

Übungsaufgaben

zu

Analytische Methoden der Angewandten Theoretischen Physik WS 2012/13, 2st

2013-02-014

Prüfungsmodus: Bitte lösen Sie insgesamt mindestens je 1 Übungsaufgaben zu den Kapiteln, wo solche angegeben sind. Nur für Kapitel 12 und 13 zwei Beispiele verschiedenen Typs. Wenn Sie auf Schwierigkeiten treffen, nehmen Sie Verbindung (telefonisch, mündlich oder per Email) mit mir auf, damit Sie keine Zeit mit Suche oder langen Überlegungen verlieren.

Während der Prüfung werden die vorgelegten Lösungen besprochen. Bei Fragen können Sie immer das Skriptum konsultieren. Sie brauchen keine Formeln auswendig lernen, Sie sollen nur wissen, wo Sie diese finden können. Terminvereinbarung telefonisch, mündlich oder per Email.

1 Beispiele linearer Randwertprobleme

1. Eine homogene Kugel (Radius R , Dichte μ , spezifische Wärme c , Wärmeleitfähigkeit λ) hat die Anfangstemperatur T_0 . Sie gibt ihre Wärme an den unendlichen freien Raum ab ($h =$ Koeffizient des äußeren Wärmeleitvermögens). Stellen Sie alle Gleichungen dieses gemischten Randwertproblems auf. Die Lösung dieser Gleichungen ist nicht verlangt.
2. Eine metallische Kugel (Radius R) ist geerdet und trägt die Gesamtladung Q . Stellen Sie alle Gleichungen dieses Randwertproblems auf. Die Lösung dieser Gleichungen ist nicht verlangt.

2 Typen von Differentialoperatoren. Charakteristiken.

1. Wo ist die Tricomische Differentialgleichung

$$u_{xx} + x u_{yy} = 0$$

elliptisch, parabolisch, hyperbolisch? Berechnen Sie die charakteristischen Kurven in allen drei Fällen.

3 Allgemeine Formulierung des linearen Randwertproblems

Keine Übungsbeispiele

4 Adjungierter Differentialoperator. Verallgemeinerter Greenscher Satz

1. Berechnen Sie den Faktor ρ , der den Operator \bar{L} des Radialanteils der dreidimensionalen Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten, Gl.(4.29), in einen selbstadjungierten verwandelt.
2. Berechnen Sie:
 - a) den adjungierten Operator und den Strom für den Operator der hypergeometrischen Differentialgleichung (4.28).
 - b) den Faktor ρ , der den Operator \bar{L} dieser Differentialgleichung (4.30) in einen selbstadjungierten verwandelt.

5 Die Greensche Funktion als inverser Operator.

Keine Übungsbeispiele

6 Krummlinige Koordinaten und Vektoranalysis

1. Betrachten Sie die Potentialgleichung in ebenen Polarkoordinaten, Gl.(6.81) im Ringbereich

$$a \leq r \leq b, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi.$$

- (a) Geben Sie alle partikulären Lösungen an, die am Rand $r = a$ verschwinden.
 - (b) Geben Sie alle partikulären Lösungen an, die am Rand $r = b$ verschwinden.
 - (c) Geben Sie alle partikulären Lösungen an, die an beiden Rändern $r = a$ und $r = b$ verschwinden.
2. Geben Sie in excentrischen ebenen Polarkoordinaten, §6.5.7, den Nablaoperator, die Divergenz, die Rotation und den Laplaceoperator an.

7 Die Separierbarkeit der skalaren Helmholtz- und Potentialgleichung

1. Die homogene Potentialgleichung ist im Äusseren eines Rechtecks vorgeschrieben. Auf dem Rand des Rechtecks sind Neumannsche Randbedingungen vorgeschrieben.
 - (a) Welche Randbedingung muss die Lösung im Unendlichen erfüllen ?
 - (b) Ist die homogene Potentialgleichung in Kartesischen Koordinaten separabel ?
 - (c) ist das Randwertproblem im Aussenraum des Rechtecks separabel ?

