

Kapitel 9

Vollständige orthogonale Funktionensysteme

Die Problemstellung wird zuerst am Beispiel der Fourierreihen erklärt. Bei diesen gibt es zwei sich unterscheidene Betrachtungsweisen, je nachdem welcher Integralbegriff zugrunde gelegt wird.

Riemann Integral	Klassische Theorie	Darstellung der Funktion
Lebesgue Integral	L^2 Theorie	Approximation im quadratischen Mittel

9.1 Fourierreihen

9.1.1 Klassische Theorie der Fourierreihen

Im Intervall $[-\pi, \pi]$ ist eine zumindest stückweise stetige Funktion $f(x)$ vorgegeben. Diese soll in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x)] \quad (9.1)$$

Wir setzen das Äquivalenzzeichen (\sim) an Stelle des Gleichheitszeichens ($=$), weil die Summe der trigonometrischen Reihe im allg. nicht für alle Werte x des Intervalles mit den vorgegebenen Funktionswerten übereinstimmen wird. Zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten a_n, b_n wird Gl.(9.1) mit $\sin(j x)$ bzw. $\cos(j x)$ multipliziert und von $-\pi$ bis π integriert. Auf der rechten Seite wird die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht; die entstehenden Integrale können mittels der folgenden Orthogonalität- und Normierungsrelationen ausgewertet werden

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n x) \sin(j x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n x) \cos(j x) dx = \pi \delta_{nj} (1 \pm \delta_{0n}); \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n x) \cos(j x) dx &= 0, \quad n, j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für die Entwicklungskoeffizienten a_n und b_n die **Eulerschen Formeln**

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(j x) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(j x) dx. \quad (9.2)$$

Damit kommen wir zu folgender **Definition einer Fourierreihe** : Eine Fourierreihe ist eine trigonometrische Reihe, für die eine Funktion $f(x)$ existiert, sodaß die Reihenoeffizienten durch die Eulerschen Formeln (9.2) dargestellt werden.

Die oben vorgenommene Vertauschung von Summation einer Reihe und der Integration ist sicher zulässig (hinreichende Bedingung), wenn die Reihe gleichmäßig konvergiert. Bei Fourierreihen ist die gleichmäßige Konvergenz nicht notwendig, da der folgende Satz gilt: Eine Fourierreihe darf immer gliedweise integriert werden; die resultierende Reihe konvergiert überall (Carslaw §109). Folgerung: Eine trigonometrische Reihe ist keine Fourierreihe, wenn die aus ihr durch gliedweise Integration hervorgehende Reihe nicht überall konvergiert. So ist die unten formal definierte Reihe $S(x)$ keine Fourierreihe :

$$S(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n x)}{\ln n} \quad (9.3)$$

$$\int^x S(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n x)}{n \ln n} + const. \quad \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty \quad \text{da} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \rightarrow \infty .$$

Statt (9.1) und (9.2) ist auch die folgende komplexe Schreibweise üblich:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx . \quad (9.4)$$

Damit läßt sich auch ein Zusammenhang zwischen Potenzreihen und Fourierreihen herstellen. Setzt man in die folgenden Potenzreihe mit reellen Koeffizienten c_n

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\varphi} \\ z^n &= r^n e^{in\varphi} = r^n [\cos(n \varphi) + i \sin(n \varphi)] \end{aligned}$$

ein, dann kann man Real- und Imaginärteil trennen:

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots := P(r, \varphi) + iQ(r, \varphi) \quad (9.5)$$

mit

$$\begin{aligned} P(r, \varphi) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \cos(n\varphi), \\ Q(r, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \sin(n\varphi). \end{aligned}$$

Wenn $r = 1$ der Konvergenzradius der Potenzreihe ist, dann ist die Konvergenz der obigen Fourierreihe innig mit der Konvergenz der Potenzreihe auf dem Konvergenzkreis $r = 1$ verknüpft.

Der obige Zusammenhang zwischen Potenz- und Fourierreihe gibt auch ein Hilfsmittel zur Berechnung von Fourierkoeffizienten ohne Benützung der Eulerschen Formeln. Setzt man in den nachfolgenden Potenzreihen $z = r e^{i\varphi}$, trennt Real- und Imaginärteil, setzt anschließend $r = 1$ und führt dann auf der linken Seite Umformungen durch, bekommt man:

Bs.1 $0 \leq r \leq 1, z \neq 1 :$

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \\ r=1: &= \ln\left[2 \cos \frac{\varphi}{2}\right] + i \frac{\varphi}{2}; \\ \ln\left[2 \cos \frac{\varphi}{2}\right] &\sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(n\varphi)}{n}, \\ -\pi < \varphi < \pi & \\ \frac{\varphi}{2} &\sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(n\varphi)}{n}. \end{aligned}$$

