

Kapitel 5

Die Greensche Funktion als inverser Operator

In diesem Kapitel wird die Greensche Funktion für einen linearen Differentialoperator eingeführt und ihre Funktionsweise als inverser Operator erklärt. Als konkrete Beispiele werden wieder das elektrostatische Potential einer Ladungsverteilung und die harmonischen Schwingungen einer Saite behandelt. Ebenso wird die formale Analogie mit den linearen Gleichungssystemen herangezogen, besonders für die grundlegende Bedingung für die Existenz des inversen Operators; in Kapitel 1. wurde ja bereits gezeigt, dass z. B. die inhomogene Gleichung für die schwingende Saite nicht lösbar ist, wenn k gleich einem der Eigenwerte k_n aus Gl. (1.23) ist.

Zum Vergleich werden nun in vier Spalten (S 5.00 bis 5.03) das lineare Gleichungssystem, das lineare Randwertproblem und die beiden Beispiele angeschrieben. Analoge Beziehung stehen darin immer in einer gleichen Zeile. Im linearen Gleichungssystem, Spalte a), sind die $n \times n$ Matrix A und der n -zeilige Spaltenvektor B gegeben, gesucht ist der n -zeilige Lösungsvektor X . In Spalte b) entspricht die mit dem linearen Differentialoperator L gebildete inhomogene Differentialgleichung zusammen mit ihren Randbedingungen dem linearen Gleichungssystem. In Spalte c) berechnen wird das Potential Φ einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ im freien Raum (vgl. Kap.1.1), in Spalte d) die harmonischen Schwingungen einer an den Enden eingespannten Saite (vgl. Kap.1.2).

Beim linearen Gleichungssystem ist zu unterscheiden, ob die Determinante $\det(A)$ der Koeffizientenmatrix A : 1) von Null verschieden ist oder 2) Null ist. Im Fall $\det(A) \neq 0$ existiert genau eine zu A inverse Matrix A^{-1} , damit eine eindeutige Lösung $X = A^{-1}B$; insbesondere $X = 0$ für $B=0$. In Spalte b) bzw. d), Zeile (2) gibt es eine analoge Bedingung: Die Parameter von L müssen derart sein, dass kein Eigenwert von L vorliegt. Der inversen Matrix A^{-1} entspricht dann als zu L inverser Operator die Greensche Funktion $G(x, x')$. Der Einheitsmatrix E entspricht der Deltafunktion $\delta(x - x')$. Das negative Vorzeichen derselben ist zweckmäßig, aber in keiner Weise von fundamentaler Bedeutung. Man nennt x (bzw. \vec{r}) den **Aufpunkt**, den Punkt an dem das Feld beobachtet wird, das von der im **Quellpunkt** x' (bzw. \vec{r}') befindlichen Quelle der Stärke 1 erzeugt wird. Auch die Greensche Funktion muss Randbedingungen unterworfen werden, (Zeile (3b)), meist (aber beileibe nicht immer!) denselben wie die Feldfunktion ϕ (bzw. Φ). In Zeile (4) wird die Lösung ϕ (bzw. Φ) mittels des inversen Operators $L^{-1} = G$ dargestellt. Ein solches Integral heißt **quellenmäßige Darstellung**. Wie man zu dieser Beziehung allgemein kommt, wird weiter unten gezeigt werden. Den entsprechenden Ausdruck in Spalte c) kann man mit folgender physikalischer Überlegung begründen: Aus dem Coulombschen Gesetz folgt für das Potential einer Punktladung e :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R}, \quad (5.1)$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

R ist der Abstand zwischen Aufpunkt und Quellpunkt. Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ersetzen wir die Punktladung e durch $\rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$; Integration über das gesamte Volumen der Ladungsverteilung gibt c(4). Vergleich der beiden Zeilen c(4) gibt dann c(5). (Das ist ein Beweis dieser Gl., sobald die Zeile c(4a) bewiesen worden ist, was unten erfolgt). Der Ausdruck für die Greensche Funktion der Saitenschwingung, Gl.d(5), wird in Kapitel 9.2 bewiesen werden. Man sieht sofort, dass dieser für $k = k_n = n\pi/\ell$ ungültig wird.

Das homogene Problem hat in allen vier Spalten nur die identisch verschwindende Lösung.

