Kapitel 18

Lösung inhomogener Randbedingungen mittels Greenscher Funktion

18.1 Allgemeine Beschreibung

$$\Delta\varphi \;+\; k^2\varphi \;=\; -\, g(\vec{r}), \tag{18.1}$$
$$\Delta G \;+\; k^2 G \;=\; -\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,'). \tag{18.2}$$

$g(\vec{r})$ ist eine gegebene Funktion.

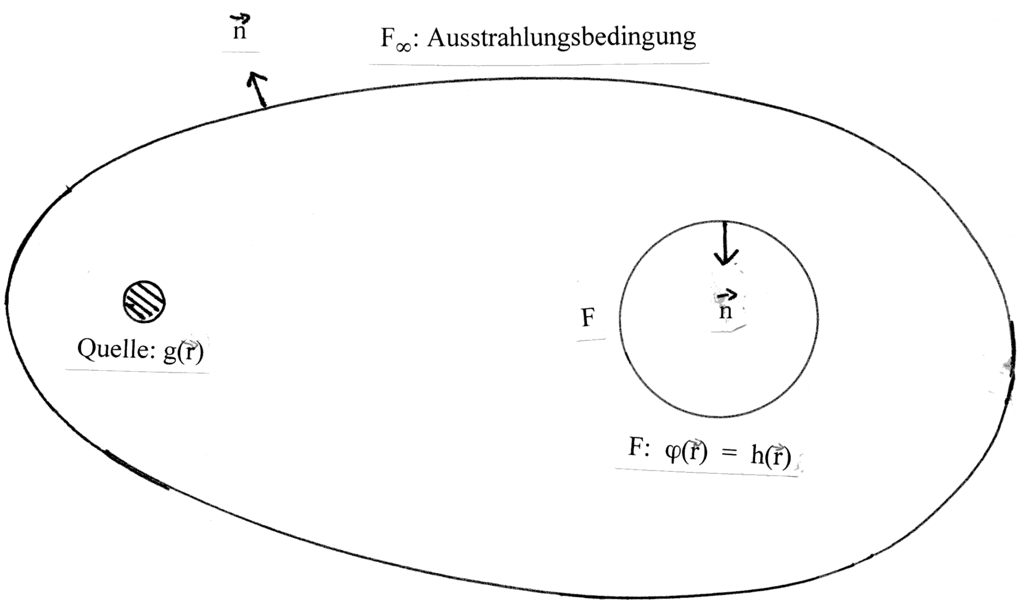

Abbildung 18.1: Das Definitionsgebiet ist das Volumen innerhalb F_∞ und ausserhalb F. Das Feld wird von 2 Inhomogenitäten erzeugt: 1. von der Quellverteilung $g(\vec{r})$; 2. von der inhomogene Randbedingung $\varphi(\vec{r}_s) = h(\vec{r}_s)$, die längs der Fläche F vorgeschrieben ist.

Inhomogene Randbedingung längs einer Fläche F:

$$\vec{r}_s \;\in\; F : \varphi(\vec{r}_s) = h(\vec{r}_s). \tag{18.3}$$

$h(\vec{r}_s)$ ist längs der Fläche F eine gegebene Funktion.

Obige Angaben werden in den zweiten Greenschen Satz

$$\int\!\!\int\!\!\int \left[\varphi \Delta' G \; - \; G \Delta' \varphi\right] \, dV' = \int\!\!\int dF' \left(\varphi \, \frac{\partial G}{\partial n'} \; - \; G \, \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right) \tag{18.4}$$

eingesetzt:

$$\int\!\!\int\!\!\int \left[\varphi\big(- k^2 G - \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\big) \; - \; G\big(- k^2 \varphi - \; g(\vec{r}\,')\big)\right] \, dV' =$$

$$= \underbrace{\int\!\!\int_{F_\infty} dF' \left(\varphi \, \frac{\partial G}{\partial n'} \; - \; G \, \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right)}_{\substack{\longrightarrow \; 0 \\ \text{für } R \; \rightarrow \; \infty}} \; + \; \int\!\!\int_{F} dF' \left(\varphi \, \frac{\partial G}{\partial n'} \; - \; G \, \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right).$$

