

# Kapitel 26

## Periodische Differentialgleichungen

### 26.1 Die Hillsche Differentialgleichung und spezielle Fälle

Hillsche Differentialgleichung:

$$\mathcal{H}w := \frac{d^2w}{dz^2} + J(z) w(z) = 0, \quad -\pi \leq z \leq \pi; \quad (26.1)$$

$$J(z) := \theta_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos(2nz). \quad (26.2)$$

Ein wichtiges und gut untersuchtes Beispiel ist die **Mathieusche Differentialgleichung** ( $\theta_0 = a$ ,  $\theta_1 = -q$ ;  $\theta_n = 0, n > 1$ ):

$$\mathcal{E}w := \frac{d^2w}{dz^2} + J_e(z)w := \frac{d^2w}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z)w = 0, \quad -\pi \leq z \leq \pi; \quad (26.3)$$

deren Lösungen Mathieufunktionen heissen. Die Symbole  $a$  und  $q$  sind heute Standard, [1, 5]; Meixner und Schäfer [3] verwenden  $h^2 = q$  bzw.  $\lambda = a$ . In der **Meissnerschen** Differentialgleichung entspricht  $J(z)$  einer vollen Fourierreihe: ( $\theta_0 = \lambda$ )

$$\mathcal{M}w := \frac{d^2w}{dz^2} + J_m(z)w := \frac{d^2w}{dz^2} + (\lambda + \gamma \Phi(z))w = 0, \quad -\pi \leq z \leq \pi. \quad (26.4)$$

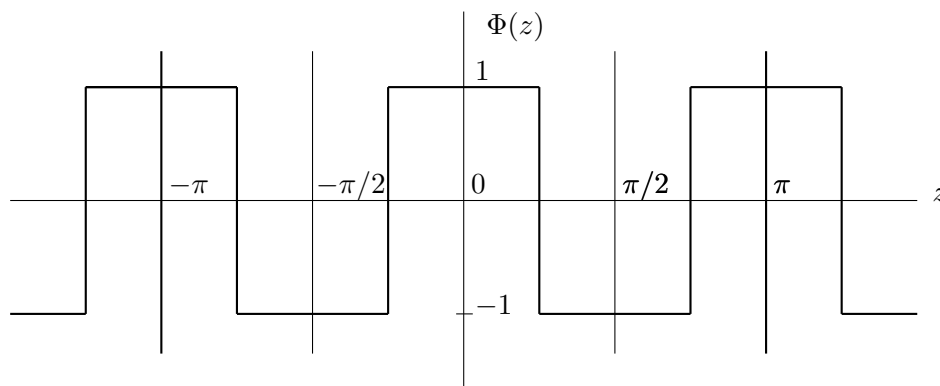


Abbildung 26.1: Die periodische Funktion  $\Phi(z)$  der Meissner-Gleichung

Denn  $\Phi(z)$  ist eine periodische Mäanderfunktion, also eine stückweise stetige Funktion, die alternierend die konstanten Wert  $+1$  oder  $-1$  aufweist und im Periodenintervall  $[-\pi, \pi]$  den Mittelwert  $0$  besitzt, z.B. folgende gerade Funktion (s. Abb.26.1)

$$\Phi(z) = \Phi(-z); \quad \begin{aligned} 2n \pi/2 - \pi/4 < z < 2n \pi/2 + \pi/4 : & \quad \Phi = 1; \\ (2n + 1) \pi/2 - \pi/4 < z < (2n + 1) \pi/2 + \pi/4 : & \quad \Phi = -1. \end{aligned} \quad (26.5)$$

Die Fourierkoeffizienten in  $\Phi(z)$  sind dann:

$$\theta_n = 0; \text{ ausser } \theta_2, \theta_6, \theta_{10}, \dots \text{ allgemein } \theta_{4n-2} = (-1)^{n-1} 4 / (2n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Meissnersche Differentialgleichung ist die einfachste aller periodischen Differentialgleichungen; für sie können die Lösungen und die Periodizitätsbedingungen durch elementare Funktionen ausgedrückt werden.

Eine weitere wichtige Gleichung dieses Typs ist die **Lamésche** Differentialgleichung; deren Lösungen heissen Lamésche Funktionen oder auch Sphäroidfunktionen.

## 26.2 Problemstellungen, die zu periodischen Differentialgleichungen führen

Es gibt zwei Typen von Problemstellungen, bei denen periodische Differentialgleichungen auftauchen.

1. Randwertprobleme.
2. Dynamische Probleme

### 26.2.1 Randwertprobleme

1. Eigenschwingungen im Inneren einer Ellipse. Z.B die Schwingungen einer elliptischen Membran, die am Rande eingespannt ist.
2. Eigenschwingungen im Inneren eines elliptischen Zylinders (= Wellenleiters).
3. Eigenschwingungen im Inneren eines elliptischen Hohlraums (Inneres eines Rotations- oder dreiachsigen Ellipsoids)
4. Beugung von Wellen an einem elliptischen unendlich langen Zylinder.
5. Beugung von Wellen an einem elliptischen Körper (Äusseres eines Rotations- oder dreiachsigen Ellipsoids)
6. Wellen in periodischen Strukturen
  - Kristallgitter (Blochfunktionen)
  - Beschleunigerstrukturen:
    - (a) Disloaded waveguide (Runzelröhre), s. Abb.26.2
    - (b) periodische Näherung für die Alvarez-Struktur, s. Abb.26.3

Bei diesen Problemen muss man immer Lösungen finden, deren Periode mit der der Struktur übereinstimmt. Dazu müssen die Parameter in den Differentialgleichungen dementsprechend bestimmt werden. Dies gibt die Eigenwerte. In den meisten Fällen sind diese Wurzeln transzendenter Gleichungen.

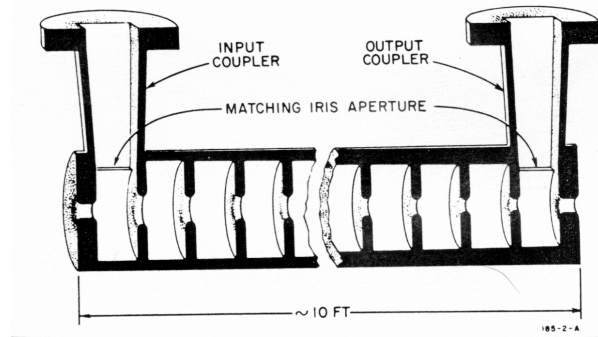


Abbildung 26.2: Die Struktur des Wellenleiters des Elektronen-, Positronenbeschleunigers im Stanford Linear ACelerators (= SLAC). In der Rohrachse läuft der zu beschleunigende Teilchenstrahl. Die leichten Elektronen oder Positronen erreichen sehr schnell eine Geschwindigkeit, die nur knapp unter der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  liegt. Die Blenden verzögern die Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Mikrowellen auf einen Wert knapp unter  $c$ . Somit können die Teilchen "auf den Wellen reiten" und werden damit weiter beschleunigt. Die Struktur ist nicht ganz periodisch, wird aber für theoretische Betrachtungen durch eine solche unendlich lange approximiert. Bild aus [6].

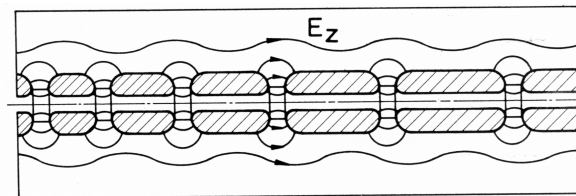


Abbildung 26.3: Die Alvarezstruktur zur Beschleunigung langsamer Protonen oder Ionen. Diese ist ein Hohlraum, in dem ein stehendes elektromagnetisches Mikrowellenfeld erregt wird. Die Driftröhren, die längs der Achse angeordnet sind, weisen einen zentralen Längskanal auf. Dessen Radius ist so klein, dass das Feld nicht in das Innere eindringen kann. Es baut sich daher nur im Spalt zwischen den Driftröhren ein periodisches Feld auf. Dessen longitudinale elektrische Komponente beschleunigt die geladenen Teilchen, die längs der Achse laufen. Die Länge der Driftröhren ist so auf die Geschwindigkeit des Sollteilchens abgestimmt, dass dieses immer ein beschleunigendes Feld sieht, während es durch einen Spalt läuft. Daher haben die Driftröhren in Strahlrichtung zunehmende Länge. Für manche theoretischen Untersuchungen wird die real Struktur durch eine exakt periodische approximiert.

## 26.3 Dynamische Probleme mit periodischer Differentialgleichung

1. Hillsches Mondproblem: Im geozentrischen System wird die Bewegung des Mondes untersucht. Die Anziehung der Erde ist die größte Kraft. Die Masse der Sonne ist zwar viel größer als die der Erde. Wegen der viel größeren Entfernung ist aber die Kraft auf den Mond wesentlich kleiner. Deren Periode beträgt ein Jahr. Kann diese periodische Kraft den Mond aus seiner Kreisbahn um die Erde ablenken? Durch Näherungen, Reihenentwicklungen nach kleinen Parametern kann man die Bewegungsgleichung des Mondes auf die Form einer Hillschen Differentialgleichung bringen.
2. Starke Fokussierung (durch Quadrupolfelder) in Beschleunigern.
3. Pendel mit periodisch bewegter Aufhängung. Ähnlich auch die Schaukel.

