

Kapitel 2

Typen von Differentialoperatoren. Charakteristiken

Für Differentialoperatoren in zwei unabhängigen Variablen: Sommerfeld VI §8.

Für Differentialoperatoren in mehr als zwei unabhängigen Variablen: Courant-Hilbert II, Chap. III

2.1 Lineare Differentialoperatoren zweiter Ordnung in zwei Variablen

Ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung in zwei Variablen ist definiert als:

$$Lu := A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F(u). \quad (2.1)$$

Dies kann noch zusammengefasst werden als:

$$Lu := A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \Phi(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y). \quad (2.2)$$

A bis F sind hinreichend oft differenzierbare, gegebene Funktionen von x und y . Φ ist eine hinreichend oft differenzierbare Funktion ihrer (angegebenen) Argumente; sie darf sogar in u und dessen ersten Ableitungen nichtlinear sein.

2.1.1 Die Charakteristikergleichung. Die 3 Typen von Differentialoperatoren

Wir untersuchen nun die Lösbarkeit des Cauchyschen Anfangswertproblems der mit obigem Differentialoperator definierten Differentialgleichung

$$Lu = 0. \quad (2.3)$$

In Abb.2.1 ist eine Anfangskurve C gegeben. Längs ihr verläuft die Koordinate s (z.B. die Bogenlänge). Längs der Anfangskurve C ist u als hinreichend oft differenzierbare Funktion gegeben, daher auch die Ableitung $\partial u / \partial s$. Ebenso ist die Normalableitung $\partial u / \partial n$ längs C gegeben. Wir fragen, wie diese Anfangswerte mittels der Differentialgleichung (2.3) in das Innere des Gebietes fortgesetzt werden können. Wir wollen die Lösung $u(x, y)$ als Potenzreihe in den beiden Variablen betrachten:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} + (y - y_0) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} + \\ &+ \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_0, y_0} + (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{x_0, y_0} + \frac{1}{2} (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{x_0, y_0} + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

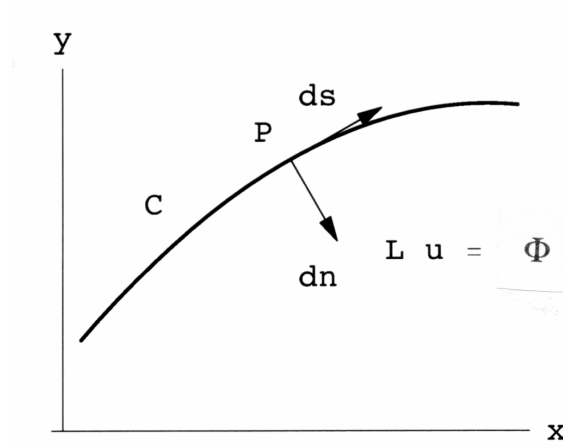


Abbildung 2.1: Das Cauchysche Anfangswertproblem ausgehend von der Kurve C .

(x_0, y_0) ist ein Punkt auf der Kurve C . In diesem müssen nun die Ableitungen bestimmt werden.

Wie definieren nun folgende Abkürzungen:

$$p := u_x, \quad q := u_y; \quad (2.5)$$

$$r := u_{xx} = p_x, \quad s := u_{xy} = u_{yx} = p_y = q_x, \quad t := u_{yy} = q_y. \quad (2.6)$$

Damit bilden wir die folgenden Differentiale:

$$dp = r dx + s dy, \quad (2.7)$$

$$dq = s dx + t dy. \quad (2.8)$$

Ebenso wird damit die Differentialgleichung (2.3) umgeschrieben:

$$A r + 2B s + C t = \Phi. \quad (2.9)$$

Da $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ längs C bekannt sind, sind auch p und q längs C bekannt. Die Gln. (2.7) bis (2.9) bilden dann längs C ein System von 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten r, s, t . Die Determinante des Systems ist:

$$\begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2. \quad (2.10)$$

Deren Verschwinden oder Nichtverschwinden legt fest, ob die zweiten Ableitungen r, s, t berechnet werden können oder nicht. Analoge Betrachtung lassen sich auch für die höheren Ableitungen durchführen. z. B. werden die Gln. (2.7) bis (2.9) nach x abgeleitet:

$$\begin{aligned} A r_x + 2B s_x + C t_x &= \Phi_x + \dots, \\ dx r_x + dy s_x &= dr, \\ dx s_x + dy t_x &= ds. \end{aligned}$$

... bezeichnet bekannte Terme. Dieses System ist wieder ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten r_x, s_x, t_x , dessen Determinante ist wieder durch Gl.(2.10) gegeben. Entsprechende Gleichungssysteme erhält man für alle weiteren Ableitungen. Immer ist die Determinante des sie bestimmten linearen Gleichungssystems durch (2.10) gegeben.

Ist die Determinante (2.10) längs C von Null verschieden, dann hat das Cauchysche Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung. Denn man kann dann die Lösung der Differentialgleichung (2.3) (oder (2.9)) als Taylorreihe um einen Punkt der Anfangskurve C ansetzen.

