

Kapitel 26

Ergänzungen zu speziellen Funktionen: Besselfunktionen

In diesem Kapitel werden Gegenstände behandelt, die eine Weiterführung der Vorlesung "Spezielle Funktionen" beinhalten. Insbesondere werden die Eigenschaften der Besselfunktionen ausführlich behandelt und in Kürze die Eigenschaften der Besselfunktionen zusammengefasst, die in dieser Vorlesung benötigt werden. Diese finden sich auch im Buch von Abramowitz und Stegun [26.1] bzw. in der überarbeiteten Neuauflage [26.2]; die ausführlichste Abhandlung über Besselfunktionen ist das Buch von Watson [26.3]. Eine erste Einführung in die Theorie der Besselfunktionen gibt Sommerfeld [26.4].

26.1 Die Besselsche Differentialgleichung

Die Separation der Helmholtzgleichung in ebenen Polarkoordinaten ergibt die folgende Differentialgleichung für den Radialanteil der Wellenfunktion (s. Gl.(6.84)):

$$\frac{d^2 Z_\mu(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dZ_\mu(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) Z_\mu(x) = 0. \quad (26.1)$$

x heißt das Argument, μ die Ordnung (oder der Index) der Bessel- oder Zylinderfunktion $Z_\mu(x)$. Im allgemeinsten Fall können beide komplex sein. In den meisten Anwendungen, insbesondere in dieser LV, ist μ reell, meist sogar ganzzahlig, $\mu = m$. Ebenso ist x reell und positiv, meist $x = kr$; für die volle Einsicht in das Verhalten der Besselfunktionen ist es zweckmässig auch komplexe Zahlen für x zu nehmen. Dann hat die obige Differentialgleichung eine Stelle der Bestimmtheit an $x = 0$, eine wesentliche Singularität an $x = \infty$. Das impliziert: Die Lösungen haben an der Stelle $x = 0$ nur Pole oder Verzweigungspunkte. An der Stelle $x = \infty$ haben alle Lösungen eine wesentliche Singularität. Die Lösungen haben keine Singularitäten für andere Werte von z .

26.2 Die Besselschen Funktionen als Lösungen

Geht man mit einem verallgemeinerten Potenzreihenansatz $x^\alpha \sum_n a_n x^n$ in die Differentialgleichung (26.1), ergibt sich folgende ganze Funktion als Lösung:

$$J_\mu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\mu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (26.2)$$

Diese Lösung heißt Besselfunktion im engeren Sinne; sie hat an der Stelle $z = 0$ eine Nullstelle der Ordnung m , wenn $\mu = m$ ganzzahlig ist. In diesem Fall sind $J_m(x)$ und $J_{-m}(x)$ linear

abhängig, eine zweite unabhängige Lösung ist dann die Neumannfunktion $Y_m(x)$. Für ungerades μ sind $J_\mu(x)$ und $J_{-\mu}(x)$ linear unabhängig, die beiden Funktionen stellen dann ein vollständiges Lösungssystem dar. Beide haben an $z = 0$ einen Verzweigungspunkt; die eine verschwindet dort, die andere ist singular. Abb.26.1 zeigt die Besselfunktionen als Funktionen von x und μ .

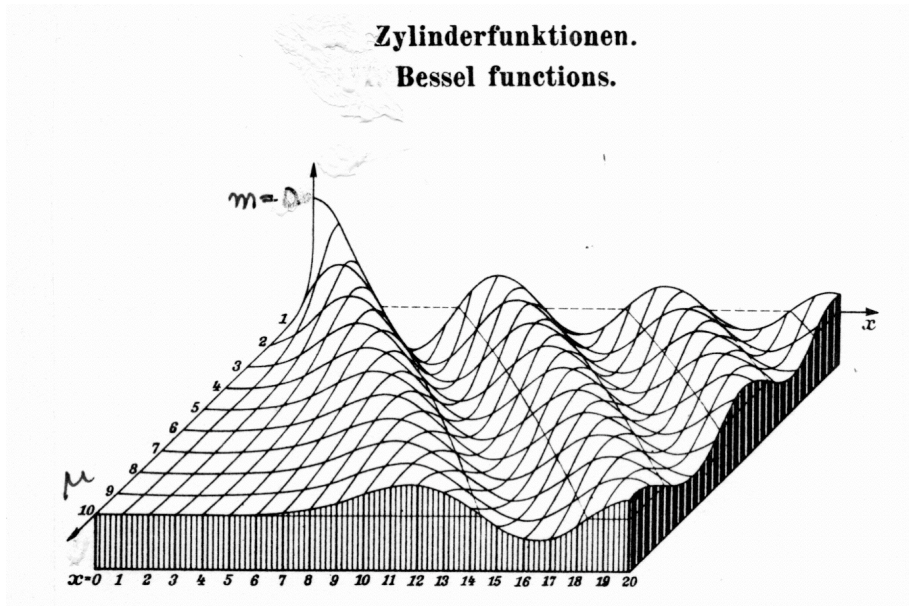


Abbildung 26.1: Die Besselfunktionen $J_\mu(x)$. Aus: E. Jahnke, F.Emde: Tables of functions. Dover 1945

Die Neumannfunktion ist auch für alle Ordnungen μ definiert. Sie wird hier nur für ganzzahlige, also $\mu = m$, angegeben:

$$Y_m(x) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2} J_m(x) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(k+1) + \psi(m+k+1)] \frac{1}{k! (m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (26.3)$$

$\psi(n)$ ist die Psi- oder Digammafunktion, die logarithmische Ableitung der Γ -funktion:

$$\psi(z) := \frac{d}{dz} \ln(\Gamma(z)) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (26.4)$$

Die Neumannfunktion hat für $m = 1, 2, 3, \dots$ an $z = 0$ einen Pol m -ter Ordnung und einen logarithmischen Verzweigungspunkt; für $m = 0$ nur einen logarithmischen Verzweigungspunkt.

In *Mathematica* berechnet man die Bessel- und Nfunktionen mittels der folgenden Befehle:

$$J_\mu(x) \hat{=} \text{BesselJ}[\mu, x], \quad Y_\mu(x) \hat{=} \text{BesselY}[\mu, x],$$

Die unten definierten Hankelfunktionen muss man sich aus den obigen beiden selbst zusammensetzen.

Für reelle Argumente haben $J_\mu(x)$ und $Y_\mu(x)$ oszillierenden Charakter, s.Abb.26.2. Sie besitzen unendlich viele Nullstellen. Die von $J_\mu(x)$ heißen $j_{\mu, n}$, $n = 1, 2, \dots$; sie werden in ansteigender Größe numeriert. Sie können in *Mathematica* bis zur Version 6 mittels des folgenden Packages berechnet werden: `NumericalMath`BesselZeros``.