### 26.3.1 Das Hillsche Mondproblem

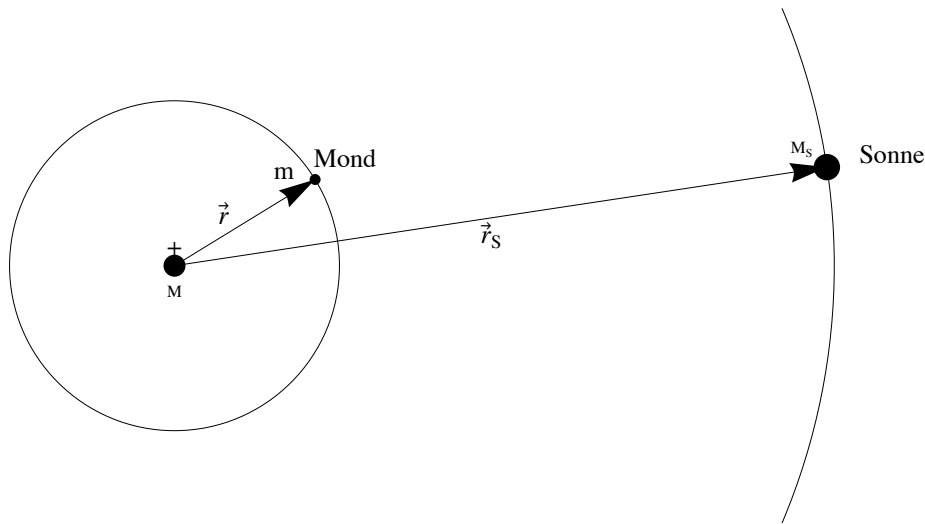


Abbildung 26.4: Das Hillsche Mondproblem

G.W. Hill (1838 - 1914) untersuchte das in Abb.26.4 dargestellte und oben bereits beschriebene Problem. Die Bewegungsgleichung für den Mond ist:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\gamma \frac{mM}{r^3} \vec{r} - \gamma \frac{mM_S}{|\vec{r} - \vec{r}_S|^3} (\vec{r} - \vec{r}_S) \quad (26.6)$$

mit

$$\vec{r}_S = a(\cos(\omega_S t), \sin(\omega_S t)) \quad (26.7)$$

Eine lineare Näherung führt zur Hillschen Differentialgleichung mit einer Form wie in (26.1).

### 26.3.2 Starke Fokussierung in einem Beschleuniger

Die Teilchen eines Strahls in einem linearen bzw. zirkularen Beschleuniger sollen auf einer geraden bzw. kreisförmigen Sollbahn laufen. Teilchen die sich nicht auf dieser bewegen, müssen durch Fokussierungskräfte immer mehr auf die Sollbahn gezwungen werden. Dies kann vor allem durch magnetische Quadrupolfelder bewirkt werden, s.Abb.26.5. Diese befinden sich in der

Alvarezstruktur (s. Abb.26.3) des Linearbeschleunigers im Inneren der Driftröhren. Bei Kreisbeschleunigern können die Biegemagnete neben dem Dipolfeld, das den Teilchen die Sollkreisbahn vorgibt, auch Quadrupolkomponenten enthalten (kombinierte Funktion). Meist werden aber zwischen die Biegemagnete (Dipolfelder) eigene Quadrupolmagnete eingefügt. (Separierte Funktion: das Biegen wird vom Fokussieren separiert). Oft verwendet man Quadrupol-Tripletts (s. Abb.26.7).

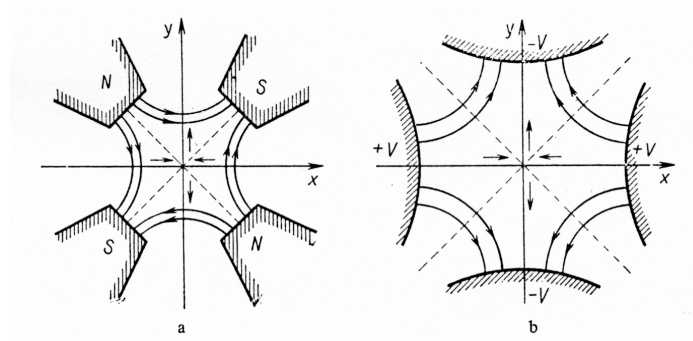


Abbildung 26.5: Ein magnetisches (a) und ein elektrisches Quadrupolfeld (b). Ein solches Feld wirkt in der einen Richtung (hier  $\sim x$ ) fokussierend, in der dazu senkrechten ( $\sim y$ ) defokussierend. Eine Folge von Quadrupolen kann aber als Nettoeffekt in allen Richtungen fokussierend wirken, s. Abb.26.6. In Abb.a läuft ein positiv geladenes Teilchen aus der Bildebene heraus. Bild aus [7].

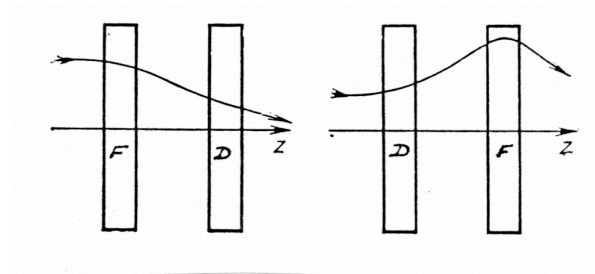


Abbildung 26.6: Eine fokussierende und eine defokussierende Linse können zusammen fokussierend wirken. Die fokussierende Kraft ist stärker als die defokussierende, weil das Teilchen in der fokussierenden Linse einen größeren Abstand von der Achse hat als in der defokussierenden. Wäre aber die fokussierende Kraft zu groß, dann würde das Teilchen die defokussierende Linse in weitem Abstand unterhalb der Achse durchlaufen und überhaupt verloren gehen. Bild aus [7].

Gemäß Gl.(6.63) ist ein Quadrupolfeld durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$B_y + i B_x = d_2 (x + iy)/R^2.$$

Wir nehmen  $d_2 = R^2 B'$ .  $B'$  ist und heißt der Feldgradient. Dann bekommen wir folgende Komponenten des Magnetfeldes und der damit gebildeten Lorentzkraft ( $\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B})$ ):

$$\begin{aligned} B_x &= B' y, & F_x &= -eB'v x && \text{fokussierend für } eB'v > 0; \\ B_z &= B' x, & F_z &= +eB'v y && \text{defokussierend für } eB'v > 0. \end{aligned}$$

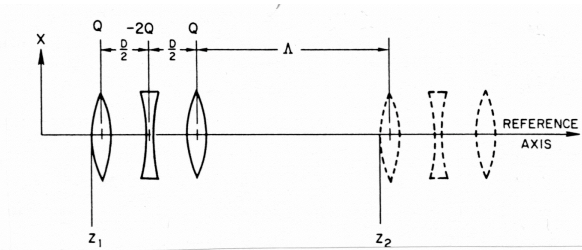


Abbildung 26.7: Ein Qaudrupol-Tripplet. Bild aus [6].

Ist  $eB'v < 0$ , dann vertauschen sich die beiden Fokussierungen. Ein statisches Feld kann nie in beiden Raumrichtungen fokussierend wirken. Dennoch kann man durch eine Kombination von Quadrupolen mit geeigneten Dimensionierungen erreichen, dass sich im System als ganzen eine Nettofokussierung ergibt, s. Abb.26.6. Im Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \approx v)$  sind die transversalen Komponenten  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  meist klein im Vergleich zur longitudinalen Komponente  $\dot{z} \approx v$ . In einem unendlichen System von alternierenden, aneinandergefügten Quadrupolen sind dann die transversalen Bewegungsgleichung der Strahlteilchen:

$$m\ddot{x} = -\Phi(z) x, \quad m\ddot{y} = \Phi(z) y; \quad (26.8)$$

$\Phi(z)$  ist die in Abb.26.1 gezeigte Mäanderfunktion; man muss darin nur den Wert  $\pi$  durch  $L$ , die Länge der Quadrupolmagnete ersetzen. Man hat also für jede transversale Geschwindigkeitskomponente eine periodische Differentialgleichung vom Typ der Meissnergleichung (26.4).

### 26.3.3 Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt I

Die Aufhängung eines mathematischen Pendels oszilliert in vertikaler Richtung mit der gegebenen Kreisfrequenz  $\omega$  und der Amplitude  $d$ . Im raumfesten System sind die Koordinaten der Masse:

$$x = l \cos \phi, \quad y = l \sin \phi + d \cos(\omega t). \quad (26.9)$$

Im bewegten System greifen am Aufhängepunkt zwei Momente an:  $M_s = -mgl \sin \phi$ , das Moment der Schwerkraft, und  $M_b = -m\ddot{b}l \sin \phi = ml d\omega^2 \cos(\omega t) \sin \phi$ , das Moment der Trägheitskraft. Damit wird die Bewegungsgleichung:

$$ml\ddot{\phi} = M_s + M_b = ml(-g + d\omega^2 \cos(\omega t)) \sin \phi.$$

Es werden nur kleine Schwingungsamplituden betrachtet, sodass  $\sin \phi$  durch  $\phi$  ersetzt werden kann. Ausserdem werden folgende Abkürzungen definiert:

$$\omega_0^2 := g/l, \quad a := 4g/\omega^2 l = 4\omega_0^2/\omega^2. \quad q := 2d/l; \quad z := \omega t/2.$$

Damit wird aus der obigen Differentialgleichung die Mathiesche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z) \phi = 0. \quad (26.10)$$

Diese Gleichung wird bei gegebenen Werten von  $a, q$  untersucht. Jedem Wertepaar entspricht in der unten gezeigten Stabilitätskarte, Abb.26.8, der Mathieschen Differentialgleichung ein Punkt. Liegt dieser innerhalb eines stabilen Gebietes, dann ist die Bewegung stabil, sonst instabil. Man kann dann z.B. untersuchen, für welche Frequenzen  $\omega$  dies zutrifft.

### 26.3.4 Abschließende Zusammenfassung

Bei den dynamischen Problemstellungen gibt es eine äussere Kraft mit vorgegebener zeitlicher Periode. Die Lösungen können unperiodisch sein (sind dann meist instabil) oder periodisch (im allg. aber mit einer Periode, die sich von der der äusseren Kraft unterscheidet) und dann sind sie stabil. Die speziellen Lösungen, deren Periode mit der äusseren übereinstimmt, entsprechen Parameterwerten, die den Eigenwerten eines Randwertproblems entsprechen; diese trennen die Stabilitätsgebiete von den Instabilitätsgebieten.