Bei verschwindender Determinante $\det(A) = 0$, Fall 2), hat das zu a(1) gehörige lineare homogene Gleichungssystem d linear unabhängige (l.u.a.) Lösungsvektoren X_i . $d = n - r$ heißt der **Defekt der Matrix**, r ist deren **Rang**. Ebenso hat das zu a(8) adjungierte System, das mit der zu A transponierten Matrix \tilde{A} gebildet wird, d l.u.a. Lösungsvektoren Y_i . Die inhomogene Gleichung ist dann und nur dann lösbar, wenn der Spaltenvektor B auf all den Lösungen Y_i orthogonal steht, a(11). Es gibt also keine eindeutige inverse Matrix zu A , sondern nur entweder gar keine oder eine d -fache Mannigfaltigkeit von Inversen. Ebenso hat bei Vorliegen eines Eigenwertes der Operator L (eine oder mehrere) nicht identisch verschwindende Lösungen $\phi_n(x)$ der homogenen Gleichung c(8). Es gibt einen zu L adjungierten Operator L^* (dessen Konstruktion in Kap. 4 beschrieben wird) und auch dieser besitzt dann Eigenlösungen $\psi_n(x)$. Das inhomogene Problem ist dann und nur dann lösbar, wenn die Störfunktion $f(x)$, die auf der rechten Seite von c(1) auftritt, auf den $\psi_s(x)$ orthogonal steht. Beim in Spalte c) behandelten elektrostatischen Problem gibt es keine solchen Eigenwerte; es ist immer eindeutig lösbar. Die Eigenwerte der schwingenden Saite sind in Gl. (1.23) angegeben worden. Fällt k mit einem solchen Eigenwert zusammen, $k = k_s = s\pi/\ell$, dann gibt es jeweils eine Eigenfunktion $\phi_s(x)$ s. Gl.(1.24). Der adjungierte Operator L^* fällt hier mit L zusammen, ebenso $\phi_s(x)$ mit $\psi_s(x)$. Die Bedingung für die Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung, d(11), ist erfüllt, wenn $g_0(x)$ eine Linearkombination einer oder mehrerer der Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ mit $n \neq s$ ist. Dann kann die durch $g_0(x)$ dargestellte Kraft die s -te Eigenschwingung nicht anregen, es kommt nicht zu Resonanz. Es gibt dann eine Greensche Funktion im erweiterten Sinn, Gl.d(12), die ebenfalls gerade den s -ten Term nicht enthält. Doch ist diese von geringerer Bedeutung.

Die dem Greenschen Satz entsprechend Matrixgleichung (a13) ist eine ziemlich triviale Identität.

Als nächstes soll die Darstellung Gl.(c4) strenger begründet werden. Dazu wird der 2. Greensche Satz, Gl. (c13) (s.Gl. (4.2)) verwendet. Wir setzen

$$u = \Phi(\vec{r}), \quad v = G(\vec{r}, \vec{r}').$$

Die Fläche \mathcal{F} , die das Volumen \mathcal{V} umschließt ist eine Kugel deren Mittelpunkt \vec{r}_0 und Radius R_0 so gewählt werden, dass die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ vollständig im Inneren der Kugel enthalten ist.

$$\begin{aligned} I &= \int \int_{\mathcal{V}} \int \left[\Phi(\vec{r}') \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta' \Phi(\vec{r}') \right] d^3\vec{r}' = \\ &= \int \int_{\mathcal{F}} d\mathcal{F} \left[\Phi(\vec{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right]. \end{aligned}$$

Auf der linken Seite werden die Differentialoperatoren mittels der Differentialgleichung (c1) und (c3) eliminiert. Bei (c3) folgt aus der später in Kap. 8 bewiesenen Symmetrie der Greenschen Funktion gegen Vertauschung ihrer Argumente, dass auch gilt:

$$\Delta' \Phi(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')/\varepsilon, \quad \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Damit wird weiter:

$$\begin{aligned} I &= \int \int_{\mathcal{V}} \int \left[-\Phi(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') + G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}')/\varepsilon \right] d^3\vec{r}' = \\ &= -\Phi(\vec{r}) + \int \int_{\mathcal{V}} \int G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}')/\varepsilon d^3\vec{r}' = 0. \end{aligned}$$

Dies gibt Gl.(c4), weil das Oberflächenintegral auf der rechten Seite des Greenschen Satzes wegen der Randbedingungen (c1) und (c2) gegen Null geht, wenn das Volumenintegral über den ganzen Raum erst streckt wird, also $R_0 \rightarrow \infty$ strebt. Da $d\mathcal{F}$ sich wie R_0^2 verhält, müssen Φ und G genügend stark gegen Null streben. Dies trifft zu: Aus (c5) sieht man, dass $G \sim 1/R \sim 1/R_0$, daher $\frac{\partial G}{\partial n} \sim 1/R^2 \sim 1/R_0^2$. Das Verhalten von Φ wird abgeschätzt, indem man in Gl. (c4) im Integranden $1/R$ in eine Taylorreihe um \vec{r}_0 entwickelt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{|(\vec{r} - \vec{r}_0) + (\vec{r}_0 - \vec{r}')|} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + \dots \\ \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}_0|} \int \int_{\mathcal{V}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \int \int_{\mathcal{V}} \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') (\vec{r}_0 - \vec{r}') + \dots = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon R_0} + \dots \end{aligned}$$

Q ist die Gesamtladung. Φ und $\partial\Phi/\partial n$ nehmen daher mind. ebenso stark ab wie G bzw. $\partial G/\partial n$. Ist $Q = 0$, dann können höhere Multipolmomente zum Potential beitragen und dann enthält der obige Ausdruck für Φ nur noch höhere inverse Potenzen von R_0 .

