

# Kapitel 24

## Greensche Tensoren für das elektromagnetische Feld in isotropen Medien

### 24.1 Verallgemeinerte Maxwell'sche Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen werden durch das Einfügen von magnetischer Ladungsdichte  $\rho_m$  und magnetischer Stromdichte  $\mathbf{M}$  in eine allgemeinere und symmetrischere Form gebracht:

$$\nabla \cdot \left| \begin{array}{l} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{J}, \end{array} \right. \quad (24.1)$$

$$\nabla \cdot \left| \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mathbf{M}; \end{array} \right. \quad (24.2)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho, \quad (24.3)$$

$$\nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H} = \rho_m. \quad (24.4)$$

$\mathbf{E}$  = Elektrische Feldstärke,  $\mathbf{H}$  = Magnetische Feldstärke;  $\mathbf{J}$  = Elektrische Stromdichte,  $\mathbf{M}$  = Magnetische Stromdichte (fiktiv);  $\rho$  = Elektrische Ladungsdichte,  $\rho_m$  = Magnetische Ladungsdichte. Wendet man auf die ersten beiden Gleichungen, wie angedeutet, die Operation  $\text{div}$  an, ergeben sich folgende Kontinuitätsgleichungen für die Ladungen und Ströme.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (24.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}; \quad (24.6)$$

Randbedingung im Unendlichen: Austrahlungsbedingung = auslaufende Wellen.  
Randbedingung auf ideal leitenden Körpern (Fläche  $\mathcal{F}$  mit Leitfähigkeit  $\sigma = \infty$ ):

$$\mathbf{E}_{tg} = : \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{F}. \quad (24.7)$$

$\mathbf{n}$  ist die Flächennormale auf  $\mathcal{F}$ .  
Allgemeinere Randbedingung:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{H}, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{F}. \quad (24.8)$$

$\mathbf{Z}$  = Tensor der Oberflächenimpedanz;  
 $\mathbf{Z} = Z \mathbf{I}$  für isotrope Medien,  $\mathbf{I}$  = Einheitstensor.

Quellenfreier Fall:  $\mathbf{J} = \mathbf{M} = \rho = \rho_m = 0$  :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (24.9)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0; \quad (24.10)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} = 0, \quad (24.11)$$

$$\nabla \cdot \mu_0 \mathbf{H} = 0. \quad (24.12)$$

$\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ .  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  sind quellenfrei; sie sind reine Wirbelfelder. Sie sind aber Quellen- und Wirbelfelder, sobald irgendwelche Quellen vorhanden sind. **Die Felder der inhomogenen Gleichungen haben einen etwas anderen Charakter als die der homogenen.**

## 24.2 Quellenmässige Darstellung der Lösungen mittels Greenscher Tensoren im freien Raum.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \int \mathbf{G}_{ee}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') \, d\mathbf{r}' dt' - \int \mathbf{G}_{em}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}', t') \, d\mathbf{r}' dt', \quad (24.13)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = - \int \mathbf{G}_{me}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') \, d\mathbf{r}' dt' - \int \mathbf{G}_{mm}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}', t') \, d\mathbf{r}' dt'. \quad (24.14)$$

Einsetzen dieser linearen Ansätze in Gln.(24.1) und (24.2) gibt wegen der Willkürlichkeit von  $\mathbf{J}$  und  $\mathbf{M}$  folgende Differentialgleichungen für die vier Greenschen Tensoren  $\mathbf{G}_{ij}$ :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{G}_{ee}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{G}_{me} = \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (24.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{G}_{ee} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{G}_{me}}{\partial t} = 0; \quad (24.16)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{G}_{em}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{G}_{mm} = 0, \quad (24.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{G}_{em} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{G}_{mm}}{\partial t} = \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (24.18)$$

Alle vier Tensoren müssen auch der Kausalitätsbedingung genügen:

$$\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 0, \quad \text{für } t < t'. \quad (24.19)$$

Eliminiert man die Tensoren mit gemischten Indices, ergeben sich folgende Differentialgleichungen für die Komponenten mit reinen Indexpaaren:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}_{ee}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{ee}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'); \quad (24.20)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}_{mm}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{G}_{mm}}{\partial t^2} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (24.21)$$

Die Zeitabhängigkeit wird jetzt durch einen Fourierintegralansatz berücksichtigt:

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')}; \quad (24.22)$$

$$\mathbf{G}_{ee}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -i\omega\mu_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \mathbf{\Gamma}^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'), \quad (24.23)$$

$$\mathbf{G}_{mm}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -i\omega\varepsilon_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'). \quad (24.24)$$

Damit wird aus den beiden obigen Differentialgleichungen:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Gamma}^{(j)}) - k^2 \mathbf{\Gamma}^{(j)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad j = 1, 2. \quad (24.25)$$