## 26.4 Ein erster Überblick über die Mathiesche Differentialgleichung und deren Lösungen

Die Mathiesche Differentialgleichung, ihre Lösungen und ihr Stabilitätsdiagramm sind wohlbekannt. Die wichtigsten Resultate dieser Untersuchungen und deren Anwendungen werden in diesem Paragraphen behandelt. Programme für fast alle benötigten Funktionen gibt es in *Mathematica*.

### 26.4.1 Die Eigenschwingungen der elliptischen Membran

Eine elliptische Membran ist an ihrem Rande eingespannt. Ihre Eigenschwingungen werden durch die Helmholtzgleichung in elliptischen Koordinaten  $\eta, \psi$  (s. §6.5.4) mit Dirichletscher Randbedingung beschrieben. Der entsprechende Ausdruck der Helmholtzgleichung wird mit den metrischen Koeffizienten

$$h_\eta = h_\psi = e \sqrt{\cosh^2 \eta - \cos^2 \psi} = e \sqrt{\cosh(2\eta) - \cos(2\psi)} / \sqrt{2}$$

durchmultipliziert. In der damit gebildeten Helmholtzgleichung kann die Trennung der Variablen

$$h_\eta h_\psi \Delta \Phi + h_\eta h_\psi k^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} + h_\eta h_\psi k^2 \Phi = 0, \quad (26.11)$$

durch den Separationsansatz  $\Phi = H(\eta) \Psi(\psi)$  vorgenommen werden. Es ergeben sich folgende gewöhnliche Differentialgleichungen ( $\kappa^2 := k^2 e^2 / 2$ ):

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} - \alpha^2 H + \kappa^2 \cosh(2\eta) H = 0,$$

$$\frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + \alpha^2 \Psi - \kappa^2 \cos(2\psi) \Psi = 0.$$

$\alpha^2$  ist die Separationskonstante. Wir wählen neue Konstanten  $2q := \kappa^2$ ,  $a := \alpha^2$  und erhalten folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\psi^2} + \left( a - 2q \cos(2\psi) \right) \Psi = 0. \quad (26.12)$$

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} - \left( a - 2q \cosh(2\eta) \right) H = 0. \quad (26.13)$$

Gl.(26.12) heißt die Mathiesche Differentialgleichung; Gl.(26.13) die modifizierte Mathiesche Differentialgleichung. Nur  $\kappa$  hängt von der Exzentrizität  $e$  der elliptischen Membran ab. Umfasst der Bereich des Problems den vollen Umfang der Ellipse, d.i.  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ , dann muss  $a$  aus einer komplizierten transzendenten Gleichung berechnet werden, die sich aus der Lösung der ersten der beiden obigen Gleichungen ergibt. Das bedeutet, dass in diesen Koordinaten die

Separationskonste  $\alpha$  nicht so einfach bestimmt werden kann wie bei einem kreisförmigen oder einem sphärischen Problem in ebenen Polarkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten.

Sobald man die Konstanten  $a = a_1, a_2, a_3, \dots$  für die geraden (cosinusartigen),  $ce_m(\psi, q)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , und  $a = b_1, b_2, b_3, \dots$  für die ungeraden (sinusartigen), Eigenösungen,  $se_m(\psi, q)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , aus Gl.(26.12) bestimmt hat, kann man deren Wert in Gl.(26.13) einsetzen und danach die Radialfunktionen,  $ce_m(i\eta, q)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , bzw.  $se_m(i\eta, q)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , berechnen. In *Mathematica* sind die entsprechenden Befehle implementiert:

**MathieuCharacteristicA[m,q]** (**MathieuCharacteristicB[n,q]**) gives the characteristic value  $a_m(q)$  ( $b_m(q)$ ) for even (odd) Mathieu functions with characteristic exponent  $m$  and parameter  $q$ .

Löst man die Mathiesche Differentialgleichungen für alle Werte der beiden Parameter  $a$  und  $q$  dann erhält man die folgende Stabilitätskarte.

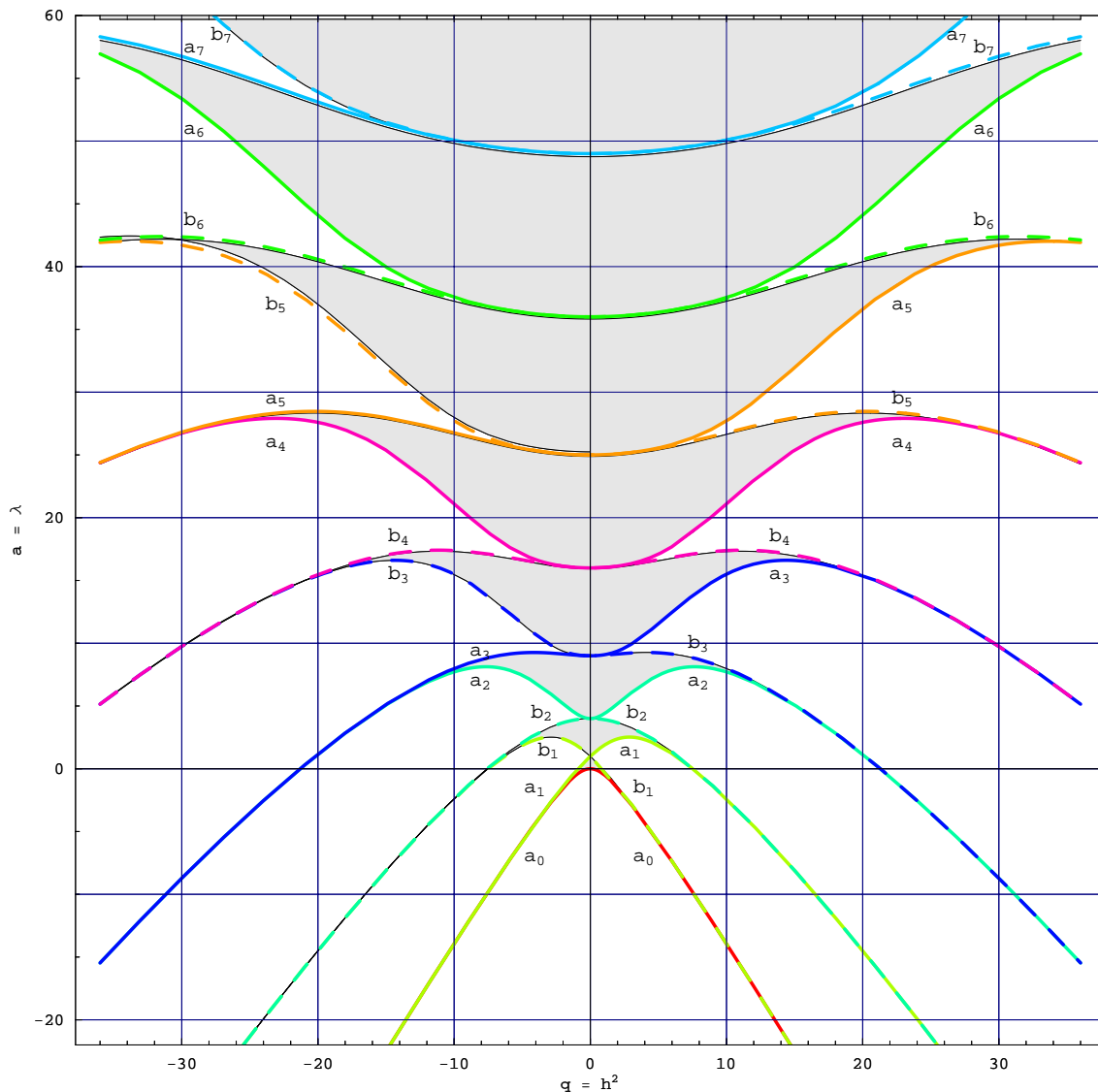


Abbildung 26.8: Die Stabilitätskarte der Mathieschen Differentialgleichung. Stabilität gibt es nur in den grauen Gebieten. Die Eigenwertkurven der fundamentalperiodischen Lösugen  $a_n(q)$  und  $b_n(q)$  bilden die Grenzen.

Das Stabilitätsverhalten folgt aus den jeweiligen Werten des Floquetexponenten  $\nu$ . Weiter unten



wird gezeigt, dass sich immer mindestens eine Lösung der Mathieschen Differentialgleichung (26.12) finden läßt, die folgendermaßen aussieht:

$$\Psi(\psi) = e^{i\nu\psi} P(\psi) \tag{26.14}$$

Darin ist  $P(\psi)$  eine Funktion mit der Periode  $\pi$ ; sie hat also die gleiche Periode wie die Differentialgleichung und ist stabil. Das Stabilitätsverhalten hängt also nur von der Konstanten  $\nu$ , dem **charakteristischen Exponenten** ab. Wenn  $\nu$  reell ist, dann ist diese Lösung stabil, hat aber im allgemeinen nicht die gleiche Periode wie die Differentialgleichung. Diese Werte des charakteristischen Exponenten erhält man für solche Wertepaare  $(a, q)$ , die einem Punkt in einem grauen Gebiet entsprechen. **Fundamental-periodische Lösungen** haben die gleiche Periode wie die Differentialgleichung (26.12). Dazu muss  $\nu = n = \text{ganz sein}$ . Das ist der Fall auf den Grenzkurven der Stabilitätsgebiete; diese lassen sich mittels der Funktionen `MathieuCharacteristicA[m,q]` (`MathieuCharacteristicB[n,q]`) bei vorgegebenem  $q$  berechnen. Dann bekommt man die Lösungen der beiden Differentialgleichungen (26.12) und (26.13), s. Abb.26.9 und Subsect.26.6 .