$u(x_0, y_0)$ und die ersten Ableitungen an dieser Stelle sind vorgegeben. Die höheren Ableitungen lassen sich aus den Gln. (2.7) bis (2.9) und den entsprechenden weiteren Gleichungen, die daraus durch Ableitung nach x und y hervorgehen, bestimmen, falls die Determinante (2.10) $\neq 0$ ist. Ein Wert Null der Determinante liefert folgenden Gleichung:

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0. \quad (2.11)$$

Dies ist die **Charakteristengleichung**. Man kann sie umschreiben auf:

$$\begin{aligned} A y'^2 - 2B y' + C &= 0; \\ y'_{1,2} &= -\frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{B^2 - AC}{A^2}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dies sind zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, jede besitzt eine einparametrische Lösungsschar:

$$\begin{aligned} \text{allg. Lösung von } y'_1 = \dots &: \quad \phi(x, y) = \text{const.} \\ \text{allg. Lösung von } y'_2 = \dots &: \quad \psi(x, y) = \text{const.} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Durch jeden Punkt der x, y -Ebene geht je eine Kurve jeder der beiden Scharen, Abb.2.2. Diese Kurven heissen **Charakteristiken**. Damit das Cauchysche Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist, darf die Anfangskurve C mit keiner Charakteristik zusammenfallen.

An jedem Punkt der x, y -Ebene kann man den Differentialoperator (2.10) klassifizieren nach dem Vorzeichen des Radikanden in (2.12):

1. $AC - B^2 < 0$: **Hyperbolischer Typ**, $y'_{1,2}$ sind reell.
Ein Beispiel ist der Operator der Wellengleichung mit:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad A = 1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{c^2}.$$

2. $AC - B^2 = 0$: **Parabolischer Typ**, $y'_{1,2}$ ist reelle Doppelwurzel. Es gibt nur eine Schar von Charakteristiken.
Ein Beispiel ist der Operator der Diffusionsgleichung:

$$L = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}, \quad A = a > 0, \quad B = C = 0.$$

3. $AC - B^2 > 0$: **Elliptischer Typ**, $y'_{1,2}$ sind konjugiert komplex. Die Charakteristiken sind komplexe Kurven.
Ein Beispiel eines elliptischen Differentialoperators ist der Laplaceoperator:

$$L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad A = C = 1, \quad B = 0.$$

In den oben angegebenen Beispielen sind die Koeffizientenfunktionen A, B, C konstant, haben also den selben Wert an jedem Punkt der x, y -Ebene. Im allgemeinen Fall kann jeder dieser Koeffizienten eine Funktion von x und y sein; dann kann der Operator (2.2) in verschiedenen Punkten der x, y -Ebene von verschiedenem Typ sein.

Es gibt Verfahren, um einen Differentialoperator auf die Normalform seines Typs zu bringen (Transformation auf Charakteristiken). s. CH II, Chap.III.

2.1.2 Diskussion von Anfangs- und Randwertproblemen bei den verschiedenen Typen von Differentialoperatoren

Wir betrachten im Detail das Funktionieren des Cauchyschen Anfangswertproblems und anderer Aufgabenstellungen bei den drei Typen von Differentialoperatoren.

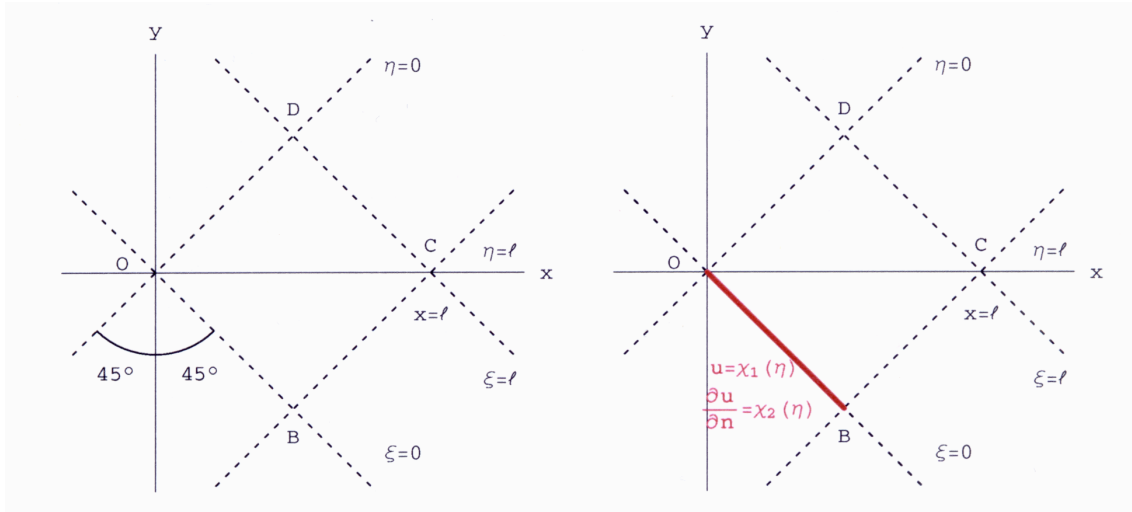


Abbildung 2.2: a) Links: Die Charakteristiken des Differentialoperators $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.
b) Rechts: Das Cauchysche Anfangswertproblem längs der Charakteristik OB .