Die Fouriertransformierten der Felder werden wie in Gl.(24.22) angesetzt. Wenn nur eine elektrische Stromdichte vorgegeben ist (also  $\mathbf{M} = 0$ ), wird aus Gl.(13):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \int \mathbf{\Gamma}^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'; \quad (24.26)$$

ebenso für eine vorgegebene magnetische Stromdichte (also  $\mathbf{J} = 0$ ) aus Gl.(14):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0 \int \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (24.27)$$

### 24.3 Randbedingungen der Greenschen Tensoren an leitenden Flächen

Auf der Oberfläche  $\mathcal{F}$  unendlich gut leitender Körper muss das tangentielle elektrische Feld Null sein. Diese Bedingung impliziert gem. (24.13) und (24.26) folgende Randbedingung für die Greenschen Tensoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0: \quad \mathbf{n} \times \mathbf{G}_{ee} &= \mathbf{n} \times \mathbf{G}_{em} = 0, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{\Gamma}^{(1)} &= 0 \quad \text{für } \forall \mathbf{r} \in \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (24.28)$$

Für das magnetische Feld  $\mathbf{H}$  gibt es keine direkte Bedingung. Man muss durch Rotorbildung in Gln.(24.13) und (24.27) aus dem magnetischen ein elektrisches Feld machen und für letzteres wieder die obige Bedingung verwenden. Dies gibt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0: \quad \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{G}_{me}) &= \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{G}_{mm}) = 0, \\ \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{\Gamma}^{(2)}) &= 0 \quad \text{für } \forall \mathbf{r} \in \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (24.29)$$

Bei Anwesenheit leitender Körper sind die Darstellungen (24.13), (24.14), (24.26) und (24.27) nicht mehr vollständig, weil die Ränder auch Beiträge liefern können. Dies wird im übernächsten Paragraphen behandelt.

### 24.4 Symmetrien der Greenschen Tensoren

Die oben eingeführten Greenschen Tensoren besitzen folgende Symmetrien, wie diese typisch sind für Lösungen selbstadjungierter vektorieller Differentialgleichungen:

$$\mathbf{\Gamma}^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \widetilde{\mathbf{\Gamma}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r})} \iff \mathbf{\Gamma}_{kl}^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \mathbf{\Gamma}_{lk}^{(\alpha)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}), \quad \alpha \in \{0, 1, 2\}; \quad (24.30)$$

$$\nabla' \times \mathbf{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}'') = \widetilde{\nabla'' \times \mathbf{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{r}''; \mathbf{r}')}; \quad (24.31)$$

$$\nabla' \times \mathbf{\Gamma}^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}'') = \widetilde{\nabla'' \times \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}''; \mathbf{r}')}. \quad (24.32)$$

$\widetilde{\Gamma}^{(i)}$  ist die transponierte Matrix zu  $\Gamma^{(i)}$ .

Zum Beweis der Symmetrien der Greenschen Tensoren wird der symmetrische Greensche Satz in der Vektorform (s. Kap.4) benötigt; dieser lautet:

$$\begin{aligned} & \int \int_V \int \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})) \, d\mathbf{r} - \int \int_V \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})) \, d\mathbf{r} = \\ = & \int_S \int \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})) \, dS - \int_S \int \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \, dS \end{aligned} \quad (24.33)$$

Zum Beweis von (24.30) werden die nachfolgenden Ausdrücke:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} := \Gamma^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}', \quad \mathbf{B} = \mathbf{b} := \Gamma^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{e}''$$

mit  $\mathbf{e}'$  und  $\mathbf{e}''$  gleich willkürlichen konstanten Vektoren in den obigen Greenschen Satz (24.33) eingesetzt.

$$\begin{aligned} & \int \int_V \int d\mathbf{r} \Gamma_{il}^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') e'_\ell \underbrace{\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{krs} \partial_r \Gamma_{il}^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') e''_t}_{k^2 \Gamma_{it}^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') e''_t + \delta_{it} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') e''_t} - \\ - & \int \int_V \int d\mathbf{r} \Gamma_{il}^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') e''_\ell \underbrace{\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{krs} \partial_r \Gamma_{it}^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') e'_t}_{k^2 \Gamma_{it}^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') e'_t + \delta_{it} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e'_t} = \int_S \int dS' \dots = 0. \end{aligned}$$

Die gerade gezeigten Ersetzungen benutzen die rotrot-Gleichung (24.25) der Greenschen Tensoren. Die zwei dabei entstehenden Terme proportional zu  $k^2$  heben sich weg, in den zwei verbleibenden Termen können die Integrationen ausgeführt werden. Das gibt dann folgende Gleichung:

$$e'_\ell e''_t \left[ \Gamma_{t\ell}^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') - \Gamma_{\ell t}^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right] = 0.$$