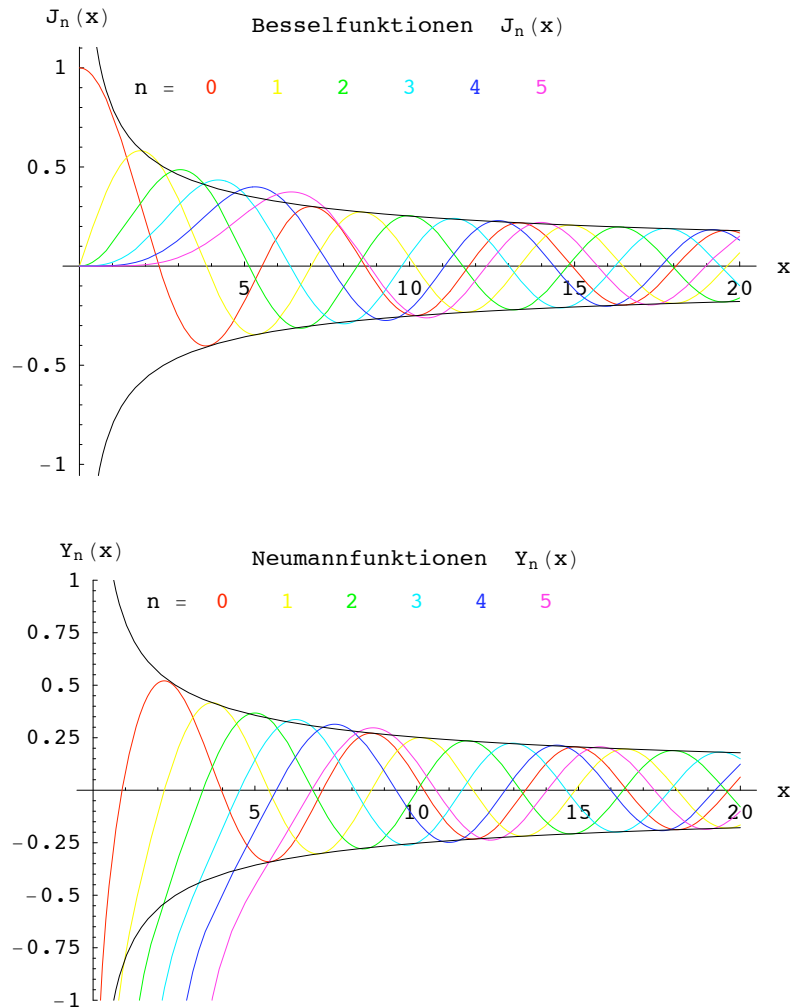


Abbildung 26.2: Die Besselfunktionen $J_n(x)$ und die Neumannfunktionen $Y_n(x)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Die schwarzen Einhüllenden zeigen den asymptotischen Faktor $\sqrt{2/\pi x}$.

Die Hankelfunktionen erster und zweiter Art werden aus den beiden vorhergehenden Funktionen definiert:

$$H_\mu^{(1,2)}(x) := J_\mu(x) \pm i Y_\mu(x). \quad (26.5)$$

Sie werden zur Darstellung auslaufender Zylinderwellen bei imaginärer Zeitabhängigkeit $e^{\mp i\omega t}$ benötigt.

Für ganzzahlige Ordnung sind alle Zylinderfunktionen mit negativem Index $-m$ proportional der entsprechenden mit gleichem positiven m :

$$Z_{-m}(x) = (-1)^m Z_m(x), \quad Z_m \in \{J_m, Y_m, H_m^{(1,2)}\}; \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (26.6)$$

Für unganze Ordnung μ bilden die beiden Besselfunktionen J_μ und $J_{-\mu}$ ein vollständiges Lösungssystem der Besselschen Differentialgleichung. Daher lassen sich alle anderen Lösungen durch diese

beiden ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 Y_\mu &= \frac{\cos(\mu\pi) J_\mu - J_{-\mu}}{\sin(\mu\pi)}, \\
 H_\mu^{(1,2)} &= \frac{e^{\mp i\mu\pi} J_\mu - J_{-\mu}}{\pm i \sin(\mu\pi)}.
 \end{aligned}
 \tag{26.7}$$

In allen Zylinderfunktionen steht das gleiche Argument.

26.3 Das asymptotische Verhalten der Besselfunktionen

Für große Argumente x lassen sich Näherungsformeln für die aufgeführten Zylinderfunktionen angeben:

$$J_\mu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{2}\mu\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg x| < \pi; \tag{26.8}$$

$$Y_\mu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{1}{2}\mu\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg x| < \pi; \tag{26.9}$$

$$H_\mu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{1}{2}\mu\pi - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad -\pi < \arg x < 2\pi; \tag{26.10}$$

$$H_\mu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{1}{2}\mu\pi - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad -2\pi < \arg x < \pi;$$

$$|x| \gg 1 \quad \text{und} \quad |x| \gg \mu.$$

Das asymptotische abklingende Verhalten der Zylinderfunktionen $\sim 1/\sqrt{x}$ ist in Abb.26.2 bereits sichtbar. Diese asymptotischen Formeln gelten nur, wenn das (gegebenfalls komplexe) x der Größe nach die eben angegebenen Ungleichungen erfüllt, und wenn das Argument in dem Bereich liegt, der bei der jeweiligen asymptotischen Formel angegeben ist. Sie gelten nicht, wenn $|x|$ und $|\mu|$ ungefähr gleich groß sind oder $|x| \ll |\mu|$ ist. Die obigen asymptotischen Formeln kann man aus den Integraldarstellungen (s.u.) der Zylinderfunktionen mittels der Sattelpunktmethode ableiten.

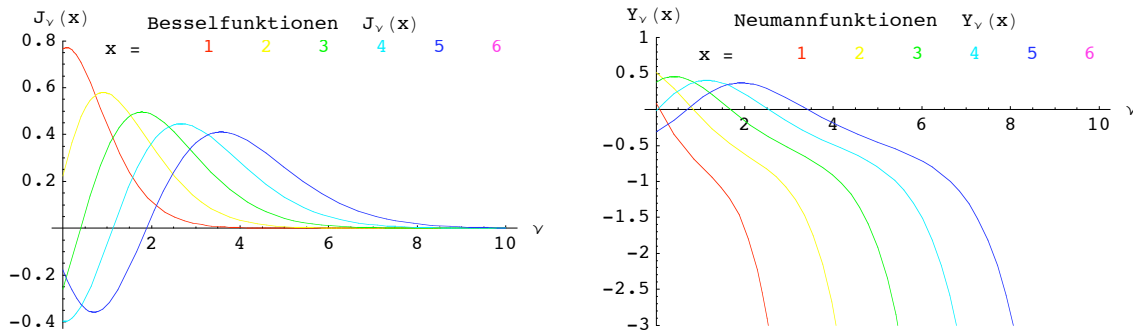


Abbildung 26.3: Exponentieller Abfall der Besselfunktionen $J_\nu(x)$, $x = 1, 2, 3, 4, 5$, exponentielles Anwachsen der Neumannfunktion $Y_\nu(x)$ mit wachsender Ordnung ν .

Das Verhalten der Zylinderfunktionen $J_\nu(x)$ und $Y_\nu(x)$ mit wachsender Ordnung ν bei fixem Argument x , wie in Abb.26.3 gezeigt, kann durch die gerade angeführten asymptotischen Formeln nicht wiedergegeben werden, weil diese nur unter der Voraussetzung $x \gg \nu$ gelten. Im Fall $x \ll \nu$ kann $J_\mu(x)$ mit wachsendem μ sogar abnehmen; dies ist wichtig für die Konvergenz von Reihen, deren Glieder aus Besselfunktionen bestehen.

26.4 Separation der Helmholtzgleichung in Polarkoordinaten

Die Helmholtzgleichung

$$\Delta\psi + k^2 \psi = 0$$

wird in ebenen Polarkoordinaten r, ϕ durch den Ansatz $\psi(r, \phi) = R(r) e^{i\mu\phi}$ separiert, Die resultierende Differentialgleichung für die Radialfunktion läßt sich mittels des Operators

$$L_\mu(k, \rho) := \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\mu^2}{\rho^2} \right). \quad (26.11)$$

folgendermaßen schreiben:

$$L_\mu(k, r) R(r) = \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\mu^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (26.12)$$

$$x := kr, \quad R(r) = Z_\mu(x) \quad (26.13)$$

$$k^2 L_\mu(1, x) Z_\mu(x) = k^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2} \right) \right] Z_\mu(x) = 0, \quad (26.14)$$

26.5 Integraldarstellungen der Besselfunktionen

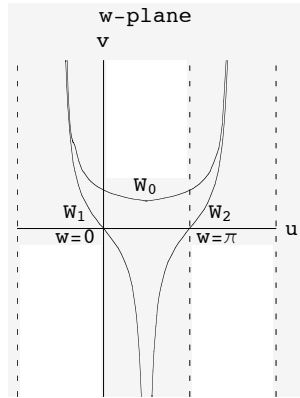


Abbildung 26.4: Integrationswege für die Integraldarstellungen der verschiedenen Zylinderfunktionen: W_0 : Besselfunktion $J_\mu(x)$; $W_{1,2}$: Hankelfunktionen 1, 2. Art $H_\mu^{1,2}(x)$.