8 Reihen

Keine Übungsbeispiele.

9 Vollständige orthogonale Funktionensysteme

1. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten einer der folgenden in $(-\pi, \pi)$ definierter Funktionen mittels der Eulerschen Formeln; diskutieren Sie das Konvergenzverhalten der Fourierreihe und begründen Sie dieses aus dem Verhalten der Funktion $f(x)$:
 - (a) $f(x) = |x|$;
 - (b) $f(x) = \sin |x|$;
 - (c) $f(x) = \cos(ax)$, $a \notin \mathbb{Z}$.
2. Berechnen Sie aus den nachfolgenden Potenzreihen Fourierreihen; diskutieren Sie das Konvergenzverhalten der Fourierreihe und begründen Sie dieses aus dem Verhalten der Funktion $f(x)$:
 - (a) $\ln(1 + z^2) = -[z^2 + z^4/2! + \dots]$;
 - (b) $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$, $z = a e^{i\varphi}$, $0 \leq a < 1$;

(c) $e^z = 1 + z/1! + z^2/2! + \dots$ $z = a e^{i\varphi}, a \in \mathbb{R}$.

Benützen Sie diese Entwicklung um die Werte folgender Integrale zu finden:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos(n x) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \sin(\sin x) \sin(n x) dx.$$

3. Entwickeln Sie die folgende Funktion in ein Fourierintegral:

$$f(t) = g(t) \sin(\omega_0 t), \quad g(t) = 1 \text{ für } |t| < T, \quad g(t) = 0 \text{ für } |t| > T.$$

10 Die δ -Distribution und die Vollständigkeitsrelation

1. Die Legendrepolynome $P_n(x)$ genügen der folgenden Orthonormierungsrelation:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_k(x) dx = \delta_{n,k} 2/(2n+1); \quad n, k \in \mathbb{N}_0.$$

Geben Sie die Vollständigkeitsrelation an (Beweis ist nicht verlangt !)

2. Die Tschebyscheffpolynome $T_n(x)$ genügen der folgenden Orthonormierungsrelation:

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_k(x) \sqrt{1-x^2} dx = \delta_{n,k} (1 + \delta_{n,0}) \pi/2; \quad n, k \in \mathbb{N}_0.$$

Geben Sie die Vollständigkeitsrelation an (Beweis ist nicht verlangt !)

3. Eine Funktion $f(x)$, $x \in [0, \pi]$ wird symmetrisch fortgesetzt, $f(-x) = f(x)$. Wie lauten das zugehörige vollständige orthogonale Funktionensystem und seine Vollständigkeitsrelation?
4. Eine Funktion $f(x)$, $x \in [0, \pi]$ wird antisymmetrisch fortgesetzt, $f(-x) = -f(x)$. Wie lauten das zugehörige vollständige orthogonale Funktionensystem und seine Vollständigkeitsrelation?
5. Berechnen Sie das Normierungsintegral der Funktionen $J_m(j'_{mn}r/a) e^{im\phi}$, $J'_m(j'_{mn}) = 0$. Geben Sie dann die Vollständigkeitsrelation an. Beachten Sie, dass auch $j'_{0,0} = 0$ eine Nullstelle von $J'_0(x) = -J_1(x)$ ist.

11 Symmetrie der Greenschen Funktion

Keine Übungsaufgaben.

12 Verfahren zur Konstruktion der Greenschen Funktion

1. Berechnen Sie die Greensche Funktion des folgenden eindimensionalen Differentialoperators

$$L(u) = u''$$

zu einer der angegebenen Randbedingungen mittels partikulärer Integrale und - soweit möglich - mittels Eigenfunktionsentwicklungen. Eigenfunktionsentwicklungen können berechnet werden, indem man $L(u) := u'' + k^2 u$ betrachtet und am Ende k gegen Null gehen läßt.

(a) $u(0) = u(a) = 0;$

- (b) $u(-a) = u(a) = 0$;
- (c) $u(0) = u'(a) = 0$;
- (d) $u'(0) = u'(a) = 0$.