In gleicher Weise beweist man die quellenmäßige Darstellung (d4) mittels der Greenschen Formel (d13). Diese wird wieder für die gestrichenen Variablen verwendet. Wir setzen also in der eindimensionalen Form des Greenschen Satzes 2. Art, Gl.(4.11):

$$u = \phi(x') \quad \text{und} \quad v = G(x, x')$$

und bekommen

$$\begin{aligned} &\int_0^\ell \left[\phi(x') \frac{d^2 G}{dx'^2} - G(x', x) \frac{d^2 \phi}{dx'^2} \right] dx' = \\ &= \int_0^\ell dx' \left[\phi(x') \left(-k^2 G - \delta(x - x') \right) - G(x', x) \left(-k^2 \phi + g_0(x') \right) \right] = \\ &= \left[\phi(x') \frac{dG}{dx'} - G(x, x') \frac{d\phi}{dx'} \right] \Big|_{x'=0}^{x'=\ell} = 0. \end{aligned}$$

Der integrale Ausdruck auf der rechten Seite von (d13) verschwindet wegen der Randbedingungen für ϕ und G . Auf der linken Seite werden die zweiten Ableitungen von ϕ und G mittels (d1) bzw. der zu (d3) gleichlautenden Differentialgleichung in x' eliminiert. Nach Kürzen, Ausführen der Integration über die Deltadistribution und unter Benutzung der Symmetrie der Greenschen Funktion $G(x, x')$ in x und x' erhalten wir als Resultat:

$$\phi(x) = \int_0^\ell dx' G(x, x') g_0(x').$$

Im allg. Fall eines beliebigen linearen Differentialoperators wird der verallgemeinerte Greensche Satz, Gl.(b13), zur Ableitung der quellenmäßigen Darstellung herangezogen. In diesem ist auch zu berücksichtigen, dass der lineare Differentialoperator L nicht selbstadjungiert sein muss. Deswegen muss im allgemeinen Fall (abweichend von den Beispielen in Spalte c) und d) die Greensche Funktion mit dem zu L adjungierten Differentialoperator L^* in den gestrichenen Variablen definiert und berechnet werden, Gl.(d3).

Die Greensche Funktion kann auch benützt werden, um inhomogene Randbedingungen zu berücksichtigen. Wir betrachten wieder das elektrostatische Problem ohne Ladungen im Raum; deswegen muß das Potential die Laplacegleichung erfüllen. Aber auf der Randfläche \mathcal{F} ist eine Ladungsdichte $\eta(\vec{r})$ vorgegeben:

$$\Delta' \Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n'} = -\frac{\eta}{\epsilon} \quad \text{längs } \mathcal{F}.$$

Zu diesem Problem wird die Greensche Funktion mit homogener Randbedingung eingeführt.

$$\Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = 0 \quad \text{längs } \mathcal{F}.$$

Wir setzen im Greenschen Satzes 2. Art, Gl.(1),

$$u = \Phi(\vec{r}') \quad \text{und} \quad v = G(\vec{r}', \vec{r})$$

und bekommen:

$$\begin{aligned} & \int \int \int_V \left[\Phi(\vec{r}') \underbrace{\Delta' G(\vec{r}', \vec{r})}_{= -\delta(\vec{r} - \vec{r}')} - G(\vec{r}', \vec{r}) \underbrace{\Delta' \Phi(\vec{r}')}_{= 0} \right] d\vec{r}' = -\Phi(\vec{r}) = \\ & = \int \int_{\mathcal{F}} d\vec{\mathcal{F}}' \left[\Phi(\vec{r}') \underbrace{\frac{\partial G(\vec{r}', \vec{r})}{\partial n'}}_{= 0} - G(\vec{r}', \vec{r}) \underbrace{\frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial n'}}_{= -\eta/\epsilon} \right] \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Endformel:

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon} \int \int_{\mathcal{F}} G(\vec{r}, \vec{r}') \eta(\vec{r}') d\vec{\mathcal{F}}'.$$