Mindestens ebenso wichtig wie die Reihendarstellungen sind die Integraldarstellungen der Besselfunktionen. Die Sommerfeldschen Integraldarstellungen lauten:

$$Z_\mu(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{W_i} e^{ix \cos(w)} e^{i\mu(w-\pi/2)} dw. \quad (26.15)$$

Alle drei eben angegebenen Integrale haben den gleichen Integranden, unterscheiden sich aber im Integrationsweg, s. Abb.26.4. In den Bereichen, in denen die Integrationswege eingezeichnet sind, geht der Integrand gegen Null, wenn die Enden der Integrationswege gegen $\pm i \infty$ streben. Dies ist aus den in Abb.26.5 gezeigten Reliefs zu ersehen.

Neben den Sommerfeldschen Integraldarstellungen gibt es noch weitere, z.B. die von Poisson u.a.

Dass das Integral (26.15) eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung darstellt, beweist man durch partielle Integration; die integrierten Terme sind Null an den Grenzen w_1 und w_2 .

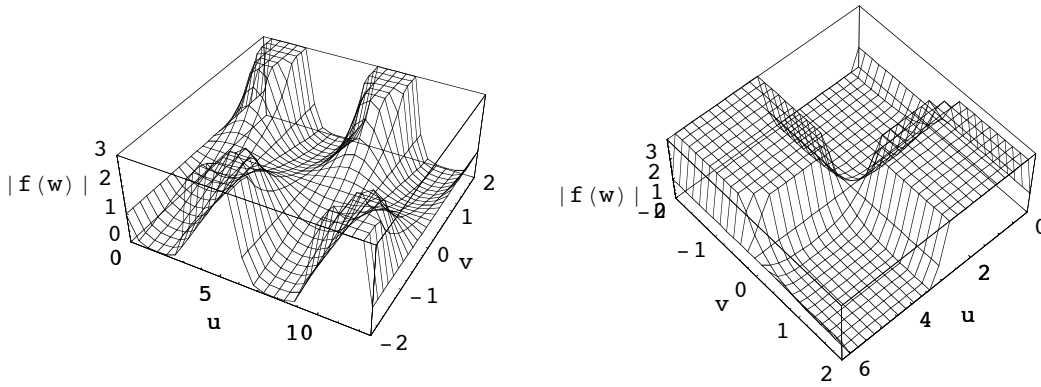


Abbildung 26.5: Relief des Integranden der Sommerfeldschen Integraldarstellung der Zylinderfunktionen der Ordnung $m = 0$ für $x = 1$ (links) und für $x = 10$ (rechts), In letzterem Falle ist der Sattel nur mehr ein schmaler Grat und die Sattelpunktmethode kann gut angewendet werden.

$$\begin{aligned}
L_\mu(1, x) Z_\mu(x) e^{i\mu\pi/2} &= L_\mu(1, x) \int_{w_1}^{w_2} dw e^{ix \cos w} e^{i\mu w} = \\
&= \int_{w_1}^{w_2} dw \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2} \right) \right] e^{ix \cos w} e^{i\mu w} = \\
&= \int_{w_1}^{w_2} dw \left[\underbrace{-\cos^2 w}_{\sin^2 w - 1} + \frac{i}{x} \cos w + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2} \right) \right] e^{ix \cos w} e^{i\mu w} = \\
&= \frac{i}{x} \int_{w_1}^{w_2} dw \underbrace{e^{ix \cos w} (-ix \sin w)}_{u'} \underbrace{e^{i\mu w} \sin w}_v + \int_{w_1}^{w_2} dw \left[\frac{i}{x} \cos w - \frac{\mu^2}{x^2} \right] e^{ix \cos w} e^{i\mu w} = \\
&= \frac{i}{x} \left[\underbrace{e^{ix \cos w}}_u \underbrace{e^{i\mu w} \sin w}_v \right]_{w_1}^{w_2} (= 0) \\
&\quad - \frac{i}{x} \int_{w_1}^{w_2} dw \underbrace{e^{ix \cos w}}_u \underbrace{(\mu \sin w + \cos w)}_{v'} e^{i\mu w} + \int_{w_1}^{w_2} dw e^{ix \cos w} \left(\frac{i}{x} \cos w - \frac{\mu^2}{x^2} \right) = \\
&= \frac{\mu^2}{x^2} \int_{w_1}^{w_2} dw \left[\underbrace{e^{ix \cos w} (-ix \sin w)}_{u'_1} \underbrace{\frac{i}{\mu} e^{i\mu w}}_{v_1} + e^{ix \cos w} e^{i\mu w} \right] = \\
&= \frac{\mu^2}{x^2} \underbrace{\left[e^{i\mu w} \frac{i}{\mu} e^{i\mu w} \right]_{w_1}^{w_2}}_{= 0} - \frac{\mu^2}{x^2} \int_{w_1}^{w_2} dw e^{i\mu w} \underbrace{\left[\frac{i}{\mu} \mu e^{i\mu w} + e^{i\mu w} \right]}_{= 0} = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Mittels der Integraldarstellungen berechnet man unter Benutzung der Sattelpunktmethode die oben aufgelisteten asymptotischen Formeln. Dies wird hier für $x \gg 1$ für die beiden Hankelfunktionen vorgeführt. Bei solchen Werten von x sinkt der Integrand in (26.15) vom Wert $|e^{\pm i x}| = 1$, den er bei den Sattelpunkten auf der Passhöhen

$$\frac{d \cos w}{dw} = -\sin w \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow w = w_{1,2} = 0, \pi$$

annimmt, sehr schnell zu den kleinen Werten im Tal ab. Es sind daher nur kleine Werte von w im $\cos w$, die zum Integral längs des Weges W_1 bzw. W_2 beitragen.

$$W_1: \quad w = s e^{i\gamma}, \quad i \cos w \approx i \left(1 - \frac{1}{2} s^2 e^{i2\gamma} \right) = \frac{1}{2} s^2 \sin 2\gamma + i \left(1 - \frac{1}{2} s^2 \cos 2\gamma \right).$$

Dieser Effekt ist besonders wirksam, wenn der Integrationsweg möglichst schnell ins Tal abfällt. Dies ist am wirksamsten längs der Falllinien des Realteils von $ix \cos w$. Diese ist identisch mit der Niveaulinie des Imaginärteils, also mit

$$1 - \frac{1}{2} s^2 \cos 2\gamma = \text{const.} = 1.$$

Der Wert der Konstante folgt daraus, dass die Kurve mit $s = 0$ durch den Sattelpunkt gehen soll. Auf der Niveaulinie muss $\cos 2\gamma = 0$, also $\gamma = \mp\pi/4$ für $W_{1,2}$ sein. Damit ist also der optimale Integrationsweg W_1 :

$$W_1: \quad w = s e^{i\pi/4}, \quad dw = ds e^{i\pi/4}.$$

In dem langsam veränderlichen Faktor $e^{i\mu(w-\pi/2)}$ wird sofort $s = 0$ gesetzt. Damit ergibt sich für die Integraldarstellung folgender Näherungsausdruck:

$$H_\mu^1(x) \sim \frac{1}{\pi} e^{i[x - (n+1/2)\pi/2]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2} s^2} ds = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i[x - (n+1/2)\pi/2]}. \quad (26.16)$$

Analog geht man für $H_\mu^2(x)$ vor. Daraus ergeben sich gemäß (26.5) die Formeln für $J_\mu(x)$ und $Y_\mu(x)$.