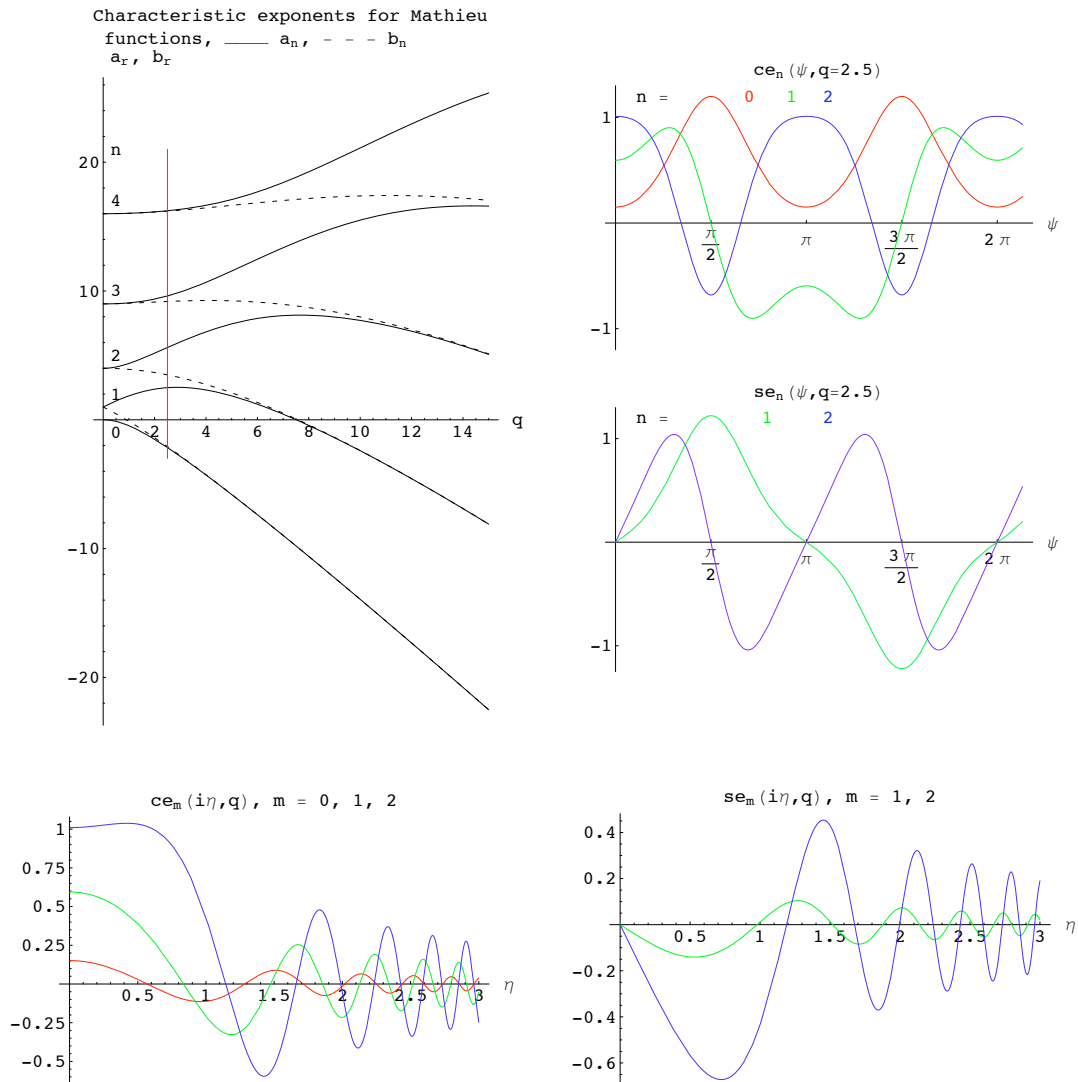


Abbildung 26.9: Die rote vertikale Linie quert charakteristischen Exponenten für die Mathiesche Differentialgleichung für  $q = 2.5$ . Die Winkelanteile  $ce_m(\psi, q)$ ,  $se_m(\psi, q)$  der Lösung und die Radialanteile  $ce_m(i\eta, q)$ ,  $se_m(i\eta, q)$

## 26.4.2 Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt II

Wie oben gezeigt, wird die Bewegung dieses Pendels für kleine Schwingungen durch die Mathieusche Differentialgleichung

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z) \phi = 0.$$

beschrieben. Die Variablen und Parameter sind dabei:

$$a = 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad q = \frac{2d}{\ell}, \quad z = \omega t.$$

$\omega_0$  ist die Eigenfrequenz des Pendels der Länge  $\ell$  für kleine Schwingungen.  $d$  ist die Amplitude der Schwingung der Aufhängung;  $\omega$  deren Kreisfrequenz. Wenn  $\omega$  von Unendlich heruntergeht bis Null, dann wächst  $a$  von Null bis Unendlich.

$$\infty \rightarrow \omega \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \rightarrow \omega \rightarrow \infty.$$

$q$  ist fix. Für  $0 < q \leq 1$  gibt es folgenden Näherungsformeln für die Grenzen der Instabilitätsgebiete:

Instabilitäts- gebiet	zwischen	und
1	Abszisse	$b_1(q) = 1 - q - q^2/8 + O(q^3)$
1	Abszisse	$a_1(q) = 1 + q - q^2/8 + O(q^3)$
2	$b_2(q) = 4 - q^2/12 + O(q^4)$	$a_2(q) = 4 + 5q^2/12 + O(q^4)$
3	$b_3(q) = 3 + q^2/16 - q^3/64 + O(q^4)$	$a_3(q) = 4 + q^2/16 + q^3/64 + O(q^4)$
...	...	...

## 26.5 Grundlegende Eigenschaften der Hillschen und der Mathieuschen Differentialgleichung. Das Theorem von Floquet

In diesem Paragraphen folge ich in hohem Maße [1]. Ich habe aber einige Bezeichnungen geändert und verwende eine andere Definition des charakteristischen Exponenten (s.u.).

Solange die Funktion  $J(z)$  analytisch ist, hat die Hillsche Differentialgleichung (26.1) keine Singularität im Endlichen. Deren Lösungen sind dann ganze Funktionen. Wenn aber  $J(z)$  eine Fourierreihe ist, kann diese eine schwach singuläre oder unstetige Funktion darstellen. Dann sind so weitreichende allgemeine Aussagen nicht möglich.

**Satz 1:** Mit  $w(z)$  ist auch  $w(n\pi \pm z)$ , mit  $n = \text{ganz}$ , Lösungen der Hillschen Differentialgleichung.

$$\mathcal{H}w(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}w(n\pi \pm z) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \text{insb.} \quad \mathcal{H}w(-z) = 0, \quad \mathcal{H}w(\pi \pm z) = 0. \quad (26.15)$$

Denn die eben verwendeten Spiegelungen und Translationen lassen die Differentialgleichung unverändert:

$$Sz = -z, \quad S\mathcal{H} = \mathcal{H}S; \quad Tz = n\pi \pm z, \quad T\mathcal{H} = \mathcal{H}T. \quad (26.16)$$

**Satz 2:** Die Hillsche Differentialgleichung hat immer eine gerade und eine ungerade Lösung:

$$c(z) = c(-z) \quad \text{und} \quad s(z) = -s(-z). \quad (26.17)$$

$c$  wie cosinusartig,  $s$  wie sinusartig. Diese Eigenschaft folgt aus der Differentialgleichung, weil diese keine erste Ableitung enthält und die Funktion  $J(z)$  eine gerade Funktion in  $z$  ist. Die Hillsche Differentialgleichung ist also invariant gegen  $S$ ; mit anderen Worten der Operator  $\mathcal{H}$  vertauscht mit  $S$ , s.Gl.(26.16). Daraus folgt bereits, dass es immer möglich ist, Lösungen zu finden, die

entweder symmetrisch oder antisymmetrisch in  $z$  sind. Die Behauptung kann auch bewiesen werden, indem man mit dem Potenzreihenansatz  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\rho+k}$  in die Differentialgleichung eingeht, nachdem auch  $J(z)$  in eine solche Reihe entwickelt worden ist (Methode von Frobenius). Dabei ergeben sich die zwei Möglichkeiten  $\rho = 0$  und  $\rho = 1$  und je eine zugehörige Potenzreihe mit den Eigenschaften wie in Satz 2 genannt. Rechnerische Details gibt es im Notebook K26EvenOdd.nb.

**Folgesatz 2.1:** Die Hillsche Gleichung hat immer eine Lösung, die gerade ist, und eine, die ungerade ist, und zwar um jeden Punkt  $z = n\pi/2$ ,  $n = \text{ganzzahl}$ , sodass gilt:

$$w(n\pi/2 + z) = \pm w(n\pi/2 - z). \quad (26.18)$$

Wenn man  $z$  durch  $z = n\pi/2 + z$  ersetzt, dann bleibt im allg. die Differentialgleichung ungeändert, höchstens das Vorzeichen von  $q$  ändert sich.

**Satz 3:** Die Wronskische Determinante jedes Lösungspaares der Hillschen Differentialgleichung ist konstant:

$$W(w_1(z), w_2(z)) := w_1 w_2' - w_1' w_2 = \text{const.} \quad (26.19)$$

Dies folgt daraus, dass diese Differentialgleichung keine erste Ableitung enthält.

$$w_1(z) \mathcal{H} w_2(z) - w_2(z) \mathcal{H} w_1(z) = \frac{d}{dz} (w_1 w_2' - w_2 w_1') = 0.$$

### 26.5.1 Das Fundamentalsystem der Mathieuschen Gleichung

**Satz 4:** Die Mathieusche Differentialgleichung besitzt immer zwei Lösungen,  $w_1(z) = c(z)$  und  $w_2(z) = s(z)$ , mit folgenden Eigenschaften:

1.  $w_1(z) = c(z)$  ist gerade und  $w_2(z) = s(z)$  ist ungerade (= Satz 2).
2.  $c(0) = s'(0) = 1$ ;  $c'(0) = s(0) = 0$ .
3.  $w_1(z \pm \pi) = c(z \pm \pi) = c(\pi) c(z) \pm c'(\pi) s(z)$ .
4.  $w_2(z \pm \pi) = s(z \pm \pi) = \pm s(\pi) c(z) + s'(\pi) s(z)$ .
5.  $W(w_1, w_2) = W(c(z), s(z)) = c(z) s'(z) - c'(z) s(z) = 1$ . ( $\Leftarrow$  Satz 3)
6.  $w_1(\pi) = c(\pi) = w_2'(\pi) = s'(\pi)$ .