2. Berechnen Sie die Greensche Funktion des folgenden eindimensionalen Differentialoperators

$$L(u) = u'' + k^2u$$

zu einer der angegebenen Randbedingungen mittels partikulärer Integrale und - soweit möglich - mittels Eigenfunktionsentwicklungen.

- (a) $u(-a) = u(a) = 0$;
- (b) $u(0) = u'(a) = 0$;
- (c) $u'(0) = u'(a) = 0$.
- (d) $u(a) = 0$, $u(\infty)$ erfüllt Ausstrahlungsbedingung.

3. Berechnen Sie die Greensche Funktion des folgenden eindimensionalen Differentialoperators

$$L(u) := xu'' + u', \quad u(a) = 0, \quad u(0) = \text{endlich}$$

zu den angegebenen Randbedingungen mittels partikulärer Integrale und - soweit möglich - mittels Eigenfunktionsentwicklungen. Eigenfunktionsentwicklungen können berechnet werden, indem man $L(u) := xu'' + u' + k^2u$ betrachtet und am Ende k gegen Null gehen läßt.

4. Berechnen Sie die Greensche Funktion der zweidimensionalen Potentialgleichung im Ringbereich $0 < a \leq \rho \leq b$; diese muß in φ periodisch sein. An den Rändern gilt: $\rho = a, b : G = 0$. Verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation in φ und die Methode der partikulären Integrale in ρ .

5. Berechnen Sie die Greensche Funktion der Potentialgleichung im dreidimensionalen freien Raum in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ . Verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation der Kugelflächenfunktionen und die Methode der partikulären Integrale in r . Berechnen Sie das Potential der sphärisch symmetrischen Massendichte

$$\rho(r) = \alpha/\sqrt{r} \quad \text{für} \quad 0 \leq r < a, \quad \rho(r) = 0 \quad \text{für} \quad a \leq r < \infty$$

für Aufpunkte mit $r >, =, < a$.

6. Berechnen Sie die Greensche Funktion eines der folgenden zweidimensionalen Probleme (Polarkoordinaten r, φ) zu einer der angegebenen Randbedingungen in r .

- (a) $L(u) := \Delta u - \kappa^2 u$:
 - 1) $u(a) = 0, u(0) = \text{endlich}$;
 - 2) $u'(a) = 0, u(0) = \text{endlich}$;
 - 3) $u(a) = 0, u(\infty) = 0$;
 - 4) $u'(a) = 0, u(\infty) = 0$.
- (b) $L(u) := \Delta u + k^2 u$:
 - 1) $u(a) = 0, u(0) = \text{endlich}$;

13 Ergänzungen zur Funktionentheorie

1. Untersuchen Sie das Relief, die Werteverteilung und Zugänglichkeit der folgenden wesentlichen Singularität:

$$e^{1/z^2} \quad \text{an} \quad z = 0.$$

2. Werten Sie eines der folgenden Integrale für $a >, < 0$ und $k >, =, < 0$ aus:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^4 + a^4} dx; \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

3. Berechnen Sie eines der folgenden Integrale durch komplexe Integration:

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 2x}{x^2} dx; \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx; \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx; \quad (d) \int_0^{\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{1+x^2} dx.$$

Für die Auswertung des Integrals (c) wählen Sie als Verzweigungsschnitt den Halbstrahl $0 \leq x \leq \infty$. Das Integral wird mit Hilfe des Cauchyschen Residuensatzes ausgewertet. Integrieren Sie die Funktion $f(z) = \ln^2 z / (1+z^2)$ (das Quadrat auf dem Logarithmus ist der entscheidende Trick!) über folgenden Weg: Von $z = \varepsilon + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ bis zu $z = R + i\varepsilon$, $R > 0$, also oberhalb des Verzweigungsschnitts; dann auf einem Kreis vom Radius R bis zu $z = R - i\varepsilon$; anschließend von $z = R - i\varepsilon$ zu $z = \varepsilon + i\varepsilon$, also unterhalb des Verzweigungsschnitts; schließen Sie den Weg mit einem kleinen Kreis vom Radius ε . Der Beitrag des letzten Integrals geht gegen Null für $\varepsilon \rightarrow 0$. Der Beitrag des Integrals über den großen Kreis geht für $R \rightarrow \infty$ gegen Null. - Das Integral (d) kann auf (c) zurückgeführt werden.