26.5.1 Rekursionsformeln

Die Integraldarstellungen dienen auch zur Berechnung der Rekursionsformeln. Letztere verknüpfen Zylinderfunktionen verschiedener Ordnungen:

$$\frac{2\mu}{x} Z_\mu(x) = Z_{\mu+1}(x) + Z_{\mu-1}(x); \quad (26.17)$$

$$\frac{dZ_\mu(x)}{dx} = \frac{1}{2} (Z_{\mu-1}(x) - Z_{\mu+1}(x)); \quad (26.18)$$

$$= \frac{\mu}{x} Z_\mu(x) - Z_{\mu+1}(x) = Z_{\mu-1}(x) - \frac{\mu}{x} Z_\mu(x); \quad (26.19)$$

$$\frac{dZ_0(x)}{dx} = -Z_1(x). \quad (26.20)$$

Sie gelten für alle vier Typen von Zylinderfunktionen und auch für beliebige Linearkombinationen derselben mit konstanten Koeffizienten; dies gilt auch für die nachfolgenden Relationen. Multipliziert man $dZ_\mu(x)/dx$ und den ersten Teil bzw. zweiten Teil von (26.19) mit x^μ bzw. $x^{-\mu}$ ergibt sich mit einer beliebigen Konstanten α :

$$\frac{d}{dx} (x^\mu Z_\mu(\alpha x)) = \alpha x^\mu Z_{\mu-1}(\alpha x), \quad (26.21)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-\mu} Z_\mu(\alpha x)) = \alpha x^{-\mu} Z_{\mu+1}(\alpha x). \quad (26.22)$$

26.5.2 Unbestimmte Integrale über Besselfunktionen

Unbestimmte Integration der eben angegebenen Formeln bezüglich x gibt:

$$\int x^{\mu+1} Z_{\mu}(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} x^{\mu+1} Z_{\mu+1}(\alpha x), \quad (26.23)$$

$$\int x^{-\mu+1} Z_{\mu}(\alpha x) dx = -\frac{1}{\alpha} x^{-\mu+1} Z_{\mu-1}(\alpha x). \quad (26.24)$$

Eine wichtige Formel ergibt sich aus (der Besseloperator $L_{\mu}(\alpha, x)$ ist in (26.11) definiert) :

$$\begin{aligned} & \bar{Z}_{\nu}(\beta x) x L_{\mu}(\alpha, x) Z_{\mu}(\alpha x) - Z_{\mu}(\alpha x) x L_{\nu}(\beta, x) \bar{Z}_{\nu}(\beta x) = \\ &= \frac{d}{dx} \left[\bar{Z}_{\nu}(\beta x) x \frac{d}{dx} Z_{\mu}(\alpha x) - Z_{\mu}(\alpha x) x \frac{d}{dx} \bar{Z}_{\nu}(\beta x) \right] = \\ &= (\alpha^2 - \beta^2) x Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\nu}(\beta x) - \frac{\mu^2 - \nu^2}{x} Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\nu}(\beta x). \end{aligned}$$

Integration der beiden letzten Zeilen gibt:

$$\int \left[(\alpha^2 - \beta^2) x - \frac{\mu^2 - \nu^2}{x} \right] Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\nu}(\beta x) dx = \quad (26.25)$$

$$= \beta x Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}'_{\nu}(\beta x) - \alpha x Z'_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\nu}(\beta x), \quad (26.26)$$

$$= \alpha x Z_{\mu+1}(\alpha x) \bar{Z}_{\nu}(\beta x) - \beta x Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\nu+1}(\beta x) + (\nu - \mu) Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\nu}(\beta x), \quad (26.27)$$

$$= -\alpha x Z_{\mu-1}(\alpha x) \bar{Z}_{\nu}(\beta x) + \beta x Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\nu-1}(\beta x) - (\nu - \mu) Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\nu}(\beta x). \quad (26.28)$$

Die zwei letzten Zeilen ergeben sich aus der zweiten durch Benützung von Formeln (26.17) bis (26.19).

Man setzt nun $\mu = \nu$ und dividiert durch $(\alpha^2 - \beta^2)$. Das gibt:

$$\int Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\mu}(\beta x) x dx = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\beta x Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}'_{\mu}(\beta x) - \alpha x Z'_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\mu}(\beta x) \right]. \quad (26.29)$$

Man macht den Grenzübergang $\alpha \rightarrow \beta$ und wendet auf der rechten Seite die Regel von de l'Hospital an, sowie wieder die Formeln (26.17) bis (26.19). Damit erhält man :

$$\begin{aligned} & \int Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\mu}(\alpha x) x dx = \quad (26.30) \\ &= \frac{x^2}{4} \left[2 Z_{\mu}(\alpha x) \bar{Z}_{\mu}(\alpha x) - Z_{\mu-1}(\alpha x) \bar{Z}_{\mu+1}(\alpha x) - Z_{\mu+1}(\alpha x) \bar{Z}_{\mu-1}(\alpha x) \right]. \end{aligned}$$

Sind die beiden Besselfunktionen gleich, $Z_{\mu}(\alpha x) = \bar{Z}_{\mu}(\alpha x)$, dann wird weiter:

$$\int Z_{\mu}(\alpha x)^2 x dx = \frac{x^2}{2} \left[Z_{\mu}(\alpha x)^2 - Z_{\mu+1}(\alpha x) Z_{\mu-1}(\alpha x) \right] \quad (26.31)$$

$$= \frac{x^2}{2} \left[\left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha^2 x^2} \right) Z_{\mu}(\alpha x)^2 + Z'_{\mu}(\alpha x)^2 \right]. \quad (26.32)$$

Obige Integralrelationen werden herangezogen zur Auswertung von Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen, wie diese z.B. bei der Aufstellung von Vollständigkeitsrelationen benötigt

werden. S. die Gleichungen zwischen (10.29) und (10.30). Z.B. betrachtet man die Helmholtzgleichung in einem Kreisbereich $0 \leq r \leq a$ oder einem Kreissektor (Öffnungswinkel α). Dann sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen bei Dirichletscher Randbedingung:

$$k_{\mu,n} = j_{\mu,n}/a, \quad \psi_{\mu,n} = N_{\mu,n} J_{\mu}(j_{\mu,n}(r/a)).$$

Setzt man in (26.29) $Z_{\mu}(\alpha x) = J_{\mu}(r/a)$, $\bar{Z}_{\mu}(\beta x) = J_{\mu}(j_{\mu,i}(r/a))$ ergibt sich die Orthogonalität; aus (26.32) die Normierungsrelation.

26.5.3 Wronskische Determinanten

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{\mu}(x) x L_{\mu}(1, x) Z_{\mu}(x) - Z_{\mu}(x) x L_{\mu}(1, x) \bar{Z}_{\mu}(x) &= 0 = \\ x \bar{Z}_{\mu} Z_{\mu}'' - x Z_{\mu} \bar{Z}_{\mu}'' + \bar{Z}_{\mu} Z_{\mu}' - Z_{\mu} \bar{Z}_{\mu}' &= \frac{d}{dx} \left[x \left(\bar{Z}_{\mu} Z_{\mu}' - Z_{\mu} \bar{Z}_{\mu}' \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\bar{Z}_{\mu}' Z_{\mu} - \bar{Z}_{\mu} Z_{\mu}' = \bar{Z}_{\mu-1} Z_{\mu} - \bar{Z}_{\mu} Z_{\mu-1} = \bar{Z}_{\mu} Z_{\mu+1} - \bar{Z}_{\mu+1} Z_{\mu} = \frac{C}{x}. \quad (26.33)$$