Die ersten zwei Identitäten in 2. ergeben sich durch eine geeignete Wahl der Integrationskonstanten; die zweiten zwei aus dem geraden bzw. ungeraden Charakter von  $c(z)$  und  $s(z)$ . Zum Beweis von 3. wird  $c(z + \pi)$  als Linearkombination von  $c(z)$  und  $s(z)$  angesetzt:

$$c(z + \pi) = \alpha c(z) + \beta s(z), \quad c'(z + \pi) = \alpha c'(z) + \beta s'(z).$$

Mit  $z = 0$  und 2. ergibt sich sofort  $\alpha = c(\pi)$  und  $\beta = c'(\pi)$ . Damit ist die erste der Beziehungen 3. bewiesen; die zweite und die beiden von 4. ergeben sich auf ähnliche Weise. Mit  $z = 0$  und 2. folgt aus Satz 3 die Eigenschaft 5. Zum Beweis von 6. setzen wir in 3., 4. und 5.  $z = \pi$ :

$$[c(\pi)]^2 - c'(\pi) s(\pi) = 1, \quad (a) \quad c(\pi) s(\pi) - s'(\pi) s(\pi) = 0, \quad (b) \quad c(\pi) s'(\pi) - c'(\pi) s(\pi) = 1. \quad (c)$$

Aus (b) folgt entweder  $s(\pi) = 0$  oder  $c(\pi) = s'(\pi)$ . Wenn aber  $s(\pi) = 0$ , dann reduzieren sich Gln.(a) und (b) auf:

$$[c(\pi)]^2 = 1, \quad c(\pi) s'(\pi) = 1.$$

was wiederum  $c(\pi) = s'(\pi)$  ergibt.

## 26.5.2 Der Satz von Floquet für die Mathiesche Differentialgleichung

Dies ist ein Satz von fundamentaler Bedeutung für die Lösungstheorie der periodischen Differentialgleichungen.

**Satz 5, Satz von Floquet:** Die Mathiesche Differentialgleichung hat immer mindestens eine Lösung  $y(z)$  für die folgendes gilt:  $y(z + \pi) = \sigma y(z)$ ; dabei ist  $\sigma$  eine Konstante, die von den Parametern der Differentialgleichung abhängt; sie kann reell oder komplex sein.

**Beweis:**  $w(z)$  ist der Spaltenvektor zum Zeilenvektor  $(c(z), s(z))$ . Wir definieren eine Matrix  $A$  und bekommen mit Punkten 3. und 4. von Satz 4:

$$A := \begin{pmatrix} c(\pi) & c'(\pi) \\ s(\pi) & s'(\pi) \end{pmatrix}, \quad w(z + \pi) = A w(z). \quad (26.20)$$

Die gesuchte Lösung  $y(z)$  wird auf die beiden Fundamentallösungen aufgespannt:

$$y(z) = b_1 c(z) + b_2 s(z) = B \cdot w(z), \quad \text{mit } B := (b_1, b_2). \quad (26.21)$$

Daraus folgt:

$$y(z + \pi) = B \cdot w(z + \pi) = BA w(z).$$

$y(z + \pi) = \sigma y(z)$ , dann und nur dann, wenn  $BA w(z) \equiv \sigma B w(z)$  oder  $BA = \sigma B$ . Dieses lineare Gleichungssystem fuer die  $b_i$  ist nur lösbar, wenn die Determinate der Koeffizientenmatrix Null ist:

$$|A - \sigma E| = 0. \quad (26.22)$$

Würde man von einem anderen Fundamentalsystem ausgehen, bekäme man die gleiche Bedingung.  $\square$

**Folgesatz 5.1:** Die Mathiesche Gleichung hat immer mindestens eine Lösung der Form  $y(z) = e^{i\nu z} P(z)$ , worin  $\nu$  eine Konstante ist, und  $P(z)$  die Periode  $\pi$  hat.<sup>1</sup>

Aus  $y(z)$ , das die Eigenschaft  $y(z + \pi) = \sigma y(z)$  hat, bilden wir mit  $\sigma = e^{i\nu\pi}$  die Funktion  $P(z) := e^{-i\nu z} y(z)$  und finden :

$$\begin{aligned} \underline{P(z + \pi)} &= e^{-i\nu(z+\pi)} y(z + \pi) = e^{-i\nu z} e^{-i\nu\pi} \sigma y(z) \\ &\quad (\text{mit } e^{-i\nu\pi} = \sigma^{-1}) \quad = e^{-i\nu z} e^{-i\nu\pi} \sigma y(z) = \underline{P(z)}. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 5 und Folgesatz 5.1 gelten für jede lineare homogene Differentialgleichung, deren Koeffizienten die Periode  $\pi$  haben.

## 26.5.3 Der charakteristische Exponent und die Periodizitätsgleichung

### Definition der ganzperiodischen und halbperiodischen Lösungen

Gl.(26.22) heißt die Periodizitätsgleichung. Ihre Wurzeln,  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  heißen die Periodizitätsfaktoren. Zu diesen definieren wird die charakteristischen Exponenten (Englisch: periodicity exponents)  $\nu_1, \nu_2$  durch  $e^{i\nu_k} = \sigma_k$ .

Besonders wichtig sind die Funktionen  $f(z)$ , deren Periode mit der der Differentialgleichung übereinstimmt; für sie gilt:  $f(z + \pi) = f(z)$ ; diese nennen wir **fundamental-periodisch**. Sie haben sicher die Periode  $2\pi$ . Eine Funktion, die die Eigenschaft  $f(z + \pi) \equiv \sigma f(z)$ ,  $\sigma \neq \pm 1$  hat, nennen wir **pseudo-periodisch**.

<sup>1</sup>Zwei verschiedene Definitionen des charakteristischen Exponenten werden in der Literatur verwendet. Ich folge [5], [3]; so wird der Exponent auch in *Mathematica* berechnet. [1], [2] führen  $e^{-\mu z}$  statt  $e^{i\nu z}$  ein.

## Die Periodizitätsgleichung der Mathieuschen Differentialgleichung

Das Theorem von Floquet, Satz 5, wird mit Hilfe von Satz 4 weiter ausgearbeitet.

**Satz 6;** Das Produkt der Periodizitätsfaktoren der Mathieuschen Differentialgleichung ist Eins:  $\sigma_1 \sigma_2 = 1$ . Die Periodizitätsgleichung, Gl.(26.22), wird ausgewertet und es werden Punkt 5. und 6. des Satzes 4 herangezogen.

$$\begin{aligned} \sigma^2 - [c(\pi) + s'(\pi)] \sigma + c(\pi) s'(\pi) - c'(\pi) s(\pi) &= 0; \\ \sigma^2 - (\sigma_1 + \sigma_2) \sigma + \sigma_1 \sigma_2 &= \sigma^2 - 2c(\pi) \sigma + 1 = 0. \quad \square \end{aligned} \quad (26.23)$$

Gemäß der Definition des Periodizitätskoeffizienten gilt dann weiter:

$$\sigma_1 \sigma_2 = e^{i\pi(\nu_1 + \nu_2)} \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 = 2n, \quad n = (\text{ganz}).$$

**Folgesatz 6.1:** Der charakteristische Exponent,  $\nu$ , der Mathieugleichung ist:

$$\cos(\nu\pi) = c(\pi) = s'(\pi).$$

Dies folgt aus (26.23) mit Rücksicht auf  $\sigma = e^{i\nu\pi}$  und  $w_1(\pi) = c(\pi) = w_2'(\pi) = s'(\pi)$ , Satz 4, Punkt 6. Diese Gleichung kann zur Berechnung des charakteristischen Exponenten benutzt werden, indem man die Mathieusche Differentialgleichung numerisch integriert.

**Folgesatz 6.2:** Zu einer Lösung der Mathieugleichung mit Periodizitätsfaktor  $\sigma \neq \pm 1$  gehört eine unabhängige Lösung mit Periodizitätsfaktor  $\sigma^{-1}$ .

Lösung  $y_1(z)$  hat Periodizitätsfaktor  $\sigma = e^{i\nu\pi}$ , d.h.  $y_1(z) = e^{i\nu\pi} P(z)$ , wobei  $P(z)$  die Periode  $\pi$  hat (Folgesatz 5.1). Nach Satz 1 ist dann auch  $y_2(z) := y_1(-z) = e^{-i\nu\pi} P(-z)$  eine Lösung. Diese sind voneinander linear unabhängig, weil

$$\begin{aligned} \frac{y_2(z + \pi)}{y_1(z + \pi)} &= \frac{e^{-i\nu(z+\pi)} P(-z - \pi)}{e^{i\nu(z+\pi)} P(z + \pi)} = e^{-2i\nu\pi} \frac{e^{-i\nu z} P(-z)}{e^{i\nu z} P(z)} \\ &= e^{-2i\nu\pi} \frac{y_2(z)}{y_1(z)} = \sigma^{-2} \frac{y_2(z)}{y_1(z)} \neq \frac{y_2(z)}{y_1(z)}, \quad \text{weil } \sigma \neq \pm 1. \end{aligned} \quad (26.24)$$

Das Verhältnis der beiden Lösungen ist nicht konstant; daher sind sie unabhängig.

**Folgesatz 6.3:** Die Periodizitätsfaktoren sind dann und nur dann gleich, wenn sie beide  $\pm 1$  sind.

**Folgesatz 6.4:** Die Mathieugleichung hat dann und nur dann fundamentalperiodische Lösungen, wenn die Wurzeln der Periodizitätsgleichung gleich sind.

**Folgesatz 6.5:** Die Mathieugleichung hat dann und nur dann eine Lösung mit der Periode  $2\pi$ , wenn die Wurzeln der Periodizitätsgleichung gleich sind.