4. Summieren Sie eine der folgenden Reihen auf (mittels Residuenmethode):

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{a^2 - n^2}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{a^4 - n^4}, \quad a \notin \mathbb{Z}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + bn^2};$$

$$e) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(b + \pi n)^2 + a^2]^k}, \quad k \in \mathbb{N};$$

5. Summieren Sie folgende Reihen auf (mittels Residuenmethode) und bestimmen Sie das Intervall, in dem das resultierende Polynom mit der Fourierreihe übereinstimmt

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

6. Berechnen Sie die Werteverteilung von Real- und Imaginärteil der Funktion $f(z) = \sqrt{z^2 - k^2}$, $k \in \mathbb{R}$ in der komplexen $z = x + iy$ -Ebene für mindestens zwei der folgenden Festlegungen des Verzweigungsschnitts:

- (a) Gerade Strecke von $-k$ nach k .
 (b) Halbgerade von k nach $+\infty$ und von $-k$ nach $-\infty$.
 (c) Halbgerade von k nach $k + i\infty$ und von $-k$ nach $-k - i\infty$.
 (d) Halbgerade von k nach $k - i\infty$ und von $-k$ nach $-k + i\infty$.

7. Gegeben ist die Funktion $f(z) = \sqrt{z^2 - k^2}$ mit komplexem $k = |k|e^{i\alpha}$, $0 < \alpha < \pi/2$. Geben Sie den Verlauf der Phase von $f(z)$ an, wenn z längs der reellen Achse von $-\infty$ nach ∞ läuft.

8. Berechnen Sie alle Residuen der Funktion $z^3 / ((z-1)(z-2)(z-3))$ und deren Summe.

14 Die Greensche Funktion der Diffusions- und Potentialgleichung im freien Raum.

1. Rechnerisch ist das folgende Problem der zeitfreien Diffusionsgleichung zweidimensional: Vor einem unendlich langen Zylinder vom Radius a geht eine zur Zylinderachse parallele unendlich dünne, unendlich lange Linienquelle durch den Punkt $(x' > a, y' = 0)$. Berechnen Sie in ebenen Polarkoordinaten r, ϕ die Lösung, die auf dem Zylinder $r = a$ und im Unendlichen verschwindet.

15 Die Greensche Funktion der Helmholtzgleichung im freien Raum und in Rohren

1. Wie lautet die Austrahlungsbedingung für Lösungen der Wellengleichung $\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, die keine harmonische, sondern eine beliebige Zeitabhängigkeit aufweisen, im ein-, zwei- und dreidimensionalen Raum. Hinweis: Ersetzen Sie in der Sommerfeldschen Austrahlungsbedingung $k = \omega/c$ durch eine Zeitableitung.
2. (a) Eine Schallwelle wird durch folgende Funktion dargestellt:

$$\psi_e = e^{(ikx - \omega t)}$$

Welche Gestalt haben die Phasenflächen dieser Welle und in welche Richtung laufen sie ?

- (b) Rechnerisch ist das folgende Problem der Helmholtzgleichung zweidimensional: Die gerade angegebenen Schallwellen laufen auf einen Zylinder vom Radius a zu, dessen Achse die z -Achse ist. Die einfallende Welle wird also am Zylinder gestreut, es entsteht eine Streuwelle ψ_s . Der Zylinder ist schallhart, d.h. die totale Lösung

$$\psi = \psi_e + \psi_s$$

muss dort die Dirichletsche Randbedingung $r = a : \psi = 0$ erfüllen. Die Streuwelle muss im Unendlichen die Austrahlungsbedingung erfüllen.