Hyperbolischer Typ

Wir betrachten als ein Beispiel die Wellengleichung in einer Raumdimension:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0; \quad y = ct. \quad (2.14)$$

Für diese lautet die Gleichung der Charakteristiken:

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0; \quad A = 1, \quad B = 0, \quad C = -1.$$

$$\begin{aligned} dy^2 - dx^2 = 0; \quad y'_{1,2} &= \pm 1; \\ y'_1 &= +1, \quad y_1 = x_1 - C_1; \\ y'_2 &= -1, \quad y_2 = -x_2 - C_2. \end{aligned}$$

Die beiden Scharen von Charakteristiken sind: (s. Abb. 2.2 a).

$$\begin{aligned} x - y &= x - ct = C_1 := \eta, \\ x + y &= x + ct = C_2 := \xi. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die Wellengleichung wird nun mittels der Kettenregel der Differentiation auf diese Variablen ξ und η umgerechnet (s. Anhang zu diesem Kapitel):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.16)$$

Hierzu gibt es die d'Alembertsche Lösung:

$$\begin{aligned} u &= w_1(\xi) + w_2(\eta) = w_1(x + y) + w_2(x - y) \\ &= w_1(x + ct) + w_2(x - ct). \end{aligned}$$

Die Funktionen w_1 und w_2 müssen zweimal differenzierbar sein, sonst sind sie völlig willkürlich. Sie werden erst durch weitere Vorgaben, wie Anfangs- und Randbedingungen eindeutig festgelegt.

Wir betrachten drei Fälle von Problemstellungen:

1. Cauchysches Anfangswertproblems, also Vorgabe von u und $\partial u/\partial n$ längs einer Charakteristik.
2. Angabe von u längs zweier Charakteristiken.
3. Cauchysches Anfangswertproblem längs einer Kurve, die mit keiner Charakteristik zusammenfällt.

1. Cauchysches Anfangswertproblems längs einer Charakteristik:

Längs der Strecke OB der Charakteristik $\xi = 0$, seien u und $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ vorgegeben; (s.Abb.2.2 b). Diese Angaben setzen wir in die d'Alembertsche Lösung ein:

$$\begin{aligned} \xi = 0 : \quad u &= \chi_1(\eta) = w_1(0) + w_2(\eta); \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} = \chi_2(\eta) = w_1'(0). \end{aligned}$$

Für w_1 ergibt sich im allgemeinen ein Widerspruch:

$$\chi_2(\eta) = w_1'(0) = \text{const.}$$

Dies bestätigt das allgemeine Resultat von §2.1, dass die Cauchysche Anfangskurve nicht mit einer Charakteristik zusammenfallen darf, wenn das Problem eine eindeutige Lösung haben soll.

Dafür könne wir auch eine physikalische Erklärung geben: Die d'Alembertsche Lösung besagt: Alle Signale breiten sich mit der gleichen Geschwindigkeit c aus. Das Cauchysche Anfangswertproblem auf einer Charakteristik bedeutet: Man befindet sich in einem System das sich mit Geschwindigkeit c bewegt. Man soll von diesem aus Signale aussenden. Diese kommen aber nicht weg, weil sie auch mit der Geschwindigkeit c laufen. Es gibt keine Lösung, dich sich in den Raum hinein fortpflanzen kann.

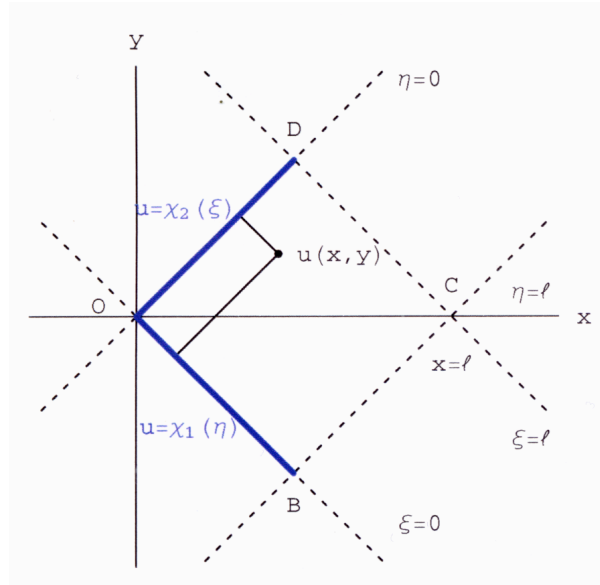


Abbildung 2.3: Angabe von u längs der Charakteristiken OD und OB .

2. Angabe von u längs zweier Charakteristiken,

z.B. längs der Strecken OB und OD, s.Abb.2.3.