Das Argument aller dieser Zylinderfunktionen ist x . Zur Elimination der Ableitungen wurden wieder die Formeln (26.17) bis (26.19) herangezogen. Der Wert der Konstanten hängt von der Wahl der spezifischen Funktionen ab. Er kann mittels der asymptotischen Formeln bestimmt werden. So erhält man:

$$Y_{\mu}' J_{\mu} - Y_{\mu} J_{\mu}' = Y_{\mu-1} J_{\mu} - Y_{\mu} J_{\mu-1} = Y_{\mu} J_{\mu+1} - Y_{\mu+1} J_{\mu} = \frac{2}{\pi x}, \quad (26.34)$$

$$J_{\mu}' H_{\mu}^{(1)} - J_{\mu} H_{\mu}^{(1)'} = J_{\mu-1} H_{\mu}^{(1)} - J_{\mu} H_{\mu-1}^{(1)} = J_{\mu} H_{\mu+1}^{(1)} - J_{\mu+1} H_{\mu}^{(1)} = \frac{2}{\pi i x}, \quad (26.35)$$

$$H_{\mu}^{(2)'} J_{\mu} - H_{\mu}^{(2)} J_{\mu}' = H_{\mu-1}^{(2)} J_{\mu} - H_{\mu}^{(2)} J_{\mu-1} = H_{\mu}^{(2)} J_{\mu+1} - H_{\mu+1}^{(2)} J_{\mu} = \frac{2}{\pi i x}, \quad (26.36)$$

$$H_{\mu}^{(1)'} H_{\mu}^{(2)} - H_{\mu}^{(1)} H_{\mu}^{(2)'} = H_{\mu-1}^{(1)} H_{\mu}^{(2)} - H_{\mu}^{(1)} H_{\mu-1}^{(2)} = H_{\mu}^{(1)} H_{\mu+1}^{(2)} - H_{\mu+1}^{(1)} H_{\mu}^{(2)} = \frac{4i}{\pi x}. \quad (26.37)$$

In den obigen Relationen ist das Argument aller Zylinderfunktionen gleich x .

26.5.4 Umlaufsrelationen

Für unganze Ordnung μ hat die Besselfunktion $J_{\mu}(z)$ wegen des Vorfaktors $(z/2)^{\mu}$ in der Reihendarstellung (26.2) an der Stelle z einen Verzweigungspunkt. Eine gleichartige Verzweigung haben damit auch die Neumannfunktion $Y_{\mu}(z)$ und die beiden Hankelfunktionen. Für ganzzahlige Ordnung m haben die Neumannfunktion $Y_m(z)$ und die beiden Hankelfunktionen logarithmische Verzweigungspunkte an $z = 0$. Wenn man eine analytische Fortsetzung dieser Funktionen durchführt, indem man von einem reellen Punkt $x > 0$ ausgehend das Argument z auf einem Kreis vom Radius $|z| = x$ um den Ursprung wieder zum Ausgangspunkt laufen läßt, dann bekommen diese mehrdeutigen Funktion dort einen anderen Wert. Dieser läßt sich durch die Ausgangswerten der Zylinderfunktionen ausdrücken. Diese Relationen heissen **Umlaufsrelationen**. Natürlich ist es nicht nötig, dass diese Fortsetzung auf einem Kreis erfolgt. Es kann auch eine beliebige andere

Kurve sein, die um den Verzweigungspunkt, also den Ursprung, herumläuft. Wesentlich ist nur, dass die Phase des Arguments z um $\pm 2\pi$ zu- bzw. abnimmt. Der geschilderte Sachverhalt ergibt sich bereits, wenn man nur von der positiven zur negativen reellen Halbachse fortsetzt, bzw. allgemeiner die Phase sich um $\pm\pi$ ändert; das gibt dann die **Halbumlaufsrelationen**.

Wir betrachten ganz allgemein einen Zuwachs des Arguments um $e^{in\pi}$ mit ganzzahligem n , also einen halben Umlauf. Aus Gl.(26.2) ersieht man, dass $J_\mu(z)/z^\mu$ eine ganze eindeutige Funktion ist. Damit ergibt sich sofort für beliebige Ordnung μ , bzw. für ganzzahliges m :

$$J_\mu(e^{in\pi} z) = e^{in\mu\pi} J_\mu(z), \quad J_m(e^{in\pi} z) = (-1)^{nm} J_m(z). \quad (26.38)$$

In den Gleichungen (26.7) werden alle drei anderen Zylinderfunktionen durch die Besselfunktionen ausgedrückt. Damit gewinnt man die Umlaufsrelationen für diese anderen aus der obigen:

$$Y_\mu(e^{in\pi} z) = e^{-in\mu\pi} Y_\mu(z) + 2i \sin(\mu n\pi) \cot(\mu\pi) J_\mu(z); \quad (26.39)$$

$$H_\mu^{(1)}(e^{in\pi} z) = \frac{i}{\sin(\mu\pi)} \left[e^{i(n-1)\mu\pi} J_\mu(z) - e^{-in\mu\pi} J_{-\mu}(z) \right]; \quad (26.40)$$

$$= -\frac{\sin[(n-1)\mu\pi]}{\sin(\mu\pi)} H_\mu^{(1)}(z) - e^{-i\mu\pi} \frac{\sin(n\mu\pi)}{\sin(\mu\pi)} H_\mu^{(2)}(z); \quad (26.41)$$

$$H_\mu^{(2)}(e^{in\pi} z) = e^{i\mu\pi} \frac{\sin(n\mu\pi)}{\sin(\mu\pi)} H_\mu^{(1)}(z) + \frac{\sin[(n+1)\mu\pi]}{\sin(\mu\pi)} H_\mu^{(2)}(z). \quad (26.42)$$

Für ganzzahlig Ordnung $\mu = m$ wird daraus:

$$Y_m(e^{in\pi} z) = (-1)^{mn} [Y_m(z) + i 2n J_m(z)], \quad (26.43)$$

$$H_m^{(1)}(e^{in\pi} z) = (-1)^{mn} [H_m^{(1)}(z) - 2n J_m(z)], \quad (26.44)$$

$$H_m^{(2)}(e^{in\pi} z) = (-1)^{mn} [H_m^{(2)}(z) + 2n J_m(z)]. \quad (26.45)$$

Die hinzutretende Besselfunktion ist eine Folge des logarithmischen Verzweigungspunkts der Neumannfunktion. Insbesondere ergeben sich die Halbumlaufsrelationen:

$$\begin{aligned} H_\mu^{(1)}(e^{i\pi} z) &= -e^{-i\mu\pi} H_\mu^{(2)}(z), & H_m^{(1)}(e^{i\pi} z) &= -(-1)^m H_m^{(2)}(z); \\ H_\mu^{(2)}(e^{-i\pi} z) &= -e^{i\mu\pi} H_\mu^{(1)}(z), & H_m^{(2)}(e^{-i\pi} z) &= -(-1)^m H_m^{(1)}(z). \end{aligned} \quad (26.46)$$

26.6 Modifizierte Besselfunktionen

Die modifizierten Besselfunktionen werden herangezogen, um die Lösungen der zeitfreien Diffusionsgleichung durch reelle Lösungen mit reellen Argumenten darzustellen. Sie sind Besselfunktionen mit rein imaginärem Argument.

26.6.1 Die Differentialgleichung der modifizierten Besselfunktionen

Die zeitfreie Diffusionsgleichung

$$\Delta\psi - \kappa^2 \psi = 0$$

wird in ebenen Polarkoordinaten r, ϕ durch den Ansatz $\psi(r, \phi) = R(r) e^{i\mu\phi}$ separiert, Die resultierende Differentialgleichung für die Radialfunktion läßt sich mittels des Operators

$$L_\mu(i\kappa, \rho) := \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(-\kappa^2 - \frac{\mu^2}{\rho^2} \right). \quad (26.47)$$

folgendermaßen schreiben:

$$L_\mu(i\kappa, r) R(r) = \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(-\kappa^2 - \frac{\mu^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (26.48)$$

$$x := \kappa r = iy, \quad R(r) = C_\mu(x) = Z_\mu(iy) \quad (26.49)$$

$$\kappa^2 L_\mu(i, x) C_\mu(x) = \kappa^2 \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(-1 - \frac{\mu^2}{x^2} \right) \right] C_\mu(x) = 0, \quad (26.50)$$

$$\sim \left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dy} - \left(1 + \frac{\mu^2}{y^2} \right) \right] Z_\mu(iy) = 0. \quad (26.51)$$

Also die Zylinderfunktionen $Z_\mu(iy)$ mit imaginärem Argument erfüllen die selbe Differentialgleichung wie die Radiallösungen $C_\mu(x)$ der zeitfreien Diffusionsgleichung.