Wegen der Willkürlichkeit der beiden Vektoren  $\mathbf{e}'$  und  $\mathbf{e}''$  muss der Ausdruck in der rechteckigen Klammer Null sein; dies ist gerade die Identität (24.30). Das Oberflächenintegral ist Null wegen der homogenen Randbedingungen, die für die Greenschen Tensoren vorgeschrieben worden sind. Dies wird nun noch etwas weiter ausgeführt. Die Fläche für das Oberflächenintegral besteht nur aus der unendlich fernen Fläche  $\mathcal{F}_\infty$ , die das gesamte Volumen einschließt, wenn der Beweis für den Tensor  $\Gamma^{(0)}$  geführt wird. Auf dieser muss die Ausstrahlungsbedingung gelten; diese bewirkt dass der Integrand Null wird. Wenn die beiden Tensoren  $\Gamma^{(1)}$  bzw.  $\Gamma^{(2)}$  betrachtet werden, dann besteht die Fläche für das Oberflächenintegral aus  $\mathcal{F}_\infty$  und aus einer oder mehreren metallischen Oberflächen  $\mathcal{F}_m$ , auf denen die Randbedingungen (24.28) bzw. (24.29) vorgeschrieben sind. Auch diese bewirken, dass der Integrand des Oberflächenintegrals Null wird. In diesem Oberflächenintegral

$$\int_S \int dS \mathbf{n} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})] = \int_S \int dS [(\mathbf{n}, \mathbf{B}, \nabla \times \mathbf{A}) - (\mathbf{n}, \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{B})] = \diamond$$

werden bei der Untersuchung von  $\Gamma^{(1)}$  für  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  die nachfolgenden Ausdrücke eingesetzt; damit wird aus dem obigen Oberflächenintegral:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}', \quad \mathbf{B} = \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{e}''; \\ \diamond &= \int_S \int dS \left[ \underbrace{(\mathbf{n} \times \Gamma^{(1)}) \cdot \mathbf{e}''}_{=0} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \underbrace{(\mathbf{n} \times \Gamma^{(1)}) \cdot \mathbf{e}'}_{=0} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \right] \end{aligned}$$

Bei der Untersuchung von  $\Gamma^{(2)}$  werden für  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  die nachfolgenden Ausdrücke eingesetzt; damit wird aus dem obigen Oberflächenintegral:

$$\mathbf{A} = \Gamma^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}', \quad \mathbf{B} = \Gamma^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{e}'';$$

$$\diamond = \int_{\bar{S}} \int dS \left[ -\mathbf{B} \cdot \underbrace{(\mathbf{n} \times (\nabla \times \Gamma^{(2)})) \cdot \mathbf{e}'}_{=0} - \mathbf{A} \cdot \underbrace{(\mathbf{n} \times (\nabla \times \Gamma^{(2)})) \cdot \mathbf{e}''}_{=0} \right]$$

Zum Beweis von (24.32) werden die nachfolgenden Ausdrücke:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} := \nabla \times \Gamma^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{e}', \quad \mathbf{B} = \mathbf{b} := \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{e}''$$

in den obigen Greenschen Satz (24.33) eingesetzt.

$$\int \int \int_{\bar{V}} d\mathbf{r} \left( \varepsilon_{ivx} \partial_v \Gamma_{i\ell}^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') e'_t \right) \underbrace{\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{krs} \partial_r \Gamma_{s\ell}^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') e''_{\ell}}_{k^2 \Gamma_{it}^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') e''_{\ell} + \delta_{i\ell} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') e''_{\ell\ell}} -$$

$$- \int \int \int_{\bar{V}} d\mathbf{r} \Gamma_{i\ell}^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') e''_{\ell} \varepsilon_{ijk} \partial_j \underbrace{\varepsilon_{svx} \partial_v \varepsilon_{krs} \partial_r \Gamma_{xt}^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') e'_t}_{k^2 \Gamma_{kt}^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') e'_t + \delta_{kt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e'_t} = \int_{\bar{S}} dS' \dots = 0.$$

Die gerade gezeigten Ersetzungen benutzen die rotrot-Gleichung (24.25) der Greenschen Tensoren. Die zwei dabei entstehenden Terme proportional zu  $k^2$  heben sich weg; in den zwei verbleibenden Termen können die Integrationen ausgeführt werden. Dabei muss die Ableitung der  $\delta$ -Distribution noch auf den Greenschen Tensor überwältzt werden:

$$\int \int \int_{\bar{V}} d\mathbf{r} \partial_j \left( \Gamma_{k\ell}^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') \varepsilon_{kjt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) = - \int_{\bar{S}} dS' n_j \varepsilon_{jkt} \Gamma_{k\ell}^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$$

$$= \int \int \int_{\bar{V}} d\mathbf{r} \varepsilon_{kjt} \Gamma_{s\ell}^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'') \partial_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int \int \int_{\bar{V}} d\mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varepsilon_{kjt} \partial_j \Gamma_{s\ell}^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'').$$

Das gibt dann folgende Gleichung:

$$e'_t e''_{\ell} \left[ \varepsilon_{\ell jk} \partial_j \Gamma_{kt}^{(2)}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') - \varepsilon_{tjk} \partial_j \Gamma_{k\ell}^{(1)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \right] = 0.$$