Dies gibt weiter:

$$\phi(\vec{r}) \; = \; \underbrace{\int\!\!\int\!\!\int_V dV' \; G(\vec{r}, \vec{r}\,') \; g(\vec{r}\,')}_{\text{Volumsquellen}} \; - \; \underbrace{\int\!\!\int_F dF' \; \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial n'} \; - \; G \, \frac{\partial \varphi}{\partial n'} \right)}_{\text{Flächequellen}} \tag{18.5}$$

Der erste Term der rechten Seite gibt den Beitrag der Volumsquellen. Inhomogenen Randbedingungen stellen Flächenquellen dar, die im zweiten Term enthalten sind. Die Randbedingungen für die Greensche Funktion müssen so gewählt werden, dass die Terme fortfallen, in denen unbekannte Eigenschaften von φ stehen. Z.B. macht die Randbedingung 18.3 Angaben über vhi, nicht aber über Ableitungen dieser Funktion. Daher wird längs F vorgeschrieben:

$$\vec{r}_s \; \in \; F : \; G(\vec{r}_s, \vec{r}\,') = 0. \tag{18.6}$$

Dies führt zum endgültigen Resultat:

$$\phi(\vec{r}) \; = \; \int\!\!\int\!\!\int_V dV' \; G(\vec{r}, \vec{r}\,') \; g(\vec{r}\,') \; - \; \int\!\!\int_F dF' \; h(\varphi\,') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}\,')}{\partial n'}. \tag{18.7}$$

18.2 Beispiel: Anregung eines Hohlleiters

Ein Wellenleiter (s. Kap.22) rechteckigen Querschnitts (Breite a, Höhe b) besteht aus ideal leitendem Metall. Die tangentielle Feldstärke entlang der Wände muss daher Null sein. Das Feld in diesem Wellenleiter wird durch eine Hochfrequenzspannung angeregt, die längs eines Fensters (Breite a, Länge g) in der Wand $y = b$ angelegt ist.

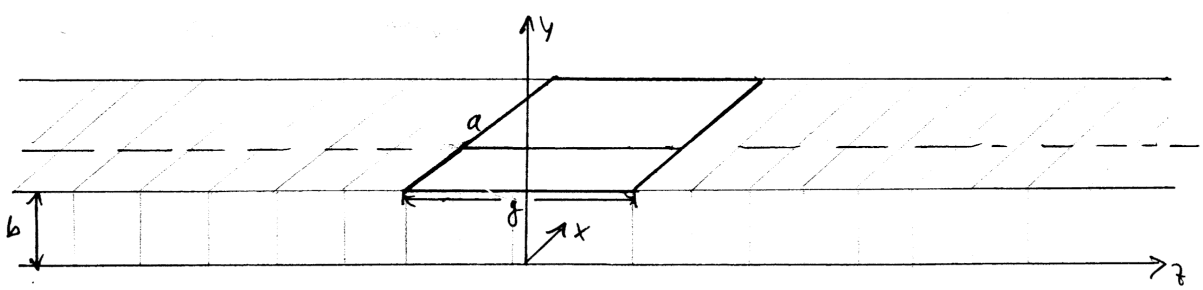

Abbildung 18.2: Ein rechteckiger Wellenleiter mit einem rechteckigen Fenster in einer Wand

Die hier beschriebene Vorgangsweise ist eine grobe Näherung: Es wird angenommen, dass die im Fester wirkende Feldstärke räumlich homogen ist:

$$0 < x < a, \quad y = b, \quad -\frac{g}{2} < z < \frac{g}{2} : \qquad E_z = E_0 \; e^{i\omega t}, \quad E_0 = \text{const.} \tag{18.8}$$

Sehr wesentlich ist, dass $E_x \equiv 0$ ist; sonst wäre eine Greensche Matrix (s. Kap.24) nötig.