26.6.2 Die modifizierten Zylinderfunktionen

Die modifizierten Zylinderfunktionen, das sind die Zylinderfunktionen mit rein imaginärem Argument, werden zweckmäßigerweise so definiert, dass man für reelle Argumente reelle Funktionen erhält. Es werden zwei Funktionen definiert:

$$I_\mu(x) = e^{-i\pi\mu/2} J_\mu(e^{i\pi/2} x), \quad K_\mu(x) = \frac{\pi}{2} i e^{i\pi\mu/2} H_\mu^{(1)}(e^{i\pi/2} x). \quad (26.52)$$

$I_\mu(x)$ und $K_\mu(x)$ sind reell für reelles Argument x und reelle Ordnung μ ; sie sind Lösungen der folgenden Differentialgleichung, die sich von der Besselschen Differentialgleichung um das Vorzeichen der 1 unterscheidet:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - 1 - \frac{\mu^2}{x^2} \right] C_\mu(x) = 0. \quad (26.53)$$

$C_\mu(x)$ repräsentiert jede Linearkombination der beiden modifizierten Besselfunktionen mit konstanten Koeffizienten. $K_\mu(x)$ wird manchmal Macdonald Funktion genannt. Für nicht ganzzahliges μ bilden $I_\mu(x)$ und $I_{-\mu}(x)$ ein vollständiges Lösungssystem; für ganzzahliges m benötigt man $I_m(x)$ und $K_m(x)$. Aus (26.2) und (26.52) ergibt sich die Reihendarstellung der Funktion $I_m(x)$.

$$I_\mu(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\mu + k + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}. \quad (26.54)$$

Man sieht, diese Funktion ist positiv und monoton steigend für positive x . Dies ist auch aus der asymptotischen Formel ersichtlich. Für kleine $|z|$ gelten folgende Formeln:

$$I_\mu(z) \approx \left(\frac{z}{2} \right)^\mu \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)} + O(z^{\mu+1}); \quad (26.55)$$

$$|z| \ll 1: \quad K_\mu(z) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^{-\mu} \Gamma(\mu) + O(z^{-\mu+1}); \quad (26.56)$$

$$K_0(z) \approx -\ln(z/2) + O(1). \quad (26.57)$$

26.6.3 Das asymptotische Verhalten der modifizierten Besselfunktionen

Ihr asymptotisches Verhalten für große x ist:

$$|x| \gg 1, \quad |x| \gg \mu: \quad I_\mu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad |\arg(x)| < \frac{\pi}{2}; \quad K_\mu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad |\arg(x)| < \frac{3\pi}{2}. \quad (26.58)$$

Die eben aufgezählten Eigenschaften ersieht man auch aus den Graphen der Funktionen in Abb.26.6.

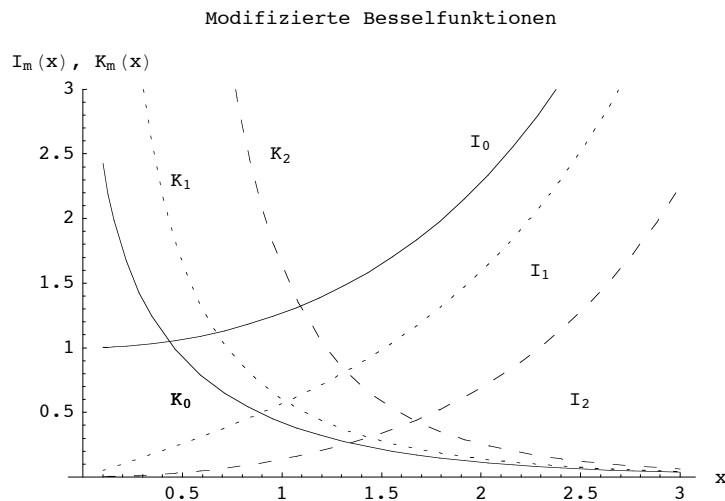


Abbildung 26.6: Die modifizierten Besselfunktionen $I_0(x)$, $I_1(x)$, $I_2(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$.

26.6.4 Die Integraldarstellung der Funktion $K_\mu(x)$.

Die modifizierte Besselfunktion $K_\mu(z)$ wird durch folgendes Integral dargestellt:

$$K_\mu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-z \cosh t + \mu t}, \quad \Re(z) > 0. \quad (26.59)$$

Aus dieser Integraldarstellung (26.59) wird auch die asymptotische Formel (26.58) von $K_0(z)$ für große z abgeleitet. Der Integrand hat sein Maximum an $t = 0$. Für große $|z|$ klingt er sehr schnell ab, d.h. nur eine kleine Umgebung von $t = 0$ trägt wesentlich zum Integral bei. Für diese kleinen Werte von t reichen die ersten zwei Terme der Taylorreihe des $\cosh t$, d.h.:

$$\cosh t \approx 1 + \frac{t^2}{2} + \dots$$

Das so genäherte Integral gibt mit der Substitution $u := t\sqrt{\frac{z}{2}}$:

$$K_0(z) \approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-z [1+t^2/2]} = \frac{e^{-z}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-z t^2/2} = \frac{e^{-z}}{2} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{z}} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2}}_{= \sqrt{\pi}}$$

$$K_\mu(z) \approx e^{-z} \sqrt{\frac{\pi}{2z}}, \quad |z| \gg \mu, \quad \arg(z) < \pi/2. \quad (26.60)$$

Diese Formel gilt auch für $K_\mu(x)$ für reelles μ . Denn dann steht im obigen vorletzten Integranden $e^{-z t^2/2 + \mu t}$ statt $e^{-z t^2/2}$. Der zweite Term kann durch eine Translation in der Integrationsvariablen entfernt werden, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert.

Die entsprechende asymptotische Formel für $I_\mu(z)$ lautet:

$$I_\mu(z) \approx e^z \sqrt{\frac{1}{2\pi z}}, \quad |z| \gg \mu, \quad \arg(z) < \pi/2.$$

26.6.5 Rekursionsformeln für Ableitungen

Wegen einer unglückliche Definition der MacDonalfunktion K_μ haben I_μ und K_μ unterschiedliche Rekursionsrelationen:

$$\frac{2\mu}{z} I_\mu(z) = I_{\mu-1}(z) - I_{\mu+1}(z), \quad \frac{2\mu}{z} K_\mu(z) = K_{\mu+1}(z) - K_{\mu-1}(z); \quad (26.61)$$

$$I'_\mu(z) = \frac{1}{2} (I_{\mu+1}(z) + I_{\mu-1}(z)), \quad K'_\mu(z) = -\frac{1}{2} (K_{\mu+1}(z) + K_{\mu-1}(z)) \quad (26.62)$$

$$= I_{\mu+1}(z) + \frac{\mu}{z} I_\mu(z) \quad = -K_{\mu+1}(z) + \frac{\mu}{z} K_\mu(z) \quad (26.63)$$

$$= I_{\mu-1}(z) - \frac{\mu}{z} I_\mu(z) \quad = -K_{\mu-1}(z) - \frac{\mu}{z} K_\mu(z) \quad (26.64)$$

Wir benötigen auch die folgenden Ableitung:

$$\frac{d}{dz} [z^{-\mu} K_\mu(\beta z)] = -\beta z^{-\mu} K_{\mu+1}(\beta z), \quad \frac{d}{dz} [z^{-\mu} I_\mu(\beta z)] = \beta z^{-\mu} I_{\mu+1}(\beta z), \quad \beta = \text{const.} \quad (26.65)$$

26.6.6 Die Wronskische Determinante der modifizierten Besselfunktionen

Die Wronskische Determinante ist:

$$I_\mu(z) K'_\mu(z) - I'_\mu(z) K_\mu(z) = -\frac{1}{z}. \quad (26.66)$$

Diese Resultat erhält man aus Gl.(26.33) und aus (26.58).