Wenn das nicht zuträfe, dann gäbe es eine Lösung der Form:  $v(z) := A y_1(z) + B y_2(z)$ . Dann wäre:  $v(z + 2\pi) := \sigma^2 A y_1(z) + \sigma^{-2} B y_2(z) = v(z)$ . Da  $y_1$  und  $y_2$  linear unabhängig sind, gibt dies  $\sigma^2 = 1$ . Daher ist  $v(z)$  eine Lösung der Mathieugleichung mit Periode  $2\pi$ ,  $v(z + \pi) = \pm v(z)$

**Folgesatz 6.6:** Wenn  $a, q$  reell sind und  $i\nu$  irgend ein charakteristischer Exponent ist, dann ist entweder  $\text{Re}(\nu) = \text{ganz}$  oder  $\text{Im}(\nu) = 0$ .

Denn in diesem Fall ist gemäß Folgesatz 6.1  $\cos(\nu\pi)$  reell und wenn  $\nu = \alpha + i\beta$  ist, dann muss  $\sinh(\alpha\pi) \sin(\beta\pi) = 0$  sein.

**Folgesatz 6.7:** Wenn  $y_1(z)$  eine Lösung mit Periodizitätsfaktor  $\sigma$  ( $\Rightarrow$  charakteristischer Exponent  $i\nu$ ) ist, dann ist  $y_1(-z)$  eine Lösung mit Periodizitätsfaktor  $\sigma^{-1}$  ( $\Rightarrow$  charakteristischer Exponent  $-i\nu$ ). Dies folgt sofort aus Gl.(26.24).

## Fundamental-periodische Lösungen

Die fundamental-periodische Lösungen der Mathieugleichung sind besonders wichtig: Sie geben die Eigenlösungen bei Randwertproblemen. Ihre Eigenwerte trennen im Stabilitätsdiagramm die stabilen von den instabilen Zonen, s.Abb.26.8.

Wie oben gezeigt, der Typ der allgemeinen Lösung hängt von der Art der Wurzeln der Periodizitätsgleichung ab. Man kann da zwei Haupttypen unterscheiden.

1. Im allgemeineren Fall sind die beiden Wurzeln,  $\sigma$  und  $\sigma^{-1}$  verschieden; damit auch die charakteristischen Exponenten  $\pm\nu$ . Das Fundamentalsystem besteht aus einem Paar von pseudoperiodischen Lösungen der Form  $y_1(z) = e^{i\nu z} P(z)$  und  $y_2(z) = y_1(-z) = e^{-i\nu z} P(-z)$ , worin  $P(z)$  die Periode  $\pi$  hat. Jede andere Lösung kann als Linearkombination dieser beiden dargestellt werden. Darunter sind die geraden und ungeraden Lösungen,  $y_1(z) \pm y_2(z)$  besonders wichtig. In diesem Fall besteht die Hauptaufgabe in der Berechnung von  $\nu$ , dem charakteristischen Exponenten; (da alle möglichen charakteristischen Exponenten die Form  $2n \pm i\nu$  haben, kann man vom charakteristischen Exponenten der Differentialgleichung sprechen.) Man kann  $\nu$  oder  $\sigma$  aus der Periodizitätsgleichung (26.23) berechnen; aber erst dann, wenn  $c(\pi)$  bekannt ist. Dieser Wert könnte durch numerische Integration der Differentialgleichung bestimmt werden. Heute ist dies nicht nötig, weil *Mathematica* hierfür Funktionen bietet.
2. Der zweite wichtige Fall gehört zu gleichen Wurzeln der Periodizitätsgleichung. Dann hat jede der Wurzeln den Wert  $\pm 1$ , die zwei pseudoperiodischen Lösungen fallen zusammen und werden zu der einen fundamentalperiodischen Lösung, die gerade oder ungerade ist, Periode  $\pi$  oder  $2\pi$  hat. Während die eine Lösung besonders einfach wird, wird die andere noch komplizierter: Der Satz von Ince besagt, dass diese nicht fundamentalperiodisch ist; daraus folgt dann, dass sie nicht einmal pseudoperiodisch ist. - Diese Situation hat eine Analogie bei den Besselfunktionen:  $J_\nu(z)$  und  $J_{-\nu}(z)$  sind linear unabhängig, wenn  $\nu$  ungeradzahlig ist. Für ganzzahliges  $\nu = n$  ist  $J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$  und die davon unabhängige Lösung, die Neumannfunktion  $Y_n(z)$  enthält einen Logarithmus und weitere kompliziertere Funktionen, vgl. Gln.(25.2-4).

Man könnte meinen, dass man zwei linear unabhängige Lösungen bilden könnte, indem in dem Ausdruck  $e^{i\nu z} P(z) \pm e^{-i\nu z} P(-z)$  den charakteristischen Exponenten gegen 0 oder  $\pi$  gehen läßt. Doch es ergibt sich, dass  $P(z)$  entweder gerade oder ungerade ist, sodass einer dieser beiden Ausdrücke identisch verschwindet.

#### 26.5.4 Der Satz von Ince

**Satz 7, der Satz von Ince:** Ausser im trivialen Fall  $q = 0$  besitzt die Mathieugleichung nie zwei fundamentalperiodische Lösungen zu den selben Werten von  $a$  und  $q$ . In anderen Worten: Wenn eine der beiden Lösungen fundamentalperiodisch ist (also Periode  $\pi$  oder  $2\pi$  besitzt), dann hat die andere keine dieser beiden Perioden; sie ist überhaupt nicht periodisch.

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, dass gerade und ungerade fundamentalperiodische Lösungen nicht gleichzeitig existieren können. Denn gäbe es zwei andere fundamentalperiodische Lösungen, dann wären gerade und ungerade Lösungen Linearkombinationen derselben und damit auch fundamentalperiodisch. Ausserdem ist es unmöglich, dass eine Lösung Periode  $\pi$ , die andere Periode  $2\pi$  hat; denn dann wären die Wurzeln der Periodizitätsgleichung  $+1$  und  $-1$ , was nach Satz 6 unmöglich ist. Wir müssen also beweisen, dass eine gerade Funktion  $c(z)$  und eine ungerade Funktion  $s(z)$  nicht gleichzeitig existieren können, wobei das Paar entweder Periode  $\pi$  oder Periode  $2\pi$  hat.

Im Beweisgang wird zuerst gezeigt, dass die Koexistenz von  $c(z)$  und  $s(z)$  folgende Relation impliziert:

$$\int_0^\pi \sin(2z) c(z) s(z) dz = 0.$$

Und dann wird bewiesen, dass dies unmöglich ist.

Mit dem Operator  $\mathcal{E}$  der Mathieugleichung, Gl.(26.3), wird berechnet:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (s' \mathcal{E}c + c' \mathcal{E}s) dz &= \int_0^\pi (c''s' + c's'') dz + \int_0^\pi J_e(z) (cs' + s'c) dz = 0. \\ \int_0^\pi (c' s')' dz + \int_0^\pi J_e(z) (cs)' dz &= 0. \end{aligned}$$

Das erste Integral wird ausgeführt, im zweiten wird eine partielle Integration vorgenommen:

$$[c' s']_0^\pi + [J_e' c s]_0^\pi - \int_0^\pi J'(z) c s dz = 0.$$

Sowohl  $c$  als auch  $s$  haben entweder Periode  $\pi$  oder Periode  $2\pi$ ; daher haben beide entweder Periodizitätsfaktor  $+1$  oder  $-1$ . Ihr Produkt hat daher Periode  $\pi$ , Das selbe gilt für die Ableitungen  $c', s'$  und ihr Produkt  $c' s'$ . Daher verschwinden die ersten beiden Ausdrücke der obigen Gleichung, da auch  $J_e(z)$  Periode  $\pi$  hat. Es folgt:

$$\int_0^\pi J'(z) c s dz = 4q \int_0^\pi \sin(2z) c s dz = 0. \quad (26.25)$$

Jetzt wird gezeigt, dass dies unmöglich ist. Das Produkt  $u(z) := c(z) s(z)$  hat Periode  $\pi$  und ist ungerade. Ausserdem ist es Lösung der Differentialgleichung (26.26), die von Quadraten und Produkten von Lösungen der Mathieuschen Gleichung erfüllt wird, wie im nachfolgenden Hilfssatz gezeigt wird.

**Hilfssatz:** Wenn  $w_1(z)$  und  $w_2(z)$  Lösungen der Differentialgleichung  $\mathcal{E}w = 0$  sind, dann sind  $u = w_1(z)^2$ ,  $u = w_2(z)^2$  und  $u = w_1(z) w_2(z)$  Lösungen der Differentialgleichung (26.26); dies zeigt man, indem man die Produkte in die Differentialgleichung einsetzt und die Differentialgleichung  $\mathcal{E}w = 0$  für  $w_1$  und  $w_2$  heranzieht. s. sect.26.10 and Notebook K26Appel3rdOrderEq.nb in File AnMe26-4-4A.pdf

$$\frac{d^3u}{dz^3} + 4 J(z) \frac{du}{dz} + 2 J'(z) u = 0. \quad (26.26)$$

Partielle Integration und Berücksichtigung der Periode  $\pi$  von  $u(z)$  gibt:

$$2nI_n = \int_0^\pi u'(z) \cos(2nz) dz. \quad (26.27)$$

Zwei weitere partielle Integrationen geben:

$$8n^3I_n = - \int_0^\pi u'''(z) \cos(2nz) dz.$$

Darin wird  $u'''(z)$  mittels (26.26) eliminiert:

$$\begin{aligned} 8n^3I_n &= 4 \int_0^\pi (a - 2q \cos(2z)) u'(z) \cos(2nz) dz + 2 \int_0^\pi 4q \sin(2z) \cos(2nz) u(z) dz, \\ &= 4 \int_0^\pi (a \cos(2nz) - q \cos[(2n+2)z] - q \cos[(2n-2)z]) u'(z) dz + \\ &\quad + 4q \int_0^\pi (\sin[(2n+2)z] - \sin[(2n-2)z]) u(z) dz. \end{aligned}$$