Abbildung.9.1

Bs.2 $0 \leq r \leq 1, z \neq \pm 1 :$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+z)}{\ln(1-z)} &= 2\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots\right] \\ r=1: = \ln\left(i \cot \frac{\varphi}{2}\right) &= \ln\left[\left|\cot \frac{\varphi}{2}\right|\right] + i \frac{\pi}{2} \text{sign}(\varphi); \\ \frac{1}{2} \ln\left[\left|\cot \frac{\varphi}{2}\right|\right] &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\varphi]}{2n+1}, \\ -\pi < \varphi < \pi & \\ \text{sign}(\varphi) &\sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\varphi]}{2n+1}. \end{aligned}$$

Abbildung.9.2

Bs.3

$$\begin{aligned} |\varphi| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\varphi]}{(2n+1)^2}, \\ -\pi \leq \varphi \leq \pi & \\ \int_0^{\varphi} \text{sign}(\varphi') d\varphi' &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\varphi} d\varphi' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\varphi']}{2n+1}, \\ = |\varphi| &= -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\varphi']}{(2n+1)^2} \Bigg|_{\varphi'=0}^{\varphi'= \varphi}, \\ &= -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\varphi]}{(2n+1)^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \\ \varphi = \frac{\pi}{2}: \quad \frac{\pi}{2} &= 0 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

Abbildung.9.3

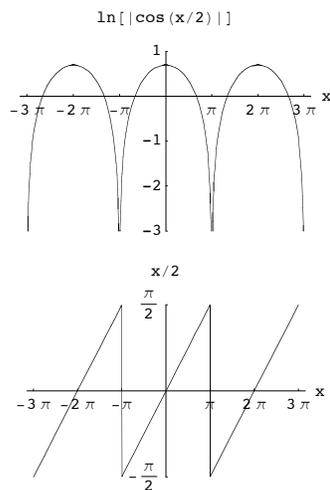


Abbildung 9.1

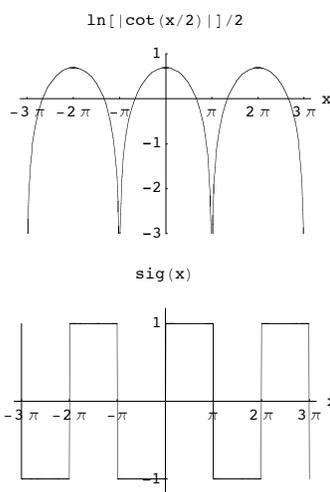


Abbildung 9.2

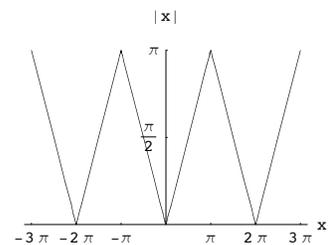


Abbildung 9.3

Abbildung 9.1: Abbildungen zur vorigen Seite

Die geraden Funktionen in Bs.1 und 2 haben logarithmische Singularitäten; diese sind schwach genug, sodaß die Integrale in den Eulerschen Formeln (9.2) existieren. Die Fourierkoeffizienten verhalten sich asymptotisch wie $1/(2n)$; die resultierenden Reihen sind also nur bedingt konvergent. Die Reihe in Bs.3 geht aus der zweiten von Bs.2 hervor, indem man gliedweise integriert. Die Fourierkoeffizienten dieser neuen Reihe verhalten sich asymptotisch wie $1/(2n)^2$; die Reihe ist gleichmäßig und absolut konvergent; daher gibt sie die Funktion überall getreu wieder. Die vorhergehenden Beispiele zeigen, daß sogar schwach singuläre Funktionen in eine Fourierreihe entwickelt werden können. Nur ist diese dann nicht konvergent an der Stelle der Singularität und im übrigen Intervall sehr langsam konvergent.

Die Konvergenz der Fourierreihe verlangt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0.$$

Dies ist für eine Fourierreihe gewährleistet gemäß dem **Riemann-Lebesgue Lemma** (Carslaw §105): Ist $f(x)$ beschränkt und integrierbar in (a, b) oder ist das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

absolut konvergent (wenn $f(x)$ unbeschränkt ist), dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(n x) dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(n x) dx = 0.$$

Aus den vorhergehenden Beispielen sieht man auch einen Zusammenhang zwischen dem Wohlverhalten einer Funktion und dem Grad des Verschwindens der Fourierkoeffizienten mit steigendem n . Ein besonders instruktives Beispiel ist die folgende trigonometrische Reihe:

$$f(x) := \frac{(\pi^2 - x^2)^\alpha}{\pi^{2\alpha}} \sim \Gamma(\alpha + 1) \pi^{1/2} \left[\frac{1/2}{\Gamma(\alpha + 3/2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{\alpha+1/2}(n\pi)}{(n\pi/2)^{\alpha+1/2}} \cos(n x) \right]. \quad (9.6)$$

(A. Erdelyi et al., Higher Transcendental Functions, vol.II, p.103, Eq.(52); Druckfehler!). Diese ist eine Fourierreihe für $\alpha > -1/2$. Mittels der asymptotischen Formel für die Besselfunktionen

$$J_\mu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - (\mu + 1/2)\frac{\pi}{2}\right]; \quad |x| \gg 1, \quad |x| \gg \mu, \quad |\arg(x)| < \pi$$

findet man das asymptotische Verhalten der Fourierkoeffizienten a_n für große Werte von n :

$$|a_n| < \frac{C'}{(n\pi)^{\alpha+1}} = \frac{C}{n^\nu}.$$

Je nach dem Wert von α findet man verschiedenes Verhalten der Funktion $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$ an den Intervallenden $x = \pm\pi$ (s. Abb.9.4). Dementsprechend ergibt sich das asymptotische Verhalten der Reihenkoeffizienten (s. Abbn.9.5 und 9.6) und das Konvergenzverhalten der Fourierreihe (bzw. trigonometrischen Reihe für $\nu \leq 1/2$, $\alpha \leq -1/2$), s. nachfolgende Tabelle.