Wegen der Willkürlichkeit der beiden Vektoren  $\mathbf{e}'$  und  $\mathbf{e}''$  muss der Ausdruck in der rechteckigen Klammer Null sein; dies ist gerade die Identität (24.32). Das obige Oberflächenintegral ist Null wegen der homogenen Randbedingungen für die beiden Greenschen Tensoren. Dies wird noch etwas ausgeführt:

$$\int_{\bar{S}} dS \mathbf{n} \cdot [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})] =$$

$$= \int_{\bar{S}} dS \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{n}, \mathbf{B}, \nabla \times \mathbf{A}) - (\mathbf{n}, \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{B})]$$

$$= \underbrace{(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A})}_{=0} - \underbrace{(\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}_{=0}$$

$$= \underbrace{(\mathbf{n} \times \Gamma^{(1)}) \cdot \mathbf{e}''}_{=0} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \underbrace{(\mathbf{n} \times (\nabla \times \Gamma^{(2)})) \cdot \mathbf{e}'}_{=0} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}).$$

## 24.5 Quellenmäßige Darstellung der E- und H-Felder durch Greensche Tensoren

Wir betrachten ein Gebiet  $\mathcal{V}$  das von einer Grenzfläche  $\mathcal{S}$  umschlossen wird. Dies kann auch der ganze dreidimensionale Raum sein, der von der unendlich fernen Kugel oder einer anderen unendlich großen geschlossenen Fläche abgeschlossen wird. Innhalb von  $\mathcal{V}$  sind alle Felder und Greenschen Tensoren definiert, es existieren ihre Ableitungen, sodass sie auch die zugehörigen Differentialgleichungen befriedigen. Ist  $\mathcal{S}$  die unendlich ferne Fläche, dann erfüllen die Felder und die Greenschen Tensoren die Austrahlungsbedingung(en). Das Gebiet  $\bar{\mathcal{V}}$  ist ein Teilgebiet von Gebiet  $\mathcal{V}$ , das von der Fläche Gebiet  $\bar{\mathcal{S}}$  eingeschlossen wird. Das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und das magnetische Feld  $\mathbf{H}$  erfüllen die folgenden quellenfreien, also homogenen, Differentialgleichungen:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) - k^2 \mathbf{H} = 0; \quad (24.34)$$

Das Feld innerhalb von  $\mathcal{V}$  soll durch die Tangentialkomponenten an der Oberfläche  $\mathcal{S}$  ausgedrückt werden. Dazu setzen wir im Greenschen Satz (24.33):

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}') = \mathbf{E}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{b}(\mathbf{r}') = \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}$$

mit einem willkürlichen konstanten Vektoren  $\mathbf{e}$  und bekommen nach Einsetzen der Differentialgleichung für den Greenschen Tensor, der obigen Differentialgleichung für das elektrische Feld und der Rotorgleichung für das elektrische Feld und Kürzen den nachfolgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} & - \int_{\bar{\mathcal{V}}} \int \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{e} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} = \\ & = \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int \mathbf{n} \cdot \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}') \times (\nabla' \times \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}) - i\omega\mu \mathbf{H} \times \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e} \right]. \end{aligned}$$

Wegen der Willkürlichkeit des Vektors  $\mathbf{e}$  folgt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) & = -i\omega\mu \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int dS' (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) \cdot \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) - \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int dS' (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot (\nabla' \times \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r})) \\ & = -i\omega\mu \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int dS' \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) - \nabla \times \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int dS' \Gamma^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')). \end{aligned} \quad (24.35)$$

In den obigen Oberflächenintegralen kommen beide Greenschen Tensoren vor. Dies kommt daher, dass die Fläche  $\bar{\mathcal{S}}$  innerhalb von  $\mathcal{S}$  liegt. Auf der letzteren sind den Greenschen Tensoren Randbedingungen vorgeschrieben, aber nicht auf  $\bar{\mathcal{S}}$ ! Jetzt wird eine elektrische und eine magnetische Oberflächenstromdichte definiert:

$$\mathbf{J}_e := -(\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')), \quad \mathbf{J}_m := (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')). \quad (24.36)$$

Wenn das äußere Feld abgeschaltet wird, dafür aber an der Oberfläche  $\bar{\mathcal{S}}$  die eben definierten Oberflächenströme eingeschaltet werden, dann ist in  $\mathcal{V}'$  das gleiche Feld wie vorher; aber ausserhalb ist das Feld Null. Die bisherige Vorgangsweise soll nochmals mittels einer mehr physikalischen Vorgangsweise erläutert werden. In einem Teilgebiet  $\mathcal{V}$  des Raumes existiert ein elektromagnetisches Feld. Da wir oben keine Quellen eingeschlossen haben, müssen diese ausserhalb von  $\mathcal{V}$  liegen. Dieses (real existierende) Feld geht in die obigen Gleichungen ein. In den Oberflächenintegralen stehen die tangentiellen Komponenten sowohl des elektrischen als auch des magnetischen Feldes. Diese vier Feldkomponenten passen zusammen, weil sie von einem bereits vorliegenden realen

elektromagnetischen Feld herrühren. (Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass im allg. bereits zwei der sechs elektromagnetischen Feldkomponenten die anderen bestimmen, also die vollständig willkürliche Vorgabe von vier zu einer Überbestimmung führen könnte.)