Wegen dieser speziellen Annahmen sind nur die folgenden drei Feldkomponenten E_z, E_y, H_x ungleich Null. Auch alle Ableitungen nach x sind Null. Von den Maxwellschen Gleichungen bleiben nur folgenden Gleichungen übrig:

$$\begin{aligned} i\omega\varepsilon\ E_y &= -\frac{\partial H_x}{\partial z}, \\ i\omega\varepsilon\ E_z &= \frac{\partial H_x}{\partial y}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i\omega\mu\ H_x, \\ \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} &= -\omega^2\varepsilon\mu\ H_x. \end{aligned} \tag{18.9}$$

Setzt man die ersten zwei Gleichugen in die dritte ein, erhält man die vierte. H_x wird mit vph identifiziert. Damit ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für vhi; E_y und E_z lassen sich dann aus vhi ableiten:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k^2\ \varphi = 0; \tag{18.10}$$

$$E_y = \frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{18.11}$$

$$E_z = -\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{18.12}$$

Längs der ideal leitenden Wände mussen alle tangentiellen Komponenten der elektrischen Feldstärke Null sein. Dies bedeutet im einzelnen ($\vec{E}_{\text{tang}} = 0$):

$$x = 0, a \quad : \qquad E_y = 0\ \Rightarrow \varphi = 0; \tag{18.13}$$

$$y = 0, b \quad : \qquad E_z = 0\ \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \qquad \text{ausser im Fenster.} \tag{18.14}$$

Im Fenster ist vorgeschrieben:

$$0 < x < a, \quad y = b, \quad -\frac{g}{2} < z < \frac{g}{2}: \qquad E_z = E_0 = -\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{18.15}$$

Daraus ergeben sich folgende Vorschriften für die Greensche Funktion: Sie ist Lösung folgender inhomogner Differentialgleichung:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right] G(y, z; y'z') = -\ \delta(y - y')\ \delta(z - z'). \tag{18.16}$$

Die Randbedingungen lauten:

$$x = 0, a \ : \ G = 0; \tag{18.17}$$

$$y = 0, b \ : \ \frac{\partial G}{\partial y} = 0; \tag{18.18}$$

$$z = \pm\infty \ : \ \frac{\partial G}{\partial |z|} - ik\ G = 0. \tag{18.19}$$

MIt Gl.(10) und den Gln.(13) bis(19) gehen wir in das Volumsintegral des zweiten Greenschen Satzes ein:

$$\begin{aligned} &\int\!\!\int\!\!\int \left[\varphi\left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right) G\ - G\left(\frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right)\varphi\right] dx'dy'dz' = \\ = &\int\!\!\int\!\!\int dx'dy'dz'\ \left[\varphi\left(-k^2 G - \delta(y - y')\ \delta(z - z')\right) - G(-k^2\varphi)\right] = \\ = &\int_0^a dx'\ \varphi(y, z). \end{aligned} \tag{18.20}$$

Aus dem Oberflächenintegral des zweiten Greenschen Satzes folgt:

$$\begin{aligned}
\int\int dx'dy' \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \varphi}{\partial n'}\right)_{z'=\pm\infty} &= 0 \\
+ \int\int dy'dz' \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \varphi}{\partial n'}\right)_{x'=0,a} &+ 0 \\
+ \int\int dx'dz' \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \varphi}{\partial n'}\right)_{y'=0,b} &+ 0 - \int_0^a dx' \int_{-g/2}^{g/2} dz' \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right)_{y'=b}
\end{aligned} \tag{18.21}$$

Die Resultate der Gln.(20) und (21) sind die beiden Seiten des zweiten Greenschen Satzes. Es kommt keine x-Abhängigkeit vor. Daher können die Integrationen bzgl. dieser Variablen weggelassen werden. Das Resulta ist also:

$$\begin{aligned}
\varphi(y,z) &= \int_{-g/2}^{g/2} dz'\ G(y,z;y'=b,z') \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial y'}}_{=\, i\omega\varepsilon E_0} \\
H_x(y.z) &= i\omega\varepsilon\ E_0 \int_{-g/2}^{g/2} dz'\ G(y,z;y'=b,z').
\end{aligned} \tag{18.22}$$