Selbst die divergenten Reihen enthalten noch die Information über die Funktion, die sie darstellen sollen. Langsam konvergierende bzw. divergierende Reihen können durch Reihentransformationen in schneller konvergierende bzw. konvergierende Reihen transformiert werden. Dabei kann man aus den resultierenden Reihen Ausdrücke erhalten, die mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmen; dies ist aber kein Wundermittel, s. beiliegendes Mathematica Notebook ShanksFR !

$$|a_n| < \frac{C}{n^\nu}.$$

Bild	α	$f(x)$	$f'(x)$	ν	Reihe ist
a	$\alpha > 1$	stetig, periodisch	stetig, periodisch	> 2	glm. u. abs. konv.
b	$\alpha = 1$	stetig, periodisch	endl.Sprung	$= 2$	glm. u. abs. konv.
c	$0 < \alpha < 1$	stetig, periodisch	$f'(\pm\pi) = \pm\infty$, integr.	$1 < \nu < 2$	glm. u. abs. konv.
d	$\alpha = 0$	$f(x) \equiv 1$	$f'(x) \equiv 0$	$\nu = 1$	bedingt konv.
e	$-1 < \alpha < 0$	$f(\pm\pi) = \infty$, integr.	$f'(\pm\pi) = \pm\infty$, n. integr.	$0 < \nu < 1$	bedingt konv.
f	$\alpha = -1$	$f(\pm\pi) = \infty$, n. integr.	$f'(\pm\pi) = \pm\infty$, n. integr.	$\nu = 0$	nicht konv.
g	$\alpha < -1$	$f(\pm\pi) = \infty$, n. integr.	$f'(\pm\pi) = \pm\infty$, n. integr.	$\nu < 0$	divergent

Definition: Eine Funktion heißt (stückweise) **glatt** (E. smooth), wenn sie stetig ist und wenn ihre erste Ableitung (stückweise) stetig ist.

Dann kann man behaupten:

1. Ist $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ glatt und periodisch, dann kann f in eine Fourierreihe entwickelt werden.
2. Die Fourierreihe konvergiert in jedem abgeschlossenen Intervall, in dem f stetig ist.

Für ein asymptotisches Verhalten der Fourierkoeffizienten der Art

$$|a_n| < \frac{C}{n^\nu}, \quad |b_n| < \frac{C}{n^\nu}$$

ergibt sich das folgende Konvergenzverhalten der zugehörigen Fourierreihe:

$$\begin{aligned} \nu > 1 & \quad \text{gleichmäßige und absolute Konvergenz;} \\ \frac{1}{2} < \nu \leq 1 & \quad \text{bedingte Konvergenz, an manchen Stellen Divergenz möglich.} \end{aligned}$$

Für $\nu \leq 1/2$ ist die Reihe keine Fourierreihe mehr.

Der Zusammenhang zwischen dem Wohlverhalten der Funktion und dem asymptotischen Verhalten der Fourierkoeffizienten kann auch aus den Eulerschen Formeln (9.2) abgeleitet werden: Sind $f(x)$ und $f'(x)$ stetig und $f(-\pi + 0) = f(\pi - 0)$, dann formt man das Integral für a_n bzw. b_n um gemäß :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} f(x) \sin(nx) \frac{1}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) dx \\ &\leq 0 - \frac{C}{\pi n}. \end{aligned}$$

Damit ist ein asymptotisches Verhalten von a_n wie $\frac{1}{n}$ sichergestellt. Doch kann man mit weitergehenden Beweismitteln dies stärkere Bedingung

$$|a_n| \leq \frac{K}{n^2} \tag{9.7}$$

beweisen. Dazu benötigen wir die sog.

Dirichletschen Bedingungen:

1. a) $f(x)$ ist beschränkt für alle $x \in [a, b]$.

b) $[a, b]$ kann in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden, in denen $f(x)$ monoton ist.

oder

2. a) $f(x)$ hat endlich viele Unendlichkeitsstellen in $[a, b]$; werden kleine Umgebungen derselben ausgeschlossen, dann ist $f(x)$ im Restintervall endlich. Das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

ist absolut konvergent.

b) wie oben.

Die Monotoniebedingungen b) verhindern, daß $f(x)$ wild oszilliert.

Erfüllt $f(x)$ die Dirichletschen Bedingungen, $f'(x)$ aber nicht mehr, dann

$$|a_n| < \frac{C}{n}, \quad |b_n| < \frac{C}{n}; \quad (9.8)$$

die Fourierreihe ist bedingt konvergent. Erfüllt auch $f'(x)$ die Dirichletschen Bedingungen, dann

$$|a_n| < \frac{C}{n^2}, \quad |b_n| < \frac{C}{n^2}; \quad (9.9)$$

die Fourierreihe ist absolut und gleichmäßig konvergent. Dieses Verhalten zeigen auch die Beispiel Bs1, Bs2, und Bs3.

Der Beweis der ersten obigen Behauptung wird angedeutet (Carslaw §104) :

$$\pi a_n = \sum \int_{c_r+0}^{c_{r+1}-0} f(x) \cos(xn) dx;$$

c_r ist eine Unstetigkeitsstelle. Für obiges Integral wird der 2. Mittelwertsatz der Integralrechnung herangezogen.

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \sum \left[f(c_r + 0) \underbrace{\int_{c_r+0}^{\xi} \cos(xn) dx}_{\leq 2/n} + f(c_{r+1} - 0) \underbrace{\int_{\xi}^{c_{r+1}-0} \cos(xn) dx}_{\leq 2/n} \right], \\ &< \frac{2}{n} \underbrace{\sum \left[f(c_r + 0) + f(c_{r+1} - 0) \right]}_{2pM}; \end{aligned}$$

$\xi \in (c_r, c_{r+1})$, p = Zahl der Sprünge, M = Maximum der Funktion $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$.

Zur Frage, wann eine Fourierreihe die Funktion $f(x)$ wirklich darstellt: Die Teilsumme der Fourierreihe (1) mit den Koeffizienten (2) ist gegeben durch:

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \quad (9.10)$$

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \cos(kx') dx', \quad b_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \sin(kx') dx'.$$

Diese Ausdrücke für die Koeffizienten werden in die obige Gleichung eingesetzt und in dieser endlichen Summe können die Summation und die Integrationen vertauscht werden. Die trigonometrischen Funktionen lassen sich mittels der Additionstheoreme zusammenfassen. Die resultierende Summe läßt sich als geschlossener Ausdruck schreiben:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x') [1 + 2 \cos(x - x') + 2 \cos[2(x - x')] + \dots + 2 \cos[n(x - x')]] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(2n + 1)(x - x') \right]}{\sin \left[\frac{1}{2}(x - x') \right]} dx'. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Gemäß der üblichen Definition ist die Summe der unendlichen Reihe der Grenzwert:

$$s(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(2n + 1)(x - x') \right]}{\sin \left[\frac{1}{2}(x - x') \right]} dx'. \quad (9.12)$$

Das ist das Dirichletsche Integral. Erfüllt $f(x)$ die Dirichletschen Bedingungen, dann gilt (Carlaw, §91):

$$s(x) = \frac{1}{2}[f(x+o) + f(x-o)]. \quad (9.13)$$

Ist $f(x)$ überdies auch stetig, dann gilt sogar:

$$s(x) = f(x).$$

Ob also die Fourierreihe die Funktion an einer Stelle x wirklich wiedergibt, ist also dann noch lokales Verhalten der Funktion bestimmt.

Die Dirichletschen Bedingungen sind mehr als nur die Stetigkeit einer Funktion. Die Stetigkeit einer Funktion reicht nicht für die Konvergenz der Fourierreihe. FEJER hat eine Funktion konstruiert, die stetig ist, deren Fourierreihe in abzählbar unendlich vielen Stellen divergiert.

Das Gibbsche Phänomen

Eine Diskrepanz zwischen einer Funktion und der zugehörigen Fourierreihe ist daher vor allem dort zu erwarten, wo die Funktion unstetig ist. Eine der in einem solchen Fall auftretenden Pathologien ist das GIBBSsche Phänomen. Dieses untersuchen wir an der zweiten Reihe von Bs 2, S. 6.3:

$$f(x) := \frac{\pi}{4} \operatorname{sig}(x) \sim \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots$$

Die Teilsumme dieser Reihe wird in ein Integral umgewandelt:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} = \sum_{k=0}^n \int_0^x d\xi \cos[(2k+1)\xi] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \sum_{k=0}^n [e^{i\xi(2k+1)} + e^{-i\xi(2k+1)}]. \end{aligned}$$

Die Summe kann ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n [e^{i\xi(2k+1)} + e^{-i\xi(2k+1)}] = \\ &= e^{i\xi} \frac{1 - e^{2i(n+1)\xi}}{1 - e^{2i\xi}} + e^{-i\xi} \frac{1 - e^{-2i(n+1)\xi}}{1 - e^{-2i\xi}} = \\ &= e^{i(n+1)\xi} \frac{e^{-i(n+1)\xi} - e^{i(n+1)\xi}}{e^{-i\xi} - e^{i\xi}} + e^{-i(n+1)\xi} \frac{e^{i(n+1)\xi} - e^{-i(n+1)\xi}}{e^{i\xi} - e^{-i\xi}} = \\ &= \frac{\sin[(n+1)\xi]}{\sin \xi} (e^{i(n+1)\xi} + e^{-i(n+1)\xi}) = \frac{\sin[2(n+1)\xi]}{\sin \xi} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgender Ausdruck für die Teilsumme:

$$s_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \frac{\sin[2(n+1)\xi]}{\sin \xi} \approx \frac{1}{2} \int_0^y d\eta \frac{\sin[\eta]}{\eta} = \frac{1}{2} Si(y). \quad (9.14)$$

Dabei wurden folgende Variablentransformationen eingeführt:

$$\eta := 2(n+1)\xi, \quad y := 2(n+1)x.$$

$Si(y)$ ist der Integralsinus:

$$Si(y) := \int_0^y d\eta \frac{\sin(\eta)}{\eta}.$$

Der Graph dieser Funktion (Abb.9.2) zeigt:

1. $Si(y) = -Si(-y)$;
2. $Si(0) = 0$; $Si(\infty) = \pi/2$.
3. Relative Maxima bei $y = \pi$, $y = 3\pi$, $y = 5\pi, \dots$; Größtes Maximum: $Si(\pi) = 1.851\dots$
4. Relative Minima bei $y = 2\pi$, $y = 4\pi$, $y = 6\pi, \dots$

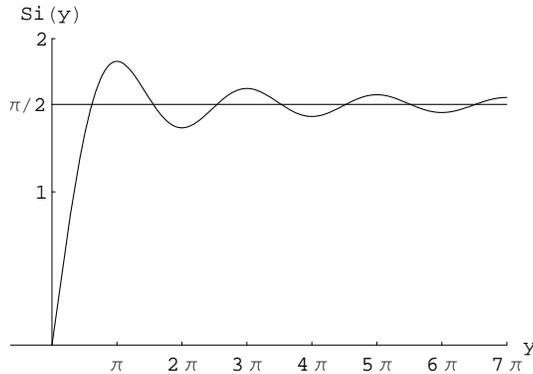


Abbildung 9.2: Der Integralsinus $Si(y)$

Zur Berechnung des Wertes der Fourierreihe an der Sprungstelle $x = 0$ sind zwei Grenzübergänge durchzuführen, nämlich $x \rightarrow 0+$ und $n \rightarrow \infty$. Je nach der Reihenfolge dieser beiden Grenzübergänge erhält man verschiedene Resultate:

$$x = 0 : \Rightarrow Si(0) = 0. \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Si(0) = 0.$$

$$x > 0 : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{\pi}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \underbrace{Si(2(n+1)x)}_{Si(\infty) = \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Widerspruch !

Man kann weitere Arten von Grenzübergängen einführen, indem man den Wert von x an den von n koppelt:

$$x_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Damit ergibt sich zunächst:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \frac{\pi}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} Si(\pi) = \frac{\pi}{4} \underbrace{\frac{2}{\pi} 1.851\dots}_{= 1.18\dots}$$

Koppelt man n und x in folgender Weise

$$q = 2(n+1)x_n = \text{const.}$$

dann ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_n) = \frac{\pi}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} Si(q) = \frac{\pi}{4} (-1.18 \dots 0 \dots 1.18).$$

Jeder Wert aus dem Intervall $[-1,18\dots, 1.18\dots]$ ist als Grenzwert möglich, je nach dem Wert von q !

Bei Fourierreihen gibt es zwei Typen von Singularitäten, die Lebesguesche Singularität und die DuBoisReymondsche Singularität.

Lebesguesche Singularität:

$$f(x) \sim \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{Gibbsches Phänomen.}$$

Die konjugierte Fourierreihe, die aus der vorhergehenden hervorgeht, indem man den Sinus durch den Cosinus ersetzt, (ihr Partner in Bs. 2) zeigt die

DuBoisReymondsche Singularität:

$$f(x) \sim \cos(x) + \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{5} \cos(5x) + \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty.$$

Bei einer Approximation der Summe der Fourierreihe durch Fejersche Mittel wird das Gibbsche Phänomen ausgebügelt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1(x) + s_2(x) + \dots + s_n(x)}{n} \longrightarrow f(x), \quad \forall x.$$

Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie die Fourierreihen zu folgenden im Intervall $(-\pi, \pi)$ definierten Funktionen:

$$\begin{aligned} a) f(x) &= |x|; & b) f(x) &= |\sin x|; & c) f(x) &= \cos(ax), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \\ d) f(x) &= e^{\cos \phi} \cos(\sin \phi); & e) f(x) &= e^{\cos \phi} \sin(\sin \phi) \quad (e^z \text{ mit } z = e^{i\phi}). \end{aligned}$$

Geben Sie auch das asymptotische Verhalten der Fourierkoeffizienten und das Konvergenzverhalten der Fourierreihe an.

2. Bestimmen Sie aus Gl.(9.6) die Fourierreihe zur schiefsymmetrischen Funktion

$$x (\pi^2 - x^2)^\nu.$$

Wie hängen ihr Konvergenzverhalten und die Eigenschaften der Funktion zusammen?

Fourier Series and the Gibb's Phenomenon. Fejer Sum

Notebook K9GibbsPhenomenon.nb = AnMe9-1-1-1.pdf

Anwendung der Shanks-Transformation zu Konvergenzbeschleunigung und -erzeugung

Notebook K9ShanksTfVorl.nb = AnMe9-1-1-2.pdf

9.1.2 Moderne Theorie der Fourierreihen

Im Intervall $[-\pi, \pi]$ ist eine Funktion $f(x)$ vorgegeben. Diese soll in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x)]. \quad (9.15)$$

Für die Funktion $f(x)$ werden aber allgemeinere Funktionen, sogar verallgemeinerte Funktionen zugelassen. Wiederum werden für die Entwicklungskoeffizienten a_n und b_n die **Eulerschen Formeln**

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(j x) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(j x) dx. \quad (9.16)$$

herangezogen; aber für die Integrale wird nicht mehr der Riemannsche, sondern der Lebesguesche Integralbegriff verwendet. Der wesentliche Unterschied ist nun: Zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ können dieselben Entwicklungskoeffizienten liefern, wenn sie sich nur um eine Menge vom Maße Null (abzählbare Menge) unterscheiden. Z.B. $f(x)$ genüge den Dirichschletschen Bedingungen. $f_1(x)$ ist definiert als:

$$f_1(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad f_1(x) = 0 \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Beide geben die gleichen Fourierkoeffizienten. Um wieder einen eindeutige Zuordnung zwischen Funktionen und Fourierkoeffizienten herzustellen, muss man Klassen äquivalenter Funktionen einführen: $f(x) = \{f(x), f_1(x), \dots\}$. Man fragt nicht mehr: "Gibt die Fourierreihe die Funktion $f(x)$ wieder?"; dies ist sicher nicht möglich, weil die ganze Klasse von äquivalenten, aber verschiedenen Funktionen die gleichen Fourierkoeffizienten liefert. **Sondern** man führt ein neues Qualitätskriterium, die **Approximation im quadratischen Mittel** ein, man fordert

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x)], \quad (9.17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x) - s_n(x)|^2 = 0. \quad (9.18)$$

9.2 Allgemeine Theorie der orthogonalen Funktionensysteme

Die einzelnen Funktionen eines Systems von Funktionen $\{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \}$ werden analog wie die Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \}$ eines Raumes behandelt:

Vektoren	Funktionen
$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n, \dots\}$	$\{\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots, \psi_n(x), \dots\}, \quad x \in [a, b]$
	z.B. $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}, \quad x \in [-\pi, \pi].$

Lineare Abhängigkeit

$sa := \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n, \dots = 0$
 und $\exists \lambda_i \neq 0 \Rightarrow \vec{a}_i$ linear abhängig
 $sa = 0$ nur für $\lambda_i = 0 \Rightarrow$
 \vec{a}_i linear unabhängig

$sa := \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \dots + \lambda_n \psi_n, \dots = 0$
 und $\exists \lambda_i \neq 0 \Rightarrow \psi_i$ linear abhängig
 $sa = 0$ nur für $\lambda_i = 0 \Rightarrow$
 ψ_i linear unabhängig.

z.B. $\{e^{ix}, \cos x, \sin x\}$ linear abhängig;
 z.B. $\{\cos x, \sin x\}$ linear unabhängig.

Inneres Produkt

$(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$;

$$(f, g) := \int_a^b f^*(x) g(x) dx$$

Norm

$$\|\vec{a}\|^2 := (\vec{a}, \vec{a});$$

$$\|f\|^2 := (f, f) := \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Orthogonalität

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0;$$

$$(f, g) = 0.$$

Aus der Orthogonalität folgt die Endgültigkeit der Entwicklungskoeffizienten in einer Entwicklung nach diesem Funktionensystem. Z.B. werden zuerst in der Entwicklung der Funktion $f(x)$ 11 Terme als Näherungssumme (s.Gl. 9.17) genommen:

$$f(x) \sim s_{10}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{10} [a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x)].$$

Man stellt fest, dass diese Näherungssumme die Funktion $f(x)$ noch nicht mit ausreichender Genauigkeit wiedergibt und nimmt noch weitere 10 Terme dazu:

$$f(x) \sim s_{20}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{20} [a_n \cos(n x) + b_n \sin(n x)].$$

Dann bleiben die im ersten Fall bestimmten Koeffizienten $a_0, a_1, b_1, \dots, a_{10}, b_{10}$ im zweiten Fall unverändert, es kommen nur noch neue Terme hinzu. Dies träfe nicht zu, wenn man nach einem nichtorthogonalen System entwickeln würde.

Orthonormalität

$$\{\vec{e}_i\}, \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}; \quad \{\chi_i(x)\} \quad (\chi_i, \chi_k) = \delta_{ik}.$$

Ein System von linear unabhängigen Vektoren (oder Funktionen)

$$\{\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots\}$$

kann mittels des **Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens** in ein orthonormiertes übergeführt werden. Der erste Schritt ist:

$$\phi_1(x) := \frac{\psi_1(x)}{\sqrt{\|\psi_1\|}}.$$

Der zweite Schritt beginnt mit dem Ansatz:

$$\phi_2(x) := c_{21}\phi_1(x) + c_{22}\psi_2(x)$$

und den Forderungen:

$$\begin{aligned} (\phi_1(x), \phi_2(x)) &= c_{21}\|\phi_1\| + c_{22}(\phi_1(x), \psi_2(x)) \stackrel{!}{=} 0, \\ \|\phi_2\| &\stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Dies sind zwei Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten c_{21} und c_{22} . Der dritte Schritt verlangt den Ansatz:

$$\phi_3(x) := c_{31}\phi_1(x) + c_{32}\phi_2(x) + c_{33}\psi_3(x)$$

und die Forderungen:

$$(\phi_1(x), \phi_3(x)) \stackrel{!}{=} 0, \quad (\phi_2(x), \phi_3(x)) \stackrel{!}{=} 0, \quad \|\phi_3\| \stackrel{!}{=} 1.$$

zur Bestimmung der 3 Koeffizienten c_{31}, c_{32}, c_{33} . Dieses Verfahren muss immer weiter geführt werden.

Basis = orthonormiertes System

$$\begin{aligned} \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}, & & \{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\}, & x \in [a, b]; \\ (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}; & & (\phi_i, \phi_k) = \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Orthogonale Vektoren (Funktionen) sind auch linear unabhängig.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \dots + \lambda_n \phi_n &= 0 \quad \Big| \cdot \phi_j \int \\ \lambda_1 (\phi_1, \phi_j) + \lambda_2 (\phi_2, \phi_j) + \dots + \lambda_j (\phi_j, \phi_j) + \dots + \lambda_n (\phi_n, \phi_j) &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $(\phi_k, \phi_j) = \delta_{jk}$ folgt daraus $\lambda_j = 0$ für alle j .

Aufspannen eines Vektors (einer Funktion) auf eine Basis

$$\vec{x} = \sum_{n=1}^d x_n \vec{e}_n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad x \in [a, b];$$

mit

$$x_k = (\vec{e}_k, \vec{x}).$$

mit

$$c_k = (\phi_k, f) = \int_a^b \phi_k^*(x) f(x) dx.$$

Vollständigkeit einer Basis

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{x}) &= \left(\sum_{k=1}^d x_k^* \vec{e}_k, \sum_{n=1}^d x_n \vec{e}_n \right) = \\ &= \sum_{n=1}^d |x_n|^2 \geq \sum_{n=1}^{d-1} |x_n|^2 \geq 0; \quad \int_a^b |f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \phi_n(x)|^2 dx \geq 0. \end{aligned} \quad (9.20)$$

(9.19)

Aus der letzten Ungleichung folgt nun durch Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f\|^2 - \sum_{n=0}^N \left[c_n^* \underbrace{(\phi_n, f)}_{= c_n} + c_n \underbrace{(f, \phi_n)}_{= c_n^*} \right] + \sum_{n=0}^N |c_n|^2 \\ 0 &\leq \|f\|^2 - 2 \sum_{n=0}^N |c_n|^2 + \sum_{n=0}^N |c_n|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^N |c_n|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun die **Besselsche Ungleichung**:

$$\sum_{n=0}^N |c_n|^2 \leq \|f\|^2. \quad (9.21)$$

Aus dieser folgt: die linke Seite ist auf alle Fälle beschränkt, die Reihe muss konvergieren. Haben die Koeffizienten c_n ein asymptotisches Verhalten wie $c_n \sim K/n^\alpha$, mit $K = \text{const.}$, dann muss gelten:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{(n^\alpha)^2} < \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon > 0.$$

Wenn die Koeffizienten c_n die Besselsche Ungleichung nicht erfüllen, dann kann die Reihe keine Fourierreihe sein. Bei einer solchen müssen die Koeffizienten c_n dann auch das entsprechende asymptotische Verhalten haben.

Die Approximation im quadratischen Mittel

Eine Funktion $f(x)$ wird nach einer Basis entwickelt:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^N \gamma_n \phi_n(x). \quad (9.22)$$

Wie sollen Koeffizienten γ_n gewählt werden, damit die obige Summe oder Reihe die Funktion $f(x)$ möglichst gut approximiert? Und wie soll die Güte der Approximation beurteilt werden? Es wird folgende Forderung gestellt:

$$\mathcal{E} = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=0}^N \gamma_n \phi_n(x) \right|^2 dx \stackrel{!}{=} \min. \quad (9.23)$$

Diese Forderung heißt die Approximation im quadratischen Mittel. Sie verlangt auch, dass die Koeffizienten $\gamma_n = c_n$, also gleich den Fourierkoeffizienten sein müssen. Ausmultiplizieren gibt nämlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \|f\|^2 - \sum_{n=0}^N \left[\gamma_n^* \underbrace{(f, \phi_n)}_{= c_n^*} + \gamma_n \underbrace{(\phi_n, f)}_{= c_n} \right] + \sum_{n=0}^N |\gamma_n|^2 = \\ &= \|f\|^2 + \sum_{n=0}^N |\gamma_n - c_n|^2 - \sum_{n=0}^N |c_n|^2 \stackrel{!}{=} \min. \quad \Rightarrow \quad \gamma_n = c_n. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Das Minimum wird für $\gamma_n = c_n$ erreicht.

Die Vollständigkeit eines Systems

Wir lassen nun $N \rightarrow \infty$ gehen und fordern, dass $\mathcal{E} \rightarrow 0$ geht. Definition: Ein **System** $\{\phi_n\}$ heisst **vollständig**, wenn gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \phi_n(x) \right|^2 dx = 0. \quad (9.25)$$

Daraus folgt so wie in Gln.(9.24):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2. \quad (9.26)$$

Aus Gl.(9.19) ersieht man: Wenn die Basis zu klein ist (z.B. nur bis $d-1$ geht), dann gibt es Vektoren, die parallel zu \vec{e}_d sind, und dann ist:

$$(\vec{x}, \vec{x}) - \sum_{n=1}^{d-1} |x_n|^2 > 0.$$

Niemand wird so ungeschickt sein, aus einem Funktionensystem eine Funktion wegzulassen, z.B. im System der trigonometrischen Funktionen $\cos x$ wegzustreichen. Doch kann es sein, dass man bei der Wahl eines Systems nicht weiss, dass eine oder mehrere Funktionen fehlen. Auch ist die Antwort, ob ein System vollständig ist, nicht immer offensichtlich. Z.B. es ist eine Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, \pi]$ definiert. Diese soll nach trigonometrischen Funktionen entwickelt werden. Welche Funktionen bilden für diesen Zweck ein vollständiges System: alle, oder nur die Sinusse oder nur die Cosinusse? - Die Vollständigkeitsrelation (9.26) gibt ein Hilfsmittel, um die Vollständigkeit zu testen, s. Notebook K9ComplRelFB.nb .

Die Abgeschlossenheit eines Systems

Definition: Ein **System** \vec{e}_n bzw. $\{\phi_n\}$ heisst **abgeschlossen**, wenn gilt:

Es gibt eine Vektor \vec{a} , der folgende Bedingungen erfüllt:

$$(\vec{a}, \vec{e}_k) = 0, \quad \forall k = 1, \dots, d.$$

Folgt daraus

$$\vec{a} \equiv 0,$$

dann heisst das System **abgeschlossen**.

Gibt es mindestens einen Vektor $\vec{a} \neq 0$, heisst es nicht abgeschlossen.

Es gibt eine Funktion ψ mit

$$(\psi, \phi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, N$$

Wenn das Funktionensystem $\{\phi_n\}$ **abgeschlossen** ist, muss $\psi = 0$ sein.

Es kann gezeigt werden, dass die beiden Begriffe equivalent sind, d.h. ein vollständiges System ist abgeschlossen und umgekehrt (s. Tricomi).

Die Vollständigkeitsrelation

Die Vollständigkeitsrelation einer Basis (= eines vollständigen orthonormierten Funktionensystems) lautet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^*(x') \phi_n(x) = \delta(x - x'). \quad \left| \quad \int_a^b \phi_i^*(x) dx \right. \quad (9.27)$$

$\phi_n^*(x')$ ist die zu $\phi_n(x)$ adjungierte Funktion. Es muss also gelten:

$$\int_a^b \phi_i^*(x) \phi_n(x) dx = \delta_{in}.$$

Im allgemeinsten Fall können die Funktionensysteme $\{\phi_n^*(x')\}$ und $\{\phi_n(x)\}$ wirklich verschieden sein. doch müssen sie immer zueinander in der eben angegebenen Weise in Beziehung stehen.

Die Vollständigkeitsrelation hat nur als Distribution einen mathematischen Sinn, d.h. sie muss immer unter einem Integral stehen und mit geeigneten Funktionen multipliziert sein. Für eine Plausibilitätsbetrachtung vergessen wir diese Bedingungen für den Augenblick. Wir nehmen an, die Summe enthalte nicht die Funktion $\phi_i(x)$. Wir multiplizieren beide Seiten der obigen Gleichung mit gerade dieser Funktion und integrieren. Dabei vertauschen wir diese Operation mit der Summation. Dann bekommen wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^*(x') \cdot \underbrace{\int_a^b \phi_i^*(x) \phi_n(x) dx}_{= \delta_{in}} = \int_a^b \phi_i^*(x) \delta(x - x') dx = \phi_i^*(x').$$

Fehlt in der Summe auf der linken Seite die Funktion $\phi_i(x)$, dann bekommen wir für alle Integrale, damit für die linke Seite den Wert Null, auf der rechten Seite ein davon verschiedenes Resultat. Ist das System vollständig, dann sind am Ende beide Seiten gleich.

Bei einem System von Vektoren kann die Vollständigkeitsrelation mittels des Kroneckerproducts formuliert werden. Das **Kroneckerproduct** der $m \times n$ Matrix A mit der $r \times s$ Matrix B :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix}$$

ist eine Matrix mit $m r$ Zeilen und $n s$ Spalten der Form:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Für zwei Vektoren, die einen zweidimensionalen Raum aufspannen, gibt dies:

$$\vec{e}_1 = (1 \ 0), \quad \vec{e}_2 = (0 \ 1); \quad \vec{e}_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^2 \vec{e}_n^* \otimes \vec{e}_n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (1 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes (0 \ 1) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$