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad u &= \chi_1(\eta) = w_1(0) + w_2(\eta); \\ \eta = 0: \quad u &= \chi_2(\xi) = w_1(\xi) + w_2(0); \\ w_2(\eta) &= \chi_1(\eta) - w_1(0); \\ w_1(\xi) &= \chi_2(\xi) - w_2(0). \end{aligned}$$

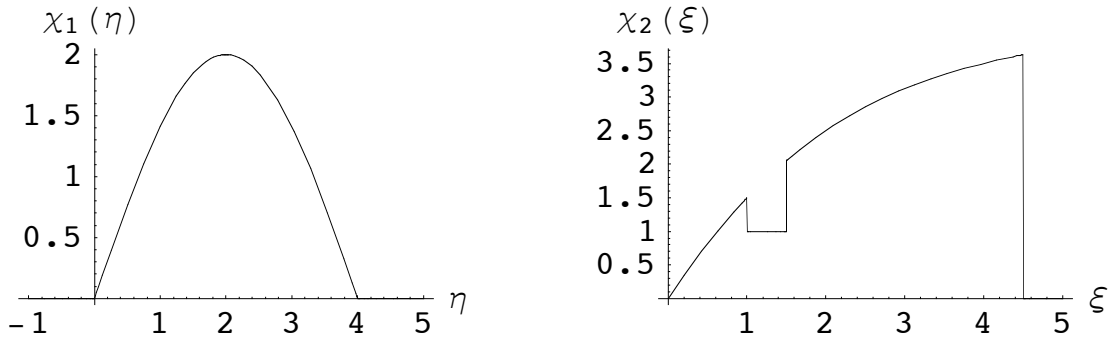


Abbildung 2.4: a) Links: Die Funktion $\chi_1(\eta)$. b) Rechts: Die Funktion $\chi_2(\eta)$.

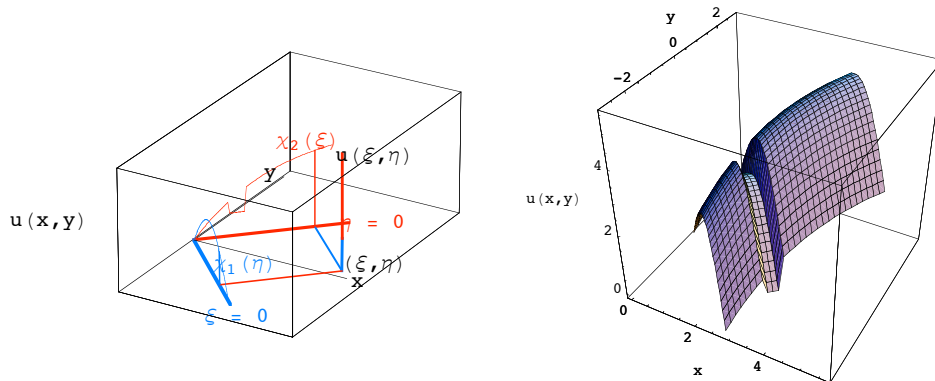


Abbildung 2.5: a) Links: Die Lösung u am Punkt ξ, η ist $u = \chi_1(\eta)$ (blau) $+ \chi_2(\xi)$ (rot).
b) Rechts: Die Fläche $u(x, y)$ für alle Werte von ξ und η .

$\chi_1(\eta)$ und $\chi_2(\xi)$ sind gegebene Funktionen (vgl beispielsweise Abb.2.4), die nur einer kleinen Einschränkung unterworfen sind:

$$\begin{aligned} w_1(0) + w_2(0) &= \chi_1(0) \\ w_1(0) + w_2(0) &= \chi_2(0) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \chi_1(0) = \chi_2(0).$$

Die Lösung lautet daher:

$$u(x, y) = \chi_1(\eta) + \chi_2(\xi). \quad (2.17)$$

Die vollständige Lösung u besteht aus der Superposition der beiden Funktionen $\chi_1(\eta = x + y)$ und $\chi_2(\xi = x - y)$. In Abb.2.5 ist dies links fuer ein Wertepaar ξ, η gezeigt; rechts für das ganze Gebiet, ueber dem dann die Fläche $u(x, y)$ ausgebildet wird.

Die χ_i können sogar unstetig sein. Diese Unstetigkeiten breiten sich jeweils längs der Charakteristiken aus, (s.Abb.2.5). Der entsprechende zeitliche Ablauf des Vorgangs ist in Abb.A.1 am Ende dieses Kapitels gezeigt.

3. Cauchysches Anfangswertproblem längs einer Kurve, die mit keiner Charakteristik zusammenfällt. Physikalische Anfangsbedingungen. Zur Anfangszeit $t = 0$ sind die Werte der Wellenfunktion u und deren Zeitableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ vorgegeben, (s.Abb.??).

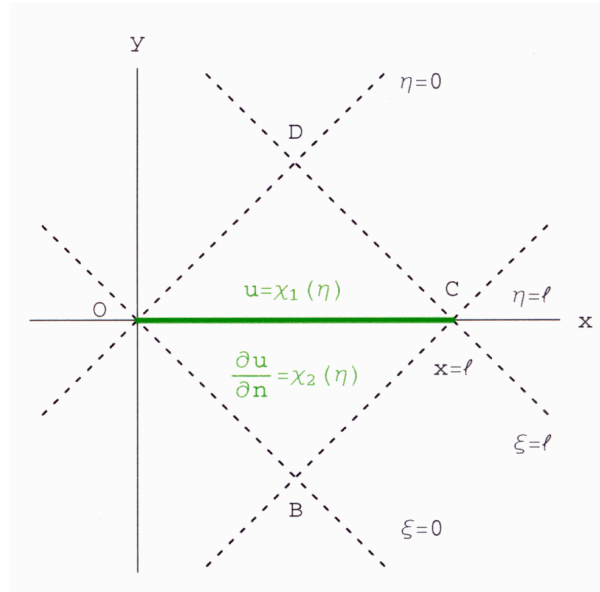


Abbildung 2.6: Das physikalische Anfangswertproblem der Differentialgleichung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$ längs einer Kurve, die keine Charakteristik ist.