Mittels (26.26) und (26.25) reduziert sich das auf:

$$8n^3I_n = 4[2naI_n - (2n+2)q I_{n+1} - (2n-2)q I_{n-1}] + 4q[I_{n+1} - I_{n-1}],$$

letztlich auf:

$$I_{n+1} = \frac{2n(a - n^2)}{(2n+1)q} I_n - \frac{2n-1}{2n+1} I_{n-1}, \quad (n \geq 1). \quad (26.28)$$

$I_0 = 0$ . Wäre nun  $I_1 = 0$ , dann gäbe (26.28)  $I_2 = 0$ , dann sukzessive weiter  $I_3 = I_4 = \dots = 0$ . Jedoch sind die  $I_n$  die Fourierkoeffizienten der Sinus Fourierreihe der Funktion  $u(z)$ ; diese ist periodisch und nicht identisch Null. Daher können nicht alle  $I_n$  sein. Daher ist es **unmöglich**, dass

$$I_1 = \int_0^\pi \sin(2z) c s dz = 0$$

ist.  $\square$

Es ist klar, dass die Voraussetzung  $q \neq 0$  notwendig ist. Denn die Differentialgleichung

$$d^2w/dz^2 + a w = 0$$

hat zwei fundamentalperiodische Lösungen, wenn  $a$  das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

### Der Unterschied zwischen der Mathieuschen Differentialgleichung und anderen periodischen Differentialgleichungen

Der Satz von Ince gilt nur für die Mathieusche Differentialgleichung. Es ist wohlbekannt, dass die Meissnersche Differentialgleichung, eq.(26.4) für bestimmte Wertepaare  $\lambda, \gamma = \mu$  zwei fundamentalperiodische Lösungen besitzt, s. Sect.26.8, insbesondere Abb.26.10.

Ebenso weist die Differentialgleichung mit der Funktion

$$J(w) = \theta_0 + 2 \theta_1 \cos(2z) + 2 \theta_2 \cos(4z)$$

für bestimmte Wertetriple  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  zwei fundamentalperiodische Lösungen auf, [1]

### Folgerungen aus dem Satz von Ince

**Folgesatz 7.1:** Fundamentalperiodische Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung sind entweder gerade oder ungerade.

Wäre  $f(z)$  fundamentalperiodisch und weder gerade noch ungerade, dann wäre auch  $f(-z)$  eine von  $f(z)$  unabhängige Lösung, also auch fundamentalperiodisch.

### Folgesatz 7.2:

(1) Wenn  $c(z)$  die Periode  $\pi/2\pi$  hat, dann hat  $s(z)$  folgende Form:

$$s(z) := \pm \pi^{-1} s(\pi) z c(z) + u(z),$$

worin  $u(z)$  die Periode  $\pi/2\pi$  hat.

(2) Wenn  $s(z)$  die Periode  $\pi/2\pi$  hat, dann hat  $c(z)$  folgende Form:

$$c(z) := \pm \pi^{-1} c'(\pi) z s(z) + u(z),$$

worin  $u(z)$  die Periode  $\pi/2\pi$  hat. Damit die obigen Ansätze wirklich Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung geben, muss  $u(z)$  noch näher bestimmt werden. Dies soll hier nicht geschehen. Der nachfolgende Beweis dient nur der Behauptung, dass  $u(z)$  die Periode  $\pi/2\pi$  hat!

Beweis von (1a):  $c(z)$  hat Periode  $\pi$ . Dann ist gem. Satz 4.(6) :  $s'(\pi) = c(\pi) = c(0) = 1$ . Satz 4.(4) gibt dann;

$$s(z + \pi) = s(\pi) c(z) + s(z), \quad s(z + \pi) - s(z) = s(\pi) c(z). \quad (Gl.(a))$$

Mit  $c(z) = c(z + \pi)$

$$u(z) := s(z) - \pi^{-1} s(\pi) z c(z) \Rightarrow u(z + \pi) = s(z + \pi) - \pi^{-1} s(\pi) (z + \pi) c(z + \pi)$$



folgt dann

$$\begin{aligned}
 u(z + \pi) - u(z) &= s(z + \pi) - s(z) - \pi^{-1}c(\pi) \pi c(z) = \\
 &= s(\pi) c(z) - s(\pi) c(z) \quad \text{wegen Gl.(a)} \\
 &= 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

Also hat  $u(z)$  die Periode  $\pi$  und Gl.(a) ist bewiesen. Die anderen drei Resultate behandelt man analog.

**Folgesatz 7.3:** Wenn die Mathiesche Gleichung eine fundamentalperiodische Lösung hat, dann ist die zweite Lösung überhaupt nicht periodisch.

Denn gem. dem vorhergehenden Folgesatz hat die zweite Lösung die Form  $z \times (\text{fundper. L}) + (\text{fundper. L})$ .

**Folgesatz 7.4:** Lösungen der Mathieschen Gleichung mit Periode  $2\pi$  sind fundamentalperiodisch.

Gem. Folgesatz 6.5 können solche Lösungen nur existieren, wenn die Wurzeln der Periodizitätsgleichung gleich sind, wenn also eine fundamentalperiodische Lösung existiert. In diesem Fall ist die andere Lösung nicht periodisch; so muss die Lösung mit der Periode  $2\pi$  die fundamentalperiodische sein.

## Die vier Typen von fundamentalperiodischen Lösungen der Mathieschen Differentialgleichung

Nach der Diskussion der fundamentalperiodischen Lösungen im vorhergehenden Paragraphen gibt es also davon vier Typen, nämlich die vier Kombinationen gerade oder ungerade Funktion mit Periode  $\pi$  oder  $2\pi$ . Für jeden Typ gibt es eine besondere Art von Fourierreihe. Die darin vorkommenden trigonometrischen Funktionen sind in Tab.26.1 in der 5. Spalte aufgelistet. In der 4. Spalte sind die entsprechende Bezeichnung jeder Funktion und die Fourierreihen angegeben. Die Koeffizienten braucht man nicht zu berechnen, da die Funktionsprogramme in *Mathematica* implementiert sind. Zuerst muss man zu einem gegebenen numerischen Wert von  $q$  den (oder die) Zahlenwert(e) der Eigenwerte  $a_n(q)$  bzw.  $b_n(q)$  mittels der Befehle

$$a_n := \text{MathieuCharacteristicA}[n,q] \quad \text{bzw.} \quad b_n := \text{MathieuCharacteristicB}[n,q]$$

berechnen. Die fundamentalperiodische Lösung ergibt sich dann über:

$$\text{MathieuC}[a_n,q,z] \quad \text{bzw.} \quad \text{MathieuS}[b_n,q,z]$$

Tabelle 26.1: Die vier Typen von fundamentalperiodischen Lösungen

$a$	Sy.	Per.	Symmetrien / Reihen	pass. trig. Fu.	and. pass. trig. Fu
$a_{2n}$	g	$\pi$	$c(z + \pi) = c(z) = c(-z)$	$\cos(2nz)$	$F(\cos^2 z)$
			$ce_{2n}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos(2rz)$		
$a_{2n+1}$	g	$2\pi$	$c(z + \pi) = -c(z) = -c(-z)$	$\cos((2n + 1)z)$	$\cos z F(\cos^2 z)$
			$ce_{2n+1}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos((2r + 1)z)$		
$b_{2n+1}$	u	$2\pi$	$s(z + \pi) = -s(z) = s(-z)$	$\sin((2n + 1)z)$	$\sin z F(\cos^2 z)$
			$se_{2n+1}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin((2r + 1)z)$		
$b_{2n}$	u	$\pi$	$s(z + \pi) = s(z) = -s(-z)$	$\sin(2nz)$	$\sin z \cos z F(\cos^2 z)$
			$se_{2n+2}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin((2r + 2)z)$		

Jede dieser Lösungen hat  $n$  Nullstellen im Intervall  $0 < z < \pi/2$ .

**Die vier Typen von Lösungen, die komplementär zu den fundamentalperiodischen Lösungen sind.**

Die zugehörige zweite Lösung wird mit  $fe_n(z,q)$  bzw.  $ge_n(z,q)$  bezeichnet, s. Tab.26.2, Derzeit kann diese nur durch numerische Integration der Mathieschen Differentialgleichung gefunden werden; oder man benutzt die Ausdrücke für die Reihenkoeffizienten, die in [4] angegeben sind.

Tabelle 26.2: Die vier Typen von nicht periodischen Lösungen, die zu den fundamentalperiodischen gehören

$a$	Sy.	Per.	Darstellung	pas. trig. Fu.
$a_{2n}$	u	$\pi$	$s(z) = \pi^{-1}s(\pi)zc(z) + u(z)$	$\sin((2n+2)z)$
			$fe_{2n}(z, q) = C_{2n}(q)[z ce_{2n}(z, q) + f_{2n}(z, q)]$	
			$f_{2n}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} f_{2r+2}^{(2n)} \sin((2r+2)z)$	
$a_{2n+1}$	u	$2\pi$	$s(z) = -\pi^{-1}s(\pi)zc(z) + u(z)$	$\sin((2n+1)z)$
			$fe_{2n+1}(z, q) = C_{2n+1}(q)[z ce_{2n+1}(z, q) + f_{2n+1}(z, q)]$	
			$f_{2n+1}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} f_{2r+1}^{(2n+1)} \sin((2r+1)z)$	
$b_{2n+1}$	g	$2\pi$	$c(z) = \pi^{-1}c'(\pi)zs(z) + u(z)$	$\cos((2n+1)z)$
			$ge_{2n+1}(z, q) = S_{2n+1}(q)[z se_{2n+1}(z, q) + g_{2n+1}(z, q)]$	
			$g_{2n+1}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} g_{2r+1}^{(2n+1)} \cos((2r+1)z)$	
$b_{2n}$	g	$\pi$	$c(z) = -\pi^{-1}c'(\pi)zs(z) + u(z)$	$\cos(2nz)$
			$ge_{2n+2}(z, q) = S_{2n+2}(q)[z se_{2n+2}(z, q) + g_{2n+2}(z, q)]$	
			$g_{2n+2}(z, q) = \sum_{r=0}^{\infty} g_{2r}^{(2n+2)} \cos(2rz)$	

**Die beiden nicht-fundamentalperiodischen Lösungen**

Sind  $a$  und  $q$  vorgegeben und fällt  $a$  mit keinem der Eigenwerte  $a_n(q)$ ,  $b_n(q)$  zusammen, dann erhält man zwei unabhängige Lösungen mit:

$$\text{MathieuC}[a,q,z] \quad \text{bzw.} \quad \text{MathieuS}[a,q,z] .$$

Diese beiden Lösungen sind aber nicht die Floquetlösungen.