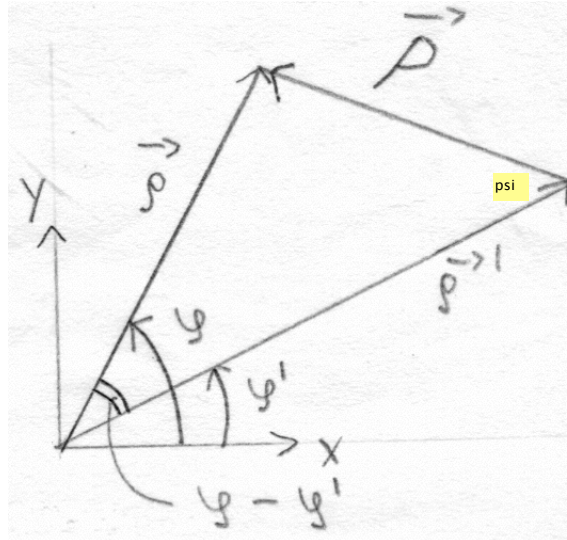


Abbildung 26.7: Winkel und Seiten für die Variablen im Additionstheorem (26.67).

$$\rho_{<} = \text{Min}[\rho, \rho'], \quad \rho_{>} = \text{Max}[\rho, \rho'].$$

26.6.7 Ein Additionstheorem

Für die in der Zeichnung angegebenen Winkel und Seiten eines Dreiecks gilt das folgende Additionstheorem:

$$K_\mu(P) e^{i\mu\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')} K_{\mu+m}(\rho_{>}) I_m(\rho_{<}), \quad \rho_{>} \geq \rho_{<}. \quad (26.67)$$

Den Spezialfall $\mu = 0$ dieser Formel erhält man aus Gln.(14.15) und Gln.(14.17). Diese geben zwei verschiedene Ausdrücke für ein und dieselbe Greensche Funktion.

26.7 Sphärische Besselfunktionen

Die Radialfunktion der Helmholtzgleichung in sphärischen Koordinaten läßt sich ebenfalls durch Besselfunktionen ausdrücken.

26.7.1 Die Separation der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten

Die Helmholtzgleichung des dreidimensionalen Raumes mit den Kugelkoordinaten r, θ, ϕ :

$$\Delta\psi + k^2 \psi = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Lambda^2 + k^2 \right] \psi = 0 \quad (26.68)$$

wird durch den Ansatz $\psi = R(r) Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ separiert. Die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ sind Eigenfunktionen des Operators Λ^2 zum Eigenwert $-\ell(\ell+1)$:

$$\Lambda^2 Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = -\ell(\ell+1) Y_{\ell,m}(\theta, \phi). \quad (26.69)$$

Mit $x := kr$ und $R(r) := z_\ell(x)$ erhält man folgende Differentialgleichung für die Radialfunktion:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + 1 \right] z_\ell(x) = 0. \quad (26.70)$$

Diese Differentialgleichung kann in eine Besselsche transformiert werden. Dazu soll in dem Ansatz $z_\ell(x) := w(x) Z_\nu(x)$ die Funktion $w(x)$ geeignet bestimmt werden.

$$\begin{aligned} z_\ell(x) &:= w(x) Z_\nu(x), \\ z'_\ell(x) &= w' Z_\nu + w Z'_\nu; \\ z''_\ell(x) &= w'' Z_\nu + 2 w' Z'_\nu(x) + w Z''_\nu \\ \frac{2}{x} z'_\ell(x) &= \frac{2w'}{x} Z_\nu + \frac{2}{x} w Z'_\nu \\ - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} z_\ell(x) &= - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} w Z_\nu \\ z_\ell(x) &= w(x) Z_\nu(x) \\ 0 &= \dots \quad \text{s. nächste Gl.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= w Z''_\nu + 2 \left(w' + \frac{1}{x} w \right) Z'_\nu + \left(w'' + \frac{2}{x} w' - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} w \right) Z_\nu + w Z_\nu = \\ &= w \left[Z''_\nu + 2 \left(\frac{w'}{w} + \frac{1}{x} \right) Z'_\nu + \left(\frac{w''}{w} + \frac{2}{x} \frac{w'}{w} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right) Z_\nu + Z_\nu \right] = \\ &\stackrel{!}{=} w \left[Z''_\nu + \frac{1}{x} Z'_\nu - \frac{\nu^2}{x^2} Z_\nu + Z_\nu \right] \end{aligned}$$

Die letzten zwei Zeilen der zweiten Kolonne der rechten Seite liefern eine Differentialgleichung für $w(x)$:

$$2 \frac{w'}{w} + 2 \frac{1}{x} = \frac{1}{x} : \quad \frac{w'}{w} = -\frac{1}{2x}, \quad \ln w = -\frac{1}{2} \ln x, \quad \underline{w(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{2x}, \quad \frac{w''}{w} = \frac{3}{4x^2}.$$

Damit liefern die letzten zwei Zeilen der dritten Kolonne der rechten Seite des obigen Schemas:

$$\begin{aligned} \frac{w''}{w} + \frac{2}{x} \frac{w'}{w} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} &= \frac{\nu^2}{x^2} : \quad \frac{3}{4x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} = \frac{\nu^2}{x^2} \\ \ell(\ell+1) + 1 - \frac{3}{4} &= \ell^2 + \ell + \frac{1}{4} = \underline{\left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2} = \nu^2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich: Die Transformationsfaktor $w(x)$ verwandelt die Differentialgleichung (26.70), die die Radialfunktionen bestimmt, in eine Besselsche Differentialgleichung mit der Ordnung $\nu = \ell + 1/2$.

26.7.2 Die Differentialgleichung der sphärischen Besselfunktionen

Diese lautet also:

$$\frac{1}{x} \left[\frac{d^2}{dx^2} (x z_\ell(x)) + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right) (x z_\ell(x)) \right] = 0, \quad (26.71)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} z_\ell(x) + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} z_\ell(x) + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right) z_\ell(x) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung ersieht man, dass mit $z_\ell(x)$ auch $z_{-\ell-1}(x)$ eine Lösung ist.

26.7.3 Die sphärischen Besselfunktionen

Der noch unbestimmte konstante Faktor wird so festgelegt, dass sich eine besonders einfache Form der sphärischen Besselfunktionen ergibt:

$$z_\ell(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Z_{\ell+1/2}(x), \quad (26.72)$$

Für Z kann man J , Y , $H^{(1)}$ oder $H^{(2)}$ wählen, dementsprechend schreibt man auf der linken Seite die entsprechenden Kleinbuchstaben. In den meisten Anwendungen ist ℓ ganzzahlig. Dann sind alle $j_\ell(x)$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$ voneinander unabhängig. Für ein gegebenes ℓ bilden $j_\ell(x)$ und $j_{-\ell-1}(x)$ ein vollständiges Lösungssystem; die $n_\ell(x)$ werden gar nicht benötigt; wohl aber $h_\ell^{(1)}(x)$ und $h_\ell^{(2)}(x)$ wegen des unterschiedlichen Ausstrahlungsverhaltens.