Ist  $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ , also gleich der Fläche, auf der den Greenschen Tensoren die Randbedingungen (24.28) bzw. (24.29) auferlegt sind, dann ergibt die obige Darstellung (24.35):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= - \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\bar{\mathcal{S}} (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot (\nabla' \times \mathbf{\Gamma}^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r})) = \\ &= -\nabla \times \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) = -\nabla \times \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (24.37)$$

Der erste Term von (24.35) ist Null wegen der Randbedingung  $\mathbf{n} \times \mathbf{\Gamma}^{(1)} = 0$ . Das Spatprodukt des Integranden kann leicht so umgeformt werden, dass es diesen Term enthält. Die gerade angeschriebene Darstellung enthält nur mehr die tangentielle elektrische Feldstärke, also maximal 2 Komponenten. Diese sind daher in hohem Maße frei wählbar.

Da in Gl.(24.35) noch keine Randbedingungen für den Greenschen Tensor vorgeschrieben waren, kann man  $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$  durch  $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$ , und umgekehrt, ersetzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -i\omega\mu \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) - \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot (\nabla' \times \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r})) = \\ &= -i\omega\mu \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) - \nabla \times \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' \mathbf{\Gamma}^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')). \end{aligned} \quad (24.38)$$

Die Spezialisierung  $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$  ergibt dann:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}). \quad (24.39)$$

Aus Gln.(24.37) und (24.39) folgt also: **Man kann das Feld in  $\mathcal{V}$  erzeugen, indem man auf der Oberfläche  $\mathcal{S}$  entweder das tangentielle elektrische Feld  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$  oder das tangentielle magnetische Feld  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$  vorgibt.**

Die quellenmäßige Darstellung des Magnetfeldes kann durch analoge Berechnungen abgeleitet werden. Das gleiche Resultat ergibt sich einfacher, indem man in den obigen Gleichungen folgende Ersetzungen vornimmt:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \rightarrow -\frac{\varepsilon}{\mu} \mathbf{E}; \quad \mathbf{\Gamma}^{(1)} \rightarrow \mathbf{\Gamma}^{(2)}, \quad \mathbf{\Gamma}^{(2)} \rightarrow \mathbf{\Gamma}^{(1)}. \quad (24.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= i\omega\varepsilon \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) - \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) \cdot (\nabla' \times \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r})) = \\ &= i\omega\varepsilon \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) - \nabla \times \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' \mathbf{\Gamma}^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')). \end{aligned} \quad (24.41)$$

Die Spezialisierung  $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$  ergibt dann:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\omega\varepsilon \int_{\bar{\mathcal{S}}} \int d\mathcal{S}' \mathbf{\Gamma}^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \quad (24.42)$$

Da in Gl.(24.41) noch keine Randbedingungen für den Greenschen Tensor vorgeschrieben waren, kann man  $\Gamma^{(1)}$  durch  $\Gamma^{(2)}$ , und umgekehrt, ersetzen:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= i\omega\varepsilon \int_{\bar{S}} \int dS' (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) - \int_{\bar{S}} \int dS' (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) \cdot (\nabla' \times \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r})) = \\ &= i\omega\varepsilon \int_{\bar{S}} \int dS' \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) - \nabla \times \int_{\bar{S}} \int dS' \Gamma^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')).\end{aligned}\quad (24.43)$$

Die Spezialisierung  $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$  ergibt dann:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= - \int_{\bar{S}} \int dS' (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) \cdot (\nabla' \times \Gamma^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r})) = \\ &= -\nabla \times \int_{\bar{S}} \int dS' \Gamma^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')).\end{aligned}\quad (24.44)$$

Wir betrachten nun Felder, die von einer elektrischen Stromdichte erzeugt werden, der an der Oberfläche eines vollkommenen Leiters fließt. Da diese Stromdichte mit dem tangentiellen Magnetfeld an der Oberfläche durch  $\mathbf{J}_e = -(\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(vr))$  ( $\mathbf{n}'$  weist in das Innere des Leiters) verbunden ist, muss für den umgebenden freien Raum gelten:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu \int_{\bar{S}} \int dS' (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) \cdot \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) = \quad (24.45)$$

$$= -i\omega\mu \int_{\bar{S}} \int dS' \mathbf{J}_e(\mathbf{r}') \cdot \Gamma^0(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) = -i\omega\mu \int_{\bar{S}} \int dS' \Gamma^0(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_e(\mathbf{r}'),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= - \int_{\bar{S}} \int dS' (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}')) \cdot (\nabla' \times \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r})) = \\ &= - \int_{\bar{S}} \int dS' \mathbf{J}_e(\mathbf{r}') \cdot (\nabla' \times \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r})).\end{aligned}\quad (24.46)$$

Diese quellenmäßigen Darstellungen erfüllen aber **nicht** die Randbedingungen  $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$  (oder  $\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$  auf  $\mathcal{S}$ , da  $\Gamma^{(0)}$  der Greensche Tensor des freien Raumes ist.