$$\begin{aligned}
 t \propto y = 0: \quad u &= u(x, 0) = \chi_1(x) = w_1(x) + w_2(x); \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \chi_2(x) = w_1'(x) - w_2'(x). \\
 \int \chi_2(x) dx &= w_1(x) - w_2(x).
 \end{aligned}$$

Damit sind die Funktionen w_i im Intervall $0 \leq x \leq l$ bestimmt:

$$\begin{aligned}
 w_1(x) &= \frac{1}{2} [\chi_1(x) + \int \chi_2(x) dx], \\
 w_2(x) &= \frac{1}{2} [\chi_1(x) - \int \chi_2(x) dx]; \quad 0 \leq x \leq l.
 \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung:

$$u(x, t) = w_1(\xi) + w_2(\eta) = w_1(x + y) + w_2(x - y) = w_1(x + ct) + w_2(x - ct).$$

Die Funktionsoperatoren $w_1(x)$ und $w_2(x)$ sind zunächst nur im Intervall $0 \leq x \leq l$ bestimmt worden. Die Anfangswerte pflanzen sich längs der Charakteristiken fort (einschließlich eventueller Unstetigkeiten). Daher ist $u(x, y)$ im allgemeinen keine analytische Funktion in x und y .

Bisher ist die Lösung nur für das Quadrat in obiger Abbildung (??) bestimmt, aber nicht für spätere Zeiten, da $\chi_1(x)$ und $\chi_2(x)$ nur für $0 \leq x \leq l$ definiert sind. Die Fortsetzung der Lösung erfolgt über die Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 x = 0: \quad u(0, y) &= 0 = w_1(y) + w_2(-y); \\
 x = l: \quad u(l, y) &= 0 = w_1(l + y) + w_2(l - y).
 \end{aligned}$$

Nun wird die zweite Gleichung umgestellt; im resultierenden Ausdruck wird auch noch y durch $-y$ ersetzt:

$$\begin{aligned}
 w_1(l + y) &= -w_2(l - y), \\
 y \rightarrow -y: \quad w_2(l + y) &= -w_1(l - y).
 \end{aligned}$$

Damit sind die Funktionen $w_1(x)$ und $w_2(x)$ für das Intervall $0 \leq x \leq 2\ell$ bestimmt worden. Weitere Anwendung der Randbedingung gestattet es, diese Funktionen, und damit die Lösung, für alle Zeiten, also für den ganzen Streifen $0 \leq x \leq \ell, \quad y \geq 0$ zu berechnen.

Zusammenfassend: Beim hyperbolischen Typ gibt es 2 Arten von sinnvollen Problemstellungen:

1. Je eine Bedingung längs zwei sich schneidenden Charakteristiken;
2. Zwei Anfangsbedingungen (Cauchysches Anfangswertproblem) längs einer Kurve, die die Charakteristiken überall schneidet.

Elliptischer Typ

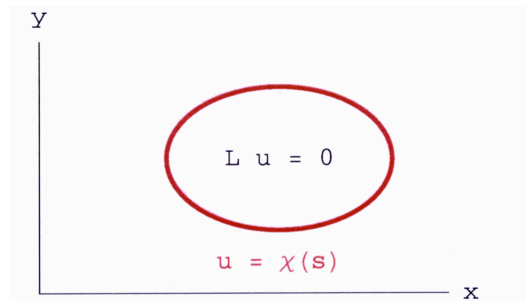


Abbildung 2.7: Randwertproblem der Potentialgleichung.

z.B. die Potentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Hier sind die Charakteristiken rein imaginär und spielen daher im Reellen, auf das sich die physikalische Beschreibung beschränkt, keine Rolle. Für elliptischen Typ sind Randwertprobleme typisch, bei denen längs des Randes für die Lösung **genau eine lineare Randbedingung** vorgeschrieben wird.

$$\begin{aligned} \text{z.B.} \quad u &= \chi(s) && \text{oder} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \chi(s) && \text{oder} \\ a u + b \frac{\partial u}{\partial n} &= \chi(s), && a, b, \chi(s) \text{ gegeben.} \end{aligned}$$

Unstetigkeiten der Randfunktion pflanzen sich längs der (imaginären) Charakteristiken fort, können daher nicht ins Innere von V eindringen. Die Lösung ist im Inneren von V analytisch.