**Der charakteristische Exponent**

Der charakteristische Exponent  $\nu$  hängt von  $a$  und  $q$  ab und wird mittels

$$\text{MathieuCharacteristicExponent}[a,q]$$

berechnet.

**26.6 Mathematica Notebook: Beispiele zu Mathieufunktionen**

Im Notebook K26Mathieufunktionen im File AnMe26-6.pdf werden verschiedene Mathieufunktionen mittels der oben angeführten *Mathematicabefehle* und durch numerische Integration der Mathieschen Differentialgleichung berechnet. Es wird auch gezeigt, dass im Eigenwertfall zwar

$$\text{MathieuC}[a_n,q,z] \quad \text{bzw.} \quad \text{MathieuS}[b_n,q,z]$$

die fundamentalperiodische Lösung liefern, dass aber der zweite bzw. erste Befehl ein Resultat gibt, dass keine Lösung sein kann.

## 26.7 Anwendungen der Mathieufunktionen

### 26.7.1 Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt III

[3], pp.326 - 330.

### 26.7.2 Das gedämpfte Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt

Die Bewegungsgleichung für ein Pendel mit einer Dämpfung verursacht durch eine lineare Reibungskraft lautet für kleine Schwingungsamplituden ( $\phi \ll 1$ ):

$$\ddot{\phi} + \delta \dot{\phi} + \left[ \frac{g}{\ell} - \frac{d}{\ell} \omega^2 \cos(\omega t) \right] \phi = 0; \quad \delta > 0.$$

Obige Gleichung wird mit den Substitutionen:

$$z = \frac{\omega t}{2}, \quad \Lambda = \frac{4g}{\omega^2 \ell} = 4 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad q = \frac{2d}{\ell}, \quad \vartheta = \frac{\delta}{\omega}$$

in die folgende verwandelt:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + 2\vartheta \frac{d\phi}{dz} + (\Lambda - 2q \cos(2z)) \phi = 0.$$

Die nachfolgende Transformation der abhängigen Variablen:

$$\phi(z) = e^{-\vartheta z} w(z)$$

bringt die obige Gleichung auf die Standardform der Mathieschen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + (a - 2q \cos 2z) \phi = 0; \quad a = \Lambda - \vartheta^2.$$

Diese Abänderung von  $a$  bewirkt, dass das Stabilitätsgebiet noch vergrößert wird, es ergibt sich eine Stabilisierung des Pendels durch Dämpfung.

### 26.7.3 Die starke Fokussierung des Synchrotrons

[3], pp.338 - 343.

## 26.8 Die Meissner Gleichung

Die Meissnersche Differentialgleichung, eq.(26.4),

$$\frac{d^2w}{dz^2} + (\lambda + \gamma \Phi(z))w = 0, \quad -\pi \leq z \leq \pi. \quad (26.29)$$

mit  $\Phi(z)$  aus Abb.26.1 wurde u.a. von Dôme, CERN, Genf, [9], untersucht. Sie kann mit elementaren Funktionen gelöst werden. Hiervon geben wir nur das Stabilitätsdiagramm an, das von M. Bell, CERN, angefertigt wurde.

## 26.9 Hills equation: Even and Odd solutions

Dies wird im Satz 2 der sect.26.5 benötigt und im Notebook K26EvenOdd.nb im File AnMe26-9.pdf behandelt.

## 26.10 Appels Theorem für eine bestimmte Differentialgleichung dritter Ordnung

Dieser Satz wird im Beweis des Satzes von Ince benötigt. Er wird bewiesen im Notebook K26Appel3rdOrderEq.nb im File AnMe26-10.pdf.

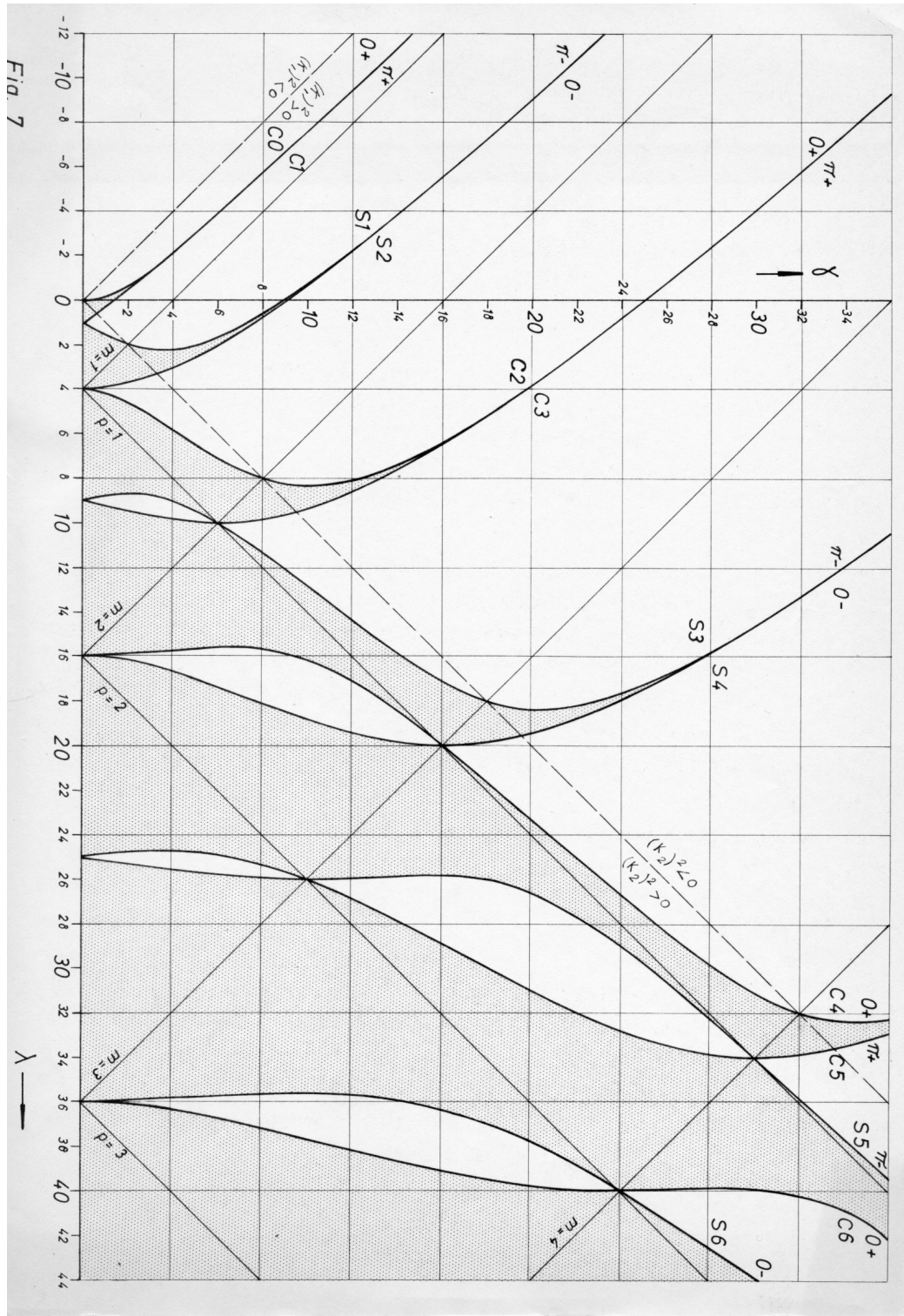


Fig. 7

Abbildung 26.10: Das Stabilitätsdiagramm der Meissner-Gleichung, eq.(26.4). Es gibt Stellen, an denen zwei graue Stabilitätsgebiete einen gemeinsamen Punkt haben. Für die entsprechenden Wertepaare von  $\mu$  und  $\lambda$  hat die Meissner-Gleichung zwei linear unabhängige fundamentalperiodische Lösungen. Aus [9].

# Literaturverzeichnis

- [1] F.M. Arscott: Periodic differential equations. An introduction to Mathieu, Lamè, and allied functions. Pergamon Press, 1964.
- [2] E. T. Whittaker, G.N. Watson: A course of modern analysis. Cambridge university press. 1927. Chaps.18, 19 and 23.
- [3] J. Meixner, F.W. Schäfke, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Springer Grundlehren 1954.
- [4] N. W. McLachlan: Theory and application of Mathieu functions. Oxford 1947.
- [5] [5] M. Abramowitz, I. A. Stegun: Handbook (Pocketbook) of mathematical functions. Dover, 1965. (Verlag Harri Deutsch, 1984)
- [6] R.B. Neal (Ed.) The Stanford Two-Mile Accelerator. W.A. Benjamin, N.Y. 1968.
- [7] I.M. Kapchinskiy: Theory of resonance linear accelerators. Harwood academic publishers. 1985
- [8] V. A. Jakubovich, V. M. Starzhinskii: Linear differential equations with periodic coefficients. Krieger Pub Co, 1975.
- [9] G. Dôme: Some general considerations about the possible electromagnetic waves in a symmetrical lossless periodic structure, with application to compensated structures. CERN int. report ISR-300/LI/68-1. European Organization for Nuclear Research, Geneva, Switzerland, 1968. 73 + 7 pp.  
Chikara Sato: Correction of Stability Curves in Hill-Meissner's Equation. Mathematics of Computation, Vol. 20, No. 93 (Jan., 1966), pp. 98-106.