## 24.6 Der Greensche Tensor des freien Raumes

Wir suchen nun einen analytischen Ausdruck fuer den Greenschen Tensor des freien Raumes. Hier ist  $\Gamma^{(1)} = \Gamma^{(2)} := \Gamma^{(0)}$ ; ein Unterschied ergibt sich erst, wenn Materie vorhanden ist; dann ergeben sich unterschiedliche Randbedingungen und damit unterschiedliche Ausdrücke. Der Differentialoperator von Gl.(24.25) unterscheidet sich vom Vektor Laplaceoperator:

$$\Delta \mathbf{A} := \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{grad div} \mathbf{A} - \text{rot rot} \mathbf{A}. \quad (24.47)$$

Um den Greenschen Tensor der Vektorhelmholtzgleichung

$$\Delta \cdot \Gamma^{(H)} + k^2 \Gamma^{(H)} = -\mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (24.48)$$

zu bekommen, gehen wir mit dem Ansatz

$$\mathbf{\Gamma}^{(H)} := \mathbf{I} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$$

in die obige Gleichung und finden:

$$\mathbf{I} (\Delta G + k^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')) = -\mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Dies ist die Gleichung für die skalare Helmholtzgleichung (Kap.11) multipliziert mit dem Einheitstensor. Die Lösung, die der Ausstrahlungsbedingung genügt, kann von dort übernommen werden (Zeiabhängigkeit  $e^{-i\omega t}$ ):

$$\mathbf{\Gamma}^{(H)} := \mathbf{I} G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \mathbf{I} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Der Greensche Tensor für das elektrische oder magnetische Feld im freien Raumes genügt der Gl.(24.25):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Gamma}^{(0)}) - k^2 \mathbf{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (24.49)$$

und hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= (\mathbf{I} - \frac{1}{k^2} \nabla \nabla') G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \\ &= (\mathbf{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla') G_0 = (\mathbf{I} + \frac{1}{k^2} \nabla' \nabla') G_0 = (\mathbf{I} - \frac{1}{k^2} \nabla \nabla') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (24.50)$$

Diesen Ausdruck findet man, indem man zunächst Gl.(24.49) von vorne skalar mit  $\nabla$  multipliziert; dies gibt:

$$k^2 \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Wegen der Identität (24.47) kann Gl.(24.49) umgeschrieben werden zu:

$$(\Delta + k^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -(\mathbf{I} - \frac{1}{k^2} \nabla \nabla') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Mittels des Ansatzes (24.50) ergeben sich dann für  $G_0$  aus den beiden letzten Gleichungen folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ (\nabla + \nabla') G_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte Bedingung ist erfüllt, wenn  $g(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$  eine Funktion von  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  ist. Die Lösung der skalaren Helmholtzgleichung erfüllt beide.

## 24.7 Die Greenschen Tensoren des Halbraumes

Greenschen Tensoren, die längs einer ideal leitenden Berandung die Randbedingung  $\mathbf{E}_{tang} = 0$  erfüllen, wurden im vorvorigen Paragraphen eingeführt und verwendet, ohne dass die Gestalt der Berandung spezifiziert wurde. Hier wird nun der Halbraum  $z > 0$  betrachtet, der von einer leitenden Ebene bei  $z = 0$  begrenzt wird. Die beiden Greenschen Tensoren sind also Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (24.25) im Halbraum

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Gamma}_+^{(\alpha)}) - k^2 \mathbf{\Gamma}_+^{(\alpha)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad z \geq 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (24.51)$$

und erfüllen folgende Randbedingung auf der metallischen Berandung:

$$z = 0 : \quad \mathbf{n} \times \mathbf{\Gamma}_+^{(1)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = 0. \quad (24.52)$$

$$z = 0 : \quad \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{\Gamma}_+^{(2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}')) = 0. \quad (24.53)$$

Beide Tensoren können aus dem des freien Raumes,  $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$ , durch Spiegelung abgeleitet werden. Es ist zweckmäßig sich vorzustellen, dass das zu  $\mathbf{\Gamma}^{(1)}$  gehörige elektrische Feld gemäß Gln.(24.13) und (24.26) von einem infinitesimalen elektrischen Dipol  $\mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , der sich im Punkt  $\mathbf{r}'$  befindet, erzeugt wird; dementsprechend das magnetische Feld, das durch gemäß Gln.(24.14) und (24.27) durch  $\mathbf{\Gamma}^{(2)}$  aufgebaut wird, von einem infinitesimalen magnetischen Dipol,  $\mathbf{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  erzeugt wird:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Gamma}_+^{(1)} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}'), \quad (24.54)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Gamma}_+^{(2)} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}'). \quad (24.55)$$