Hinweis: Das Problem löst man in ebenen Polarkoordinaten r, ϕ . Die einlaufende Welle läßt sich folgendermaßen durch Zylinderwellen mit Besselfunktionen darstellen:

$$\psi_e = e^{ikx} e^{-i\omega t} = e^{ikr \cos \phi} e^{-i\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) e^{in\phi} e^{-i\omega t}.$$

ψ_s wird als analoge unendliche Reihe von auslaufenden Zylinderwellen mit imbestimmten Koeffizienten angesetzt; letztere bestimmt man aus der Randbedingung bei $r = a$.

3. Berechnen Sie die Greensche Funktion der Helmholtzgleichung für harmonische Zeitabhängigkeit (Kreisfrequenz ω) in einem unendlich langen Hohlrohr mit rechteckigem Querschnitt (Seitenlängen a, b). Die Differentialgleichung ist die dreidimensionale Helmholtzgleichung mit den Randbedingungen:
 - a) $u = 0$ auf Mantel (dieser ist schallhart; E-Typ bei elm. Wellen mit elektrischem Hertzschem Vektor).
 - b) $\partial u / \partial n = 0$ auf Mantel (dieser ist schallweich; H-Typ bei elm. Wellen mit magnetischem Hertzschem Vektor).In beiden Fällen gilt die eindimensionale Austrahlungsbedingung an den unendlich fernen Deckflächen des Rohrs. Im Falle b) gibt es auch eine Welle, die nicht von den transversalen Koordinaten abhängt.

4. Gleiche Aufgabe wie zuvor aber für ein kreiszylindrisches Hohlrohr. $u = \text{endlich}$ an $r = 0$; a) und b) wie oben. Leiten Sie folgende Darstellungen ab: 1) als Fourierintegral in z -Richtung, 2) als diskrete Doppelsumme.

16 Die charakteristische Singularität der Greenschen Funktion

Keine Übungsaufgaben

17 Erfüllung von Randbedingungen durch Symmetrieeoperationen. Konvergenzbeschleunigung von Lösungsdarstellungen durch Extraktion der Quellsingularitäten

1. Eine Punktladung Q befindet sich im Abstand a vor einer unendlich gut leitenden, geerdeten metallischen Ebene.
 - (a) Lösen Sie das Problem durch Spiegelung.
 - (b) Berechnen Sie die Ladungsdichte η , die die Ladung Q auf der Ebene durch Influenz erzeugt.
 - (c) Berechnen Sie die Kraft, die die Ladungsdichte η auf die Ladung Q ausübt.
 - (d) Berechnen Sie die Kraft zwischen der Ladung Q und der Spiegelladung. Vergleichen Sie dieses Resultat mit dem der vorhergehenden Teilaufgabe.

18 Lösung inhomogener Randwertprobleme mittels Greenscher Funktion

1. Es soll die homogene Potentiagleichung in einem Rechteck gelöst werden. Dieses sitzt im 1. Quadranten. Die Achsen parallel x sind a , die parallel y sind b . An $y = 0$, $0 \leq x \leq a$ liegt die Spannung V_0 . Berechnen Sie mittels Greenscher Funktion eine Lösung, die möglichst gut konvergiert.

19 Greens functions for problems with several layers

Keine Übungsaufgaben.

20 Die Greensche Funktion der zeitabhängigen Diffusionsgleichung

1. Eine Kugel, deren Massendichte, spezifische Wärme, Wärmeleitfähigkeit und Radius a konstant und bekannt sind, ist für Zeiten $t < 0$ durchgehenden kalt, $T = 0$. Ab $t = 0+$ wird die Temperatur auf der Oberfläche $r = a$ auf $T_1 > 0$ gehalten. Berechnen Sie die Greensche Funktion und die Temperaturverteilung $T(r, t)$. Hinweis: Für sphärisch symmetrische Lösungen sind die Radialfunktionen die sphärischen Besselfunktionen $\sim \sin(\alpha r)/r$ und $\sim \cos(\alpha r)/r$.