Mit $\Gamma(3/2 + \nu) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\nu + 1) \sqrt{\pi} / 2^{\nu+1}$ wird aus (26.72) und (26.2):

$$j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} 2^{n+1}}{2^{2n} n! 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \sqrt{\pi}} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin x}{x}. \quad (26.73)$$

Eine analoge Rechnung führt für $\ell = -1$ auf $j_{-1}(x) = \frac{\cos x}{x}$. Das gibt dann auch die sphärischen Hankelfunktionen:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} = y_{-1}(x) = \frac{1}{2ix} (e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2} (h_0^{(1)} + h_0^{(2)}), \quad (26.74)$$

$$j_{-1}(x) = \frac{\cos x}{x} = y_0(x) = \frac{1}{2x} (e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} (h_{-1}^{(1)} + h_{-1}^{(2)}); \quad (26.75)$$

$$y_\ell(x) = (-1)^{\ell-1} j_{-\ell-1}(x). \quad (26.76)$$

Die entsprechenden Funktionen für alle anderen ganzzahligen Ordnungen berechnet man aus der Rekursionsformel (26.81). Alle sind sie trigonometrische Funktionen oder imaginäre e -Potenzen dividiert durch ganzzahlige Potenzen von x , s. Tabelle unten. Die obigen Formeln zeigen, dass die sphärischen Neumannfunktionen $y_\ell(x)$ bereits unter den $j_\ell(x)$ vorkommen; dies ist klar: Für ungerades ν sind die gewöhnlichen Besselfunktionen $J_\nu(x)$ und $J_{-\nu}(x)$ voneinander linear unabhängig.

Tabelle 26.1: Tabelle einiger sphärischer Besselfunktionen

ℓ	$j_\ell(x) = (-)^\ell y_{-\ell-1}(x)$	$h_\ell^{(1,2)}(x)$
-2	$-\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$e^{\pm ix} \left(-\frac{1}{x^2} \pm \frac{i}{x}\right)$
-1	$\frac{\cos x}{x}$	$e^{\pm ix} \frac{1}{x}$
0	$\frac{\sin x}{x}$	$e^{\pm ix} \left(\pm \frac{1}{ix}\right)$
1	$\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$	$e^{\pm ix} \left(\pm \frac{i}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$
2	$\frac{3 \sin x}{x^3} - \frac{3 \cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$	$e^{\pm ix} \left(\pm \frac{3}{ix^3} - \frac{3}{x^2} \pm \frac{i}{x}\right)$

Für ganzzahliges ℓ können $z_\ell(x)$ und $z_{-\ell}(x)$ durch Differentiation aus $z_0(x)$ abgeleitet werden:

$$z_\ell(x) = (-x)^\ell \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^\ell z_0(x), \quad (a) \quad z_{-\ell}(x) = x^{\ell-1} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^\ell (x z_0(x)). \quad (b) \quad (26.77)$$

Der Beweis der ersten Relation wird für $j_\ell(x)$ geführt:

$$j_\ell(x) / \left(\frac{x}{2}\right)^\ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\ell + k + 3/2)} \left(\frac{x^2/2}{2}\right)^k \left| \frac{d^n}{d(x^2/2)^n} \right.$$

Die rechte Seite des resultierende Ausdrucks gibt dann mit $s = k - n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k(k-1)\dots(k-n+1)}{k! 2^k \Gamma(\ell + k + 3/2)} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{k-n} &= \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(\ell + n + s + 3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{J_{\ell+n+1/2}}{(x/2)^{\ell+n+1/2}} \end{aligned}$$

$d(x^2/2) = x dx$. Im obigdn Resultat setzen wir $\ell = 0$; danach ersetzen wir n durch ℓ und bekommen Gl.(26.77)(a). Differenziert man $J_\mu(x)(x/2)^\mu$ n -mal nach $x^2/2$ ergibt sich

$$J_{-n+\mu}(x) = x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(J_\mu x^\mu\right).$$

Damit ist Gl.(26.77)(b) bewiesen.

26.7.4 Rekursionsformeln der sphärischen Besselfunktionen

Aus den Rekursionsformeln (26.17) bis (26.19) und der Definition (26.72) ergeben sich folgende Rekursionsformeln:

$$\frac{d}{dx} z_\ell(x) = \frac{\ell}{x} z_\ell(x) - z_{\ell+1}(x) = -\frac{\ell+1}{x} z_\ell(x) + z_{\ell-1}(x) = \quad (26.78)$$

$$= -\frac{\ell+1}{2\ell+1} z_{\ell+1}(x) + \frac{\ell}{2\ell+1} z_{\ell-1}(x); \quad (26.79)$$

$$\frac{d}{dx} z_{-\ell}(x) = \frac{\ell-1}{x} z_{-\ell}(x) + z_{-\ell-1}(x); \quad (26.80)$$

$$(2\ell+1) \frac{1}{x} z_\ell(x) = z_{\ell+1}(x) + z_{\ell-1}(x). \quad (26.81)$$

26.7.5 Das asymptotische Verhalten der sphärischen Besselfunktionen

Dies folgt aus (26.8) bis (26.10) und der Definition (26.72):

$$h_\ell^{(1,2)}(x) = \frac{1}{x} e^{\pm i[x - (2\nu+1)\pi/2]}, \quad -\pi < \arg x < 2\pi, \quad -2\pi < \arg x < \pi. \quad (26.82)$$

$$j_\ell(x) = \frac{1}{x} \cos[x - (2\ell + 1)\pi/2], \quad -\pi < \arg x < \pi; \quad (26.83)$$

$$n_\ell(x) = \frac{1}{x} \sin[x - (2\ell + 1)\pi/2], \quad -\pi < \arg x < \pi; \quad (26.84)$$

26.7.6 Wronskische Determinanten der sphärischen Besselfunktionen

Die Wronskischen Determinanten der sphärischen Besselfunktionen findet man nach der gleichen Vorgangsweise wie sie bei Gln.(26.37) angewendet worden ist. Damit erhält man:

$$z_{\bar{\ell}}'(x) z_\ell(x) - z_{\bar{\ell}}(x) z_\ell'(x) = C/x^2.$$

Die Konstante C bestimmt man, indem man die asymptotischen Formeln für die z_ℓ einsetzt. Das gibt folgende Resultate:

$$j_{\bar{\ell}}'(x) j_\ell(x) - j_{\bar{\ell}}(x) j_\ell'(x) = \sin[(\ell - \bar{\ell})\pi/2]/x^2, \quad (26.85)$$

$$j_\ell'(x) j_{-\ell}(x) - j_\ell(x) j_{-\ell}'(x) = \sin(\ell\pi)/x^2, \quad (26.86)$$

$$n_\ell'(x) j_\ell(x) - n_\ell(x) j_\ell'(x) = 1/x^2, \quad (26.87)$$

$$h_\ell^{(1)'}(x) h_\ell^{(2)}(x) - h_\ell^{(1)}(x) h_\ell^{(2)'}(x) = 2i/x^2, \quad (26.88)$$

$$h_\ell^{(1)'}(x) j_\ell(x) - h_\ell^{(1)}(x) j_\ell'(x) = i/x^2, \quad (26.89)$$

$$h_\ell^{(2)'}(x) j_\ell(x) - h_\ell^{(2)}(x) j_\ell'(x) = -i/x^2. \quad (26.90)$$

26.8 Literatur

- [26.1] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions. Dover, 1965.
Milton Abramowitz, Irene A. Stegun und Michael Danos: Pocketbook of Mathematical Functions. Harri Deutsch, 1984.
- [26.2] Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert and Charles W. Clark:
NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge University Press, 2010.
- [26.3] G.N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press, 1995.
- [26.4] A. Sommerfeld: Vorlesungen ber Theoretische Physik, Bd.6, Partielle Differentialgleichungen in der Physik. Harri Deutsch, 1992.