Im Halbraum  $z \geq 0$  wird das Feld, das auch die jeweilige Randbedingung befriedigt, gebildet, indem man den primären Dipol an der leitenden Ebene spiegelt;

$$\mathbf{p} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \rightarrow \mathbf{p}' \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z + z'). \quad (24.56)$$

$$\mathbf{m} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \rightarrow \mathbf{m}' \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z + z'). \quad (24.57)$$

Die Spiegelung des Quellpunktes läßt sich auch so darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}') + (\mathbf{r}' - \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}')) \\ \rightarrow \mathbf{r}'' &= -\mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}' - 2\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}' = (\mathbf{I} - 2\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (24.58)$$

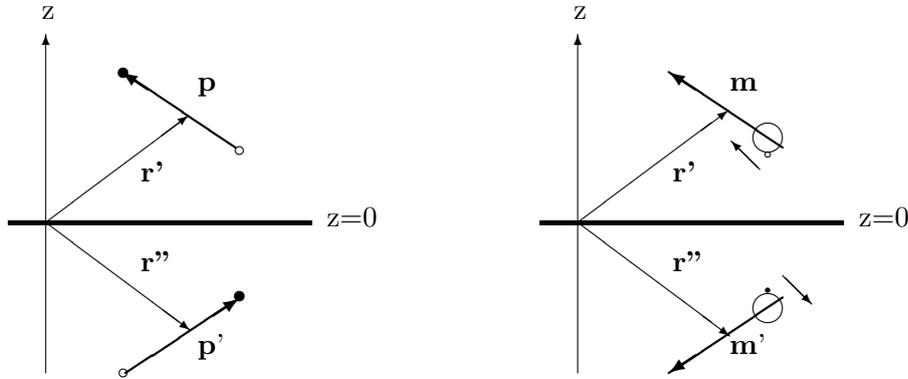


Abbildung 24.1: Spiegelung eines elektrischen  $\mathbf{p}$  (linkes Bild) und eines magnetischen  $\mathbf{m}$  (rechtes Bild) Dipols an einer unendlich gut leitenden Ebene in  $z = 0$ . Bei der Spiegelung ändert jeder Dipol nicht nur seine Position in der Art wie oben gezeichnet und analytisch in Gln. (24.58) angegeben ist, sondern auch seine Richtung. Die Richtungsänderung ergibt sich aus dem physikalischen Charakter jedes dieser Dipole. Der elektrische Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen. Jede ändert bei der Spiegelung ihr Vorzeichen. Der magnetische Dipol wird von einer Ladung erzeugt, die auf einem kleinen Kreis umläuft. Dessen Normalenvektor wird gepiegelt, ebenso das Vorzeichen der Ladung und der Umlaufsinn.

Bei der Spiegelung ändert jeder Dipol nicht nur seine Position in der Art wie sie in den vorhergehenden Gleichungen angegeben ist, sondern auch seine Richtung (s. Abb.24.1).

Felder, die im Halbraum den durch (24.54) und (24.55) dargestellten gleichwertig sind, sind dann gegeben durch:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}_e(\mathbf{r}') - \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \cdot (I - 2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{p}_e(\mathbf{r}'') \quad (24.59)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}_m(\mathbf{r}') + \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \cdot (I - 2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{p}_m(\mathbf{r}'') \quad (24.60)$$

Damit bekommt man für die beiden Tensoren des elektromagnetischen Feldes im Halbraum  $z \geq 0$ , die den Randbedingungen ( 24.52 ) bzw. ( 24.53 ) genügen, die folgenden Darstellungen:

$$\Gamma_+^{(1,2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \mp \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' - 2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}') \cdot (I - 2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z). \quad (24.61)$$

### 24.7.1 Das Feld im Halbraum als Funktional des Randfeldes

Der zuvor abgeleitete Greensche Tensor wird nun benutzt, um das Feld im Halbraum  $z > 0$  zu berechnen, das von einem tangentiellen Feld erzeugt wird, das in der Ebene  $z = 0$  vorgegeben ist. Die Quellpunktskoordinate in dieser Ebene ist  $\mathbf{r}^*$ , der Normalenvektor ist  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{r}^* = (x, y, 0); \quad \mathbf{n} = -\mathbf{e}_z. \quad (24.62)$$

Die beiden Greenschen Tensoren werden mit dem tangentiellen elektrischen Feld  $\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}$  überschoben.

$$\begin{aligned} \Gamma_+^{(1,2)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) &= \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \mp \\ &\mp \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' - 2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}') \cdot [(\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) - 2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\mathbf{r}'))] \end{aligned}$$