Die Charakteristiken der obigen Potentialgleichungen sind:

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 = 0; \quad y'_{1,2} &= \mp i; \\ i y'_1 &= +1, \quad i y_1 = x_1 - C_1; \\ i y'_2 &= -1, \quad -i y_2 = x_2 - C_2. \end{aligned}$$

Die beiden Scharen von Charakteristiken sind:

$$\begin{aligned} x - iy &= C_1 := \eta, \\ x + iy &= C_2 := \xi. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Die d'Alembertsche Lösung lautet damit:

$$\begin{aligned} u &= w_1(\xi) + w_2(\eta), \\ u &= w_1(x + iy) + w_2(x - iy); \\ u^* &= w_1^*(x - iy) + w_2^*(x + iy) \stackrel{!}{=} u, \quad \text{da } u \text{ reell!} \end{aligned}$$

Daraus folgt, die beiden Funktionen w_1 und w_2 sind zueinander konjugiert komplex, $w_1 = w_2^*$. Damit sind die Real- und Imaginärteile komplexer Funktionen, die **harmonischen Funktionen**, Lösungen der Potentialgleichung.

Parabolischer Typ

z.B. die Wärmeleitungsgleichung

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

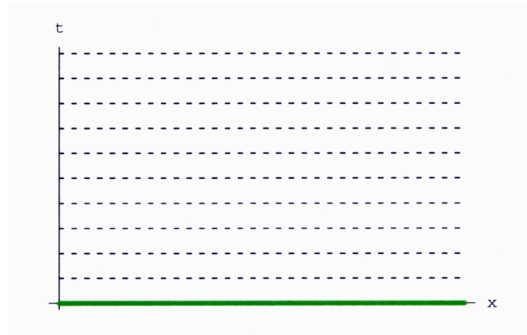


Abbildung 2.8: Die Charakteristiken und das Anfangswertproblem der Wärmediffusionsgleichung.

Diese Gleichung hat nur eine Schar von Charakteristiken, s. Abb. 2.8. Längs einer solchen sei eine analytische Anfangsbedingung $\chi(x)$ gegeben. Wir zeigen, dass damit und der obigen Differentialgleichung die Lösung für alle Zeiten bestimmt ist:

$$t = 0: \quad T(x, t = 0) = \chi(x).$$

Die Lösung wird in eine Potenzreihe entwickelt:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left. \frac{\partial^n T(x, 0)}{\partial t^n} \right|_{t=0}; \\ T(x, t = 0) &= \chi(x); \\ \left. \frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} \right|_{t=0} &= a \frac{\partial^2 T(x, 0)}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 \chi(x)}{\partial x^2}; \\ \left. \frac{\partial^2 T(x, 0)}{\partial t^2} \right|_{t=0} &= a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 T(x, 0)}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^4 \chi(x)}{\partial x^4}; \\ \left. \frac{\partial^n T(x, 0)}{\partial t^n} \right|_{t=0} &= a^n \frac{\partial^{2n} \chi(x)}{\partial x^{2n}}; \\ T(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at)^n}{n!} \frac{\partial^{2n} \chi(x)}{\partial x^{2n}}. \end{aligned}$$

$\chi(x)$ ist willkürlich. Es kann sogar unstetig sein (nur ist dann ein anderer Beweisgang nötig) und diese Unstetigkeiten des Anfangszustandes breiten sich nicht aus, weil die Charakteristiken senkrecht zur Zeitachse stehen; sondern die Lösung $T(x, t)$ ist analytisch für $t > 0$. z.B. einer punktförmig aufgetragenen Wärmemenge entspricht als Anfangszustand eine δ -Funktion. Alle späteren Temperaturverteilungen sind Gaußsche Glockenkurven.

2.2 Differentialoperatoren 2. Ordnung in mehr als 2 Variablen

Der Laplaceoperator in 3 oder n Dimensionen:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (2.19)$$

ist vom elliptischen Typ. Ebenso sind dies die Operatoren der Helmholtz- und der zeitfreien Diffusionsgleichung:

$$\Delta u + k^2 u, \quad \Delta u - \kappa^2 u. \quad (2.20)$$

Der Operator der Wellengleichung:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

ist für alle Dimensionen vom hyperbolischen Typ.

Der Operator der Diffusionsgleichung;

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.22)$$

ist vom parabolischen Typ.

Wenn die Zahl der unabhängigen Variablen größer als 2 ist, dann gibt es Differentialoperatoren die mit keinem der drei in Paragraph 2.1 aufgezählten Typ zusammenfallen. Ein Operator der nicht in das Schema passt, ist z.B.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.23)$$

Einem solchen Operator begegnet man bei der Behandlung der Tscherenkowstrahlung. Eine Quelle bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v > c/n$ durch ein Medium, in dem sich die Wellen nur mit der Phasengeschwindigkeit c/n ausbreiten können. Dieses Problem kann man auch behandeln, indem man die Ausbreitung der Wellen in einem Medium betrachtet, das sich mit der Geschwindigkeit $v > c/n$ betrachtet.

2.3 Differentialoperatoren höherer als 2. Ordnung

Derartige Differentialoperatoren werden von Courant-Hilbert im Bd.II, Chap.2, §2 behandelt. Hier werden nur einige Beispiele zitiert:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \left(\Delta - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) u = \Delta \Delta u - 3 \Delta u_{tt} + 2 u_{tttt} \quad (2.24)$$

ist vom hyperbolischen Typ.

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \left(\Delta + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) u = \Delta \Delta u - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \quad (2.25)$$

ist kein reiner Typ.

2.4 n lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung in zwei Variablen

Derartige Differentialoperatoren werden von Courant-Hilbert im Bd.II, Chap.2, §2 behandelt. Sie können in Matrixform angeschrieben werden:

$$Lu := A u_x + B u_y + C u + d; \quad (2.26)$$

$$A = (a_{ik}), B = (b_{ik}), C = (c_{ik}); d = (d_i), u = (u_i), i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.27)$$

A, B, C sind quadratische Matrizen, deren Elemente Funktionen von x und y sein können; d und u sind derartige Spaltenvektoren. Die Zuordnung zu einem bestimmten Typ erfolgt über die **charakteristische Form**:

$$Q := \det(a_{ik} - \tau b_{ik}) = |A - \tau B|. \quad (2.28)$$

Hat die Gleichung $Q = 0$ keine reellen Wurzeln, dann ist das obige System vom elliptischen Typ. Hat diese Gleichung n reelle, (paarweise verschiedene) Wurzeln, dann ist das obige System hyperbolisch. Die Bedingung der Verschiedenheit der Wurzeln kann beseitigt werden.

Anschließend werden einige wichtige Beispiele diskutiert.

2.4.1 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Dieses System von zwei partiellen Differentialgleichungen erhält man für Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion einer komplexen Variablen $z = x + iy$.

$$w := u(x, y) + iv(x, y) = f(z) = f(x + iy). \quad (2.29)$$

Die Analytizität dieser Funktion bedeutet: Die Ableitung $f'(z)$ dieser Funktion, das heißt der Grenzwert des Differenzenquotienten, muss unabhängig davon sein, in welcher Richtung die Folge dieser Quotienten auf den Punkt z zulaufen. Wählt man speziell die x - bzw. y -Achse, dann findet man:

$$dz = dx : \frac{df}{dz} = \frac{df}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.30)$$

$$dz = idy : \frac{df}{dz} = \frac{df}{i dy} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.31)$$

Gleichsetzen dieser beiden Ableitungen und Trennung von Real- und Imaginärteil liefern:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad u_x - v_y = 0; \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_x + u_y = 0. \quad (2.33)$$

Dieses System wird jetzt in der allgemeinen Form dargestellt:

$$L(\bar{u}) = A\bar{u}_x + B\bar{u}_y = A \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_y \\ v_y \end{pmatrix} = 0. \quad (2.34)$$

Die charakteristische Form

$$Q = \det(a_{ik} - \tau b_{ik}) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -\tau & 1 \end{pmatrix} = 1 + \tau^2 \quad (2.35)$$

hat die Wurzeln $\tau_{1,2} = \pm i$; der Differentialoperator ist also elliptisch. Deshalb gibt es in der Funktionentheorie nur isolierte Singularitäten. Z.B. ist $z = 0$ nur ein isolierter Pol der Funktion:

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (2.36)$$

2.4.2 Hyperbolisches System entsprechend zu 2.4.1

Ändert man in den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen das eine Vorzeichen,

$$u_x + v_y = 0, \quad v_x + u_y = 0; \quad L(\bar{u}) = A\bar{u}_x + B\bar{u}_y = 0. \quad (2.37)$$

erhält die charakteristische Form

$$Q = \det(a_{ik} - \tau b_{ik}) = \dots = 1 - \tau^2. \quad (2.38)$$

zwei reelle Wurzeln $\tau_{1,2} = \pm 1$; das System ist hyperbolisch. Es gibt zwei Systeme von reellen Charakteristiken. Ist eine Funktion in einem Punkt singular, dann ist hat sie diese Eigenschaft überall auf beiden Charakteristiken, die durch diesen Punkt gehen. Analog zu der Singularität in $x = 0, y = 0$ im obigen Beispiel (2.36) ergibt sich:

$$\frac{x}{x^2 - y^2} - \frac{y}{x^2 - y^2}. \quad (2.39)$$

Dies erinnert an den "Lichtkegel" in einer Relativitätstheorie mit nur einer Raumdimension.

2.4.3 Parabolisches System

Das System

$$u_x = v, \quad u_y = v_x. \quad (2.40)$$

hat ein System von Charakteristiken.

2.4.4 Maxwell'sche Gln., DiracGl. mit allg. Zeitabhängigkeit, hyperbolisches System

2.4.5 Maxwell'sche Gln., DiracGl. mit period. Zeitabhängigkeit, elliptisches System

2.5 Übungsaufgaben

1. Wo ist die Tricomische Differentialgleichung

$$u_{xx} + x u_{yy} = 0$$

elliptisch, parabolisch, hyperbolisch. Berechnen Sie die charakteristischen Kurven in allen drei Fällen.

2. Stellen Sie die Maxwell'schen Gleichungen mit harmonischer Zeitabhängigkeit in der Matrixform (2.27) dar. Dazu fassen Sie den elektrischen und den magnetischen Feldvektor zu einem sechsdimensionalen Vektor zusammen. Ebenso ergänzen Sie die elektrische Stromdichte mit Nullen zu einem solchen Vektor. Berechnen Sie die charakteristische Form. Zeigen Sie, dass das System elliptisch ist.

