsilon_0 E_r}{e} = a^2 \frac{\partial G_1}{\partial r} = - \frac{a(r'^2 - a^2)}{4\pi(r'^2 - 2car' + a^2)^{3/2}}. \quad (17.28)$$

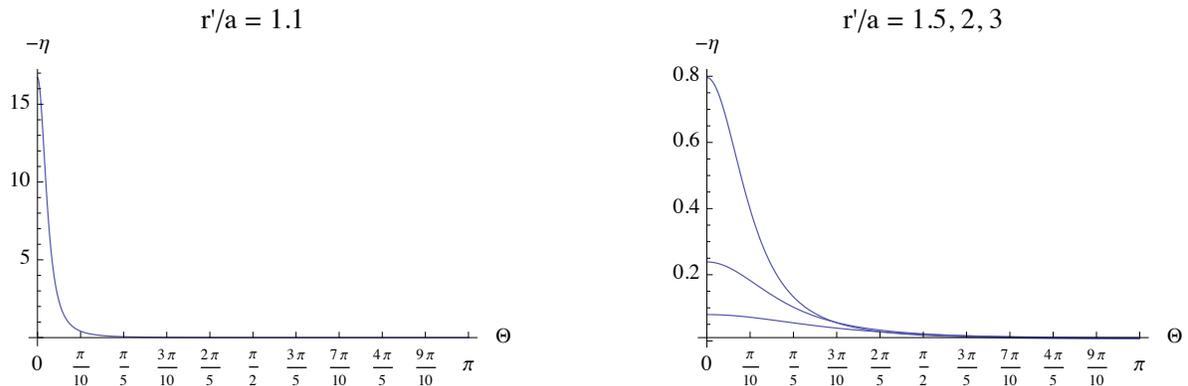


Abbildung 17.4: Die normierte Oberflächenladungsdichte $\eta(\Theta, r')$ für verschiedene Werte des Radius r' der Ladung Q in Abhängigkeit vom Polarwinkel Θ .

Die Kraft auf die Ladung

Die Ladung e beeinflusst auf der Kugel die Ladungsdichte η . Diese zieht die Ladung an. Die Kraft, die e erfährt berechnet man einfach nach dem Coulombschen Gesetz aus der Wechselwirkung von e mit der Bildladung $e'' = -e r''/a$; der Abstand der beiden beträgt $r' - r''$:

$$F = - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \frac{e^2 r''}{r' - r''}. \quad (17.29)$$

Berechnet man die Kraft auf die Primärladung, indem man die Wechselwirkung zwischen e und der Ladungsdichte η aufintegriert, ergibt sich ein doppelt so großes Resultat wie in (17.29); dieses ist unrichtig.

17.2.2 Notebook: Point charge in front of a grounded conducting sphere

s. AnMe17-2-2.pdf

17.2.3 Anwendung der Inversion auf die Helmholtzgleichung

Wendet man die Spiegelung an der Kugel vom Radius $r = a$ auf die Helmholtzgleichung an, dann entsteht eine neue Differentialgleichung, z.B. im dreidimensionalen Fall:

$$(\Delta + k^2) \Phi = 0 \quad r \xrightarrow{a^2/r} \left(\Delta + \frac{a^5}{r^5} k^2 \right) \Phi \quad (17.30)$$

Deswegen ist diese Spiegelung fast nur bei der Laplacegleichung mit Nutzen verwendbar.

17.3 Exercises

1. Eine Punktladung Q befindet sich im Abstand a vor einer unendlich gut leitenden Ebene. Berechnen Sie mittels der Methode der Spiegelladung das Potential (s. Gl.(17.2)) und das elektrische Feld. Berechnen Sie die Ladungsverteilung η die durch Influenz auf der Ebene erzeugt wird. Berechnen Sie die Kraft die diese Ladungsverteilung auf Q ausübt. Vergleichen Sie diese mit der Kraft die die Spiegelladung auf Q ausübt. Vgl. §17.1.1.3 !