Der zweite Term in der rechteckigen Klammer ist Null, weil er ein Spatprodukt enthält, in dem zweimal der Vektor  $\mathbf{e}_z$  auftritt. Das Produkt  $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}^*$  ist immer Null. Daher ergeben sich aus der vorhergehenden Gleichung folgende Resultate:

$$\Gamma_+^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\mathbf{r}^*)) = 0; \quad (24.63)$$

$$\Gamma_+^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\mathbf{r}^*)) = 2 \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\mathbf{r}^*)). \quad (24.64)$$

Diese Formeln gelten auch, wenn man  $\mathbf{E}$  durch  $\mathbf{H}$  ersetzt. Damit ergeben sich aus den Formeln (35), (39), (36) und (41) folgende Darstellungen:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \times 2 \int_{\bar{S}} \int dS' \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\mathbf{r}^*)), \quad (24.65)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -2i\omega\epsilon \int_{\bar{S}} \int dS' \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}(\mathbf{r}^*)), \quad (24.66)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2i\omega\mu \int_{\bar{S}} \int dS' \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}(\mathbf{r}^*)), \quad (24.67)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times 2 \int_{\bar{S}} \int dS' \Gamma^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}(\mathbf{r}^*)). \quad (24.68)$$

## 24.8 Eigenfunktionsentwicklung des Greenschen Tensors des elektromagnetischen Feldes im freien Raum

Die Vorgangsweise ist analog zu der im Kap.22, führt aber zu einem anderen Resultat, Wir gehen wieder von der Vollständigkeitsrelation (22.9) der normierten Vektorfelder  $\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{N}}$  (22.8) aus:

$$I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \left[ \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') + \hat{\mathbf{M}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{M}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') + \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \right]. \quad (24.69)$$

Dementsprechend ist der Ansatz für den Greenschen Tensor:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &:= \int \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \times \\ &\times \left[ g^{(L)}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') + g^{(M)}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{M}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{M}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') + g^{(N)}(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \right]. \end{aligned}$$

Diese Felder werden mit ebenen Wellen gebildet:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) := \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \quad (24.70)$$

Beide Ansätze werden in die folgende Differentialgleichung

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Gamma}^{(0)}) - \kappa^2 \mathbf{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (24.71)$$

für den Greenschen Tensor (vgl. Gl.(23.25)) eingesetzt. Der Differentialoperator übt folgende Wirkung auf die Vektorfelder aus:

$$\nabla \times (\nabla \times \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})) = 0, \quad \nabla \times (\nabla \times \hat{\mathbf{M}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})) = k^2 \hat{\mathbf{M}}_{\mathbf{k}}, \quad \nabla \times (\nabla \times \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})) = k^2 \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}. \quad (24.72)$$

Damit ergeben sich folgende Gleichungen für die Amplitudenfunktionen  $g^{(\alpha)}(\mathbf{k})$ :

$$-\kappa^2 g^{(L)}(\mathbf{k}) = 1; \quad (k^2 - \kappa^2) g^{(M)}(\mathbf{k}) = 1; \quad (k^2 - \kappa^2) g^{(N)}(\mathbf{k}) = 1. \quad (24.73)$$

Die Eigenfunktionsentwicklung des Greenschen Tensors der Gl.(24.71) im freien Raum, die im Unendlichen der Ausstrahlungsbedingung genügt, lautet also:

$$\mathbf{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') := \int \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \left[ \frac{\hat{\mathbf{M}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{M}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') + \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')}{(k^2 - \kappa^2)} - \frac{\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')}{\kappa^2} \right]. \quad (24.74)$$

In quellenfreien Gebieten muss es möglich sein, das Feld nur durch die solenoidalen Felder  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  auszudrücken. Wir addieren die Vollständigkeitsrelation (24.69) dividiert durch  $\kappa^2$  zum vorhergehenden Ausdruck, um die Quellenfelder  $\mathbf{L}$  zu eliminieren.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \int \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \frac{k^2}{(k^2 - \kappa^2) \kappa^2} \left[ \hat{\mathbf{M}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{M}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') + \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \right] \\ &\quad - \frac{1}{\kappa^2} I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (24.75)$$

Diese Darstellung enthält nur die solenoidalen Felder  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{N}$  und einen Quellterm, der ausschließlich im Quellbereich, also an  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , von Null verschieden ist. Im quellenfreien Bereich wird also das Feld durch die solenoidalen Felder allein repräsentiert.

## References

- [1] H. Levine, J. Schwinger: On the theory of electromagnetic wave diffraction by an aperture in an infinite plane conducting screen. *Comm. Pure and Appl.Math.* **3** 355 (1950)
- [2] N. Marcuvitz: Field representations in spherically stratified regions. *Comm. Pure and Appl.Math.* **4** 263 (1951)
- [3] R.E. Collin: *Field theory of guided Waves.*(IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory. 2nd ed., 1990.
- [4] L.B.Felsen, N.Marcuvitz: *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973 or Institute of Electrical and Electronics Engineers, Ieee/Oup Series on Electronic Wave Theory, 1996.
- [5] Chen-to Tai: *Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory*, Intext Educational Publishers, 1971. 2 nd ed..

The first edition of [3] and [5] contains a grave error !