Anhang A

Transformation der hyperbolischen Differentialgleichung (2.16) auf Charakteristiken

In Gl.(2.16)

$$L(\bar{u}) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (\text{A.1})$$

wird durch die gegebenen Transformationen

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad (\text{A.2})$$

deren Inverse als

$$\xi = f(x, y), \quad \eta = g(x, y) \quad (\text{A.3})$$

bezeichnet werden, auf neue unabhängige Variablen ξ , η transformiert. Damit wird die abhängige Variable \bar{u} umgerechnet:

$$\bar{u}(x, y) \rightarrow u(\xi, \eta) = u(x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta))$$

Dann berechnet man die partiellen Ableitungen nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \dots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \dots \end{aligned}$$

Speziell für die Charakteristiken

$$\xi = x + y = f(x, y), \quad \eta = x - y = g(x, y) \quad (\text{A.4})$$

gibt das:

$$L(\bar{u}) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \Rightarrow L(u) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (\text{A.5})$$

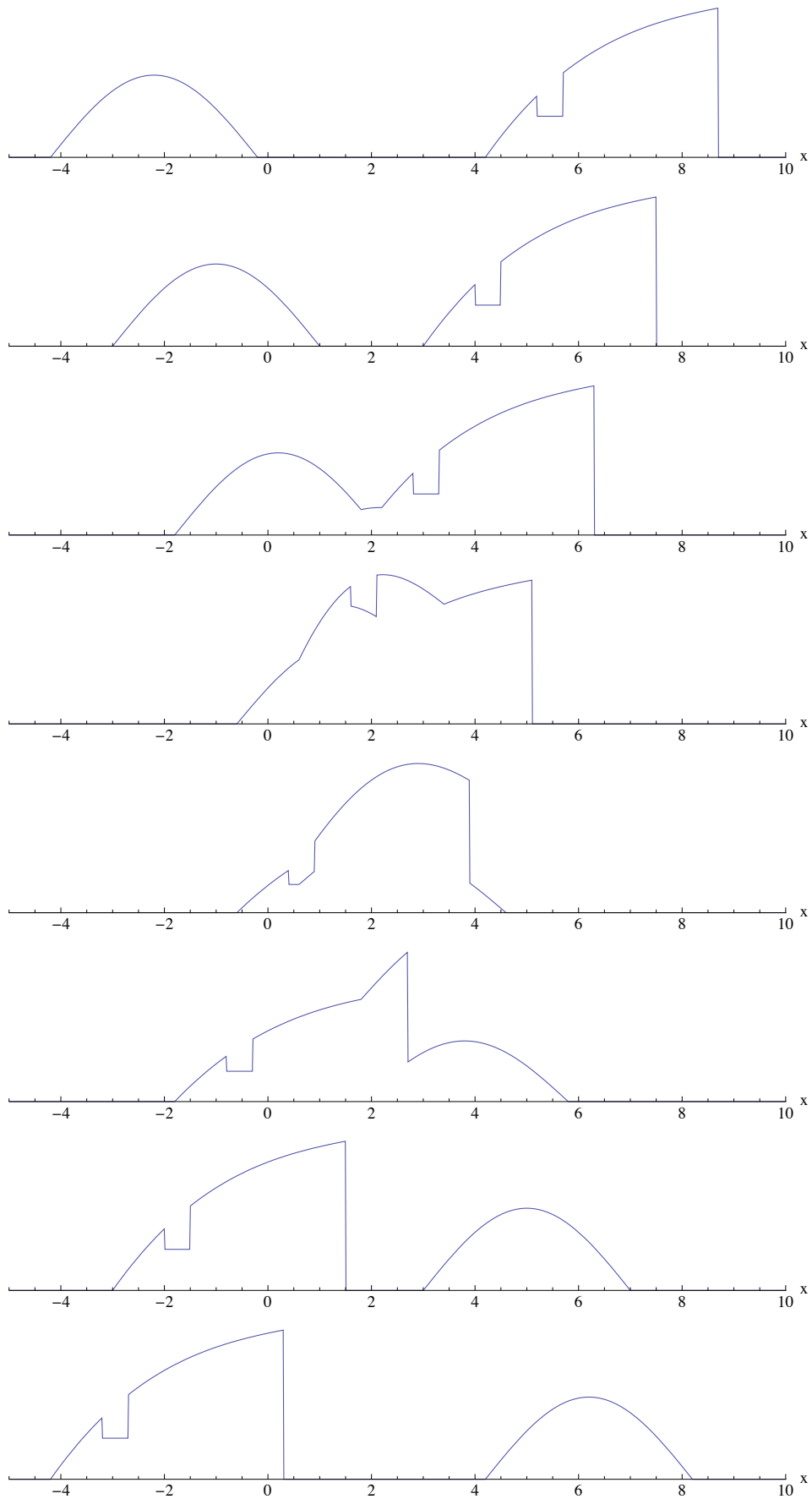


Abbildung A.1: Der zeitliche Ablauf der in Gl.(2.17) gefundenen Lösung $\chi_1(\eta = x - ct) + \chi_2(\xi = x + ct)$ für $ct = -4, -3, -1.8, -0.6, 0.6, 1.8, 3, 4.2$