21 Die Greensche Funktion der Wellengleichung

1. Berechnen Sie die Greensche Funktion der Helmholtzgleichung im dreidimensionalen Raum in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ für folgenden Randbedingungen in r :

$$(a) u(0) = \text{endlich, } u(\infty) \text{ erfüllt Ausstrahlungsbedingung;}$$

$$(b) u(a) = 0, u(\infty) \text{ erfüllt Ausstrahlungsbedingung.}$$

2. Berechnen Sie die Greensche Funktion der Wellengleichung im dreidimensionalen Raum in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ als Fourierintegral in der Zeit. Benützen Sie für den Raumanteil das Resultat der vorhergehenden Aufgabe.

22 Lösungen der Vektorhelmoltzgleichung und der Maxwell'schen Gleichungen

1. Der Hohlraum ist der Raum zwischen zwei konzentrischen metallischen Kugeln: $0 < a \leq r \leq b$; $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Berechnen Sie die elektromagnetischen Eigenschwingungen in diesem Hohlraum. Geben Sie die transzendenten Gleichungen für die Eigenwerte an. Wer mit *Mathematica* vertraut ist, könnte auch einige Eigenwerte berechnen.
2. Es soll die Anregung des elektromagnetischen Feldes in einem rechteckigen Wellenleiter ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-\infty \leq z \leq \infty$), wie diese in Abb.21.3 gezeigt ist, in einer einfachen Rechnung modelliert werden. Dazu wird als Quelle ein elektrischer Hertz'scher Dipol $\vec{p}_e = \vec{e}_y p_e$ an der Stelle x', y', z' eingeführt. Nach den Ableitungen in §§21.4 und 21.5.7 kann das entsprechende Feld durch einen elektrischen Hertz'schen Vektor $\vec{e}_y p_e G(x, y, z; x', y', z')$ dargestellt werden; darin ist $G(x, y, z; x', y', z')$ die skalare Greensche Funktion, die an den Wänden und den (unendlich fernen) Deckflächen die Randbedingungen erfüllt.

Die Lösung besteht daher aus den folgenden Schritten:

- (a) Man berechnet das elektrische Feld mittels eines einkomponentigen Hertz'schen Vektors $\vec{\Pi}_e = \vec{e}_y \psi_e(x, y, z)$. Damit leitet man aus der Bedingung $\vec{E}_{\text{tang}} = 0$ an den metallischen Wänden folgende Randbedingungen ab:

$$\begin{aligned} x = 0, a : \psi_e(x, y, z) &= 0; & y = 0, b : \partial \psi_e(x, y, z) / \partial y &= 0; \\ z = \pm \infty : & \text{eindim. Ausstrahlungsbedingung.} \end{aligned}$$

- (b) Zur Berechnung der Greenschen Funktion muss man zunächst Vollständigkeitsrelationen geeigneter Lösungen in x und y aufsuchen. Dazu löst man die eindimensionalen Helmholtzgleichungen in diesen beiden Variablen; man sucht die diskreten Eigenwerte und -funktionen zu den in Punkt (a) abgeleiteten Randbedingungen. Die Eigenlösungen müssen normiert sein und ein vollständiges System bilden. (Vergessen Sie nicht den Eigenwert 0 bei den Lösungen in y mit anderswertigem Normierungsfaktor der Eigenfunktion !)
- (c) Entsprechend den gerade abgeleiteten Vollständigkeitsrelationen setzt man eine Doppelreihe für die Greensche Funktion an; die Entwicklungskoeffizienten sind Funktionen von z und z' : $g_{m,n}(z, z')$. m und n sind die Knotenzahlen in x und y . Alle diese Reihenansätze werden in die inhomogene Helmholtzgleichung, die die skalare Greensche Funktion $G(x, y, z; x', y', z')$ bestimmt, eingesetzt. Dies gibt eine inhomogene Helmholtzgleichung für die $g_{m,n}(z, z')$. Deren Lösung wurde in Kap.15 angegeben.
- (d) Damit hat man eine Reihendarstellung der Lösung. Geben Sie noch die von a und b abhängigen Bedingungen für die Kreisfrequenz ω des anregenden Hochfrequenzfeldes an, damit keine höheren Moden als die H_{01} -Welle angeregt werden. Gemäß Abb.21.3 